

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
Ю. М. Рабінович
М. С. Якір

11

ГЕОМЕТРІЯ

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ
І КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ**



 ГІМНАЗІЯ

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонський
Ю.М. Рабінович
М.С. Якір

Геометрія

11 клас

Збірник задач і контрольних робіт

Схвалено

*для використання у загальноосвітніх навчальних закладах
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України*

Харків
«Гімназія»
2011

УДК 373:512
ББК 22.151.я721
М52

*Схвалено
для використання у загальноосвітніх навчальних закладах
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України*

Мерзляк А. Г.

М52 Геометрія. 11 кл. : збірник задач і контрольних робіт /
А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. —
Х. : Гімназія, 2011. — 112 с. : іл.

ISBN 978-966-474-161-0.

Посібник є дидактичним матеріалом з геометрії для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Він містить понад 1000 задач. Першу частину «Тренувальні вправи» поділено на два однотипних варіанти по 481 задачі в кожному. Друга частина містить контрольні роботи (два варіанти) для оцінювання навчальних досягнень учнів відповідно до державної програми з математики.

Для вчителів загальноосвітніх навчальних закладів та учнів 11 класів.

УДК 373:512
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-474-161-0

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський,
Ю. М. Рабінович, М. С. Якір, 2011
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, 2011

ВІД АВТОРІВ

Учням

Любі учні! У цьому році ви поширите і поглибите свої знання зі стереометрії, познайомитеся з багатьма новими поняттями, фактами. Ми сподіваємося, що задачі, запропоновані в цій книжці, допоможуть зробити це знайомство не лише корисним, але й цікавим.

Учителю

Ми дуже сподіваємося, що, придбавши цю книжку не тільки для себе, а й «на клас», Ви не пошкодуєте. Навіть тоді, коли Вам пощастило і Ви працюєте за підручником, який подобається, все одно задач, як і грошей, буває або мало, або зовсім мало. Ми маємо надію, що цей посібник допоможе ліквідувати «задачний дефіцит».

Першу частину — «Тренувальні вправи» — поділено на два однотипних варіанти по 481 номеру в кожному. До багатьох (найбільш складних) задач першого варіанту наведено відповіді та вказівки до розв'язування. Відсутність відповідей до вправ другого варіанта, на нашу думку, розширює можливості вчителя при складанні самостійних і перевірочних робіт. На стор. 4-5 наведено таблицю тематичного розподілу тренувальних вправ.

Друга частина посібника містить 6 контрольних робіт (два варіанти). Зміст завдань для контрольних робіт поділимо умовно на дві частини. Перша відповідає початковому і середньому рівням навчальних досягнень учнів. Завдання цієї частини позначено символом n° (n — номер завдання). Друга частина відповідає достатньому і високому рівням. Завдання кожного з цих рівнів позначено символами n^{\bullet} і $n^{\bullet\bullet}$ відповідно. Виконання першої частини максимально оцінюється у 6 балів. Правильно розв'язані задачі рівня n^{\bullet} додають ще 4 бали, тобто учень має можливість отримати відмінну оцінку 10 балів. Якщо учневі вдалося ще розв'язати задачу $n^{\bullet\bullet}$, то він отримує оцінку 12 балів.

Бажаємо Вам творчої наснаги й терпіння...

Тематичний розподіл тренувальних вправ

Тема	Номери вправ
Прямокутна система координат у просторі	1 – 8
Координати середини відрізка. Відстань між точками	9 – 21
Симетрія у просторі	22 – 27
Вектори в просторі. Рівність векторів	28 – 35
Додавання векторів	36 – 40
Множення вектора на число. Колінеарні вектори	41 – 49
Одиничний вектор. Розклад вектора за трьома неколінеарними векторами	50 – 56
Скалярний добуток векторів	57 – 73
Паралельне перенесення в просторі	74 – 78
Двогранні та тригранні кути	79 – 93
Многогранники. Призма	94 – 98
Пряма і правильна призми	99 – 121
Похила призма	122 – 128
Паралелепіпед	129 – 138
Піраміда	139 – 183
Зрізана піраміда	184 – 189
Правильні многогранники	190 – 195
Зрізана піраміда	184 – 189
Правильні многогранники	190 – 195
Циліндр	196 – 210
Вписана і описана призми	211 – 222
Конус	223 – 234

Тема	Номери вправ
Зрізаний конус	235 – 242
Вписана і описана піраміди	243 – 248
Куля	249 – 260
Об'єм прямого паралелепіпеда	261 – 274
Об'єм похилого паралелепіпеда	275 – 281
Об'єм прямої призми	282 – 301
Об'єм похилої призми	302 – 306
Об'єм піраміди	307 – 334
Об'єм зрізаної піраміди	335 – 342
Об'єми подібних тіл	343 – 347
Об'єм циліндра	348 – 360
Об'єм конуса	361 – 371
Об'єм зрізаного конуса	372 – 377
Об'єм кулі. Об'єм кульового сегмента і кульового сектора	378 – 389
Площа бічної поверхні циліндра	390 – 404
Площа бічної поверхні конуса	405 – 420
Площа бічної поверхні зрізаного конуса	421 – 424
Площа сфери	425 – 430
Тіла обертання	431 – 438
Комбінації тіл	439 – 481

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

Варіант 1

Прямокутна система координат у просторі

1. Установіть, чи лежить дана точка на координатній осі:

- 1) $A(3; -2; 0)$; 3) $C(-2; 0; 0)$; 5) $E(0; 0; -8)$;
 2) $B(2; 0; -3)$; 4) $D(0; 1; 0)$; 6) $F(-4; 0; 0)$.

У разі позитивної відповіді вкажіть цю вісь.

2. Установіть, чи належить дана точка координатній площині:

- 1) $M(3; -2; 1)$; 3) $P(-4; 4; 0)$; 5) $D(-8; 0; 0)$;
 2) $N(-2; 0; 4)$; 4) $K(0; 1; 6)$; 6) $Q(-8; 9; 3)$.

У разі позитивної відповіді вкажіть цю площину.

3. Які з наведених точок лежать на одній прямій, паралельній осі аплікату: $A(4; -7; 1)$, $M(4; 7; -1)$, $T(4; -7; -1)$, $R(-4; 7; -1)$?
4. Які з наведених точок лежать в одній площині, паралельній площині xz : $F(3; -8; 2)$, $E(3; 8; -2)$, $K(-3; -8; -2)$, $N(3; 14; 2)$?
5. На яких відстанях від координатних площин знаходиться точка $D(-4; -2; 1)$?
6. Діагональ квадрата $OABC$ дорівнює $\sqrt{2}$ (рис. 1). Знайдіть координати його вершин.

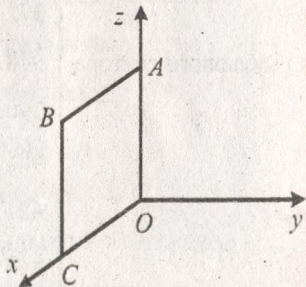


Рис. 1

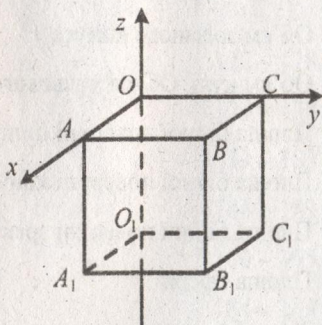


Рис. 2

7. Ребро куба $ABCOA_1B_1C_1O_1$ дорівнює 4 (рис. 2). Знайдіть координати вершин куба.
8. Відстані від точки K до осей координат дорівнюють 3 см, 5 см і 6 см. Знайдіть відстань від точки K до початку координат.

Координати середини відрізка. Відстань між точками

9. Знайдіть координати середини відрізка FK , якщо:

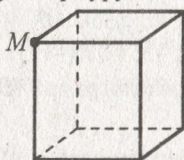
- 1) $F(-2; 3; 4)$, $K(6; 1; -2)$; 2) $F(-3; 0; 4)$, $K(3; 5; -2)$.

10. Точка M — середина відрізка AB . Знайдіть координати точки B , якщо $A(-3; 8; 5)$, $M(-5; 4; -6)$.
11. Знайдіть координати точки, яка ділить відрізок MK у відношенні $3 : 1$, рахуючи від точки M , якщо $M(3; -5; 1)$, $K(-1; 7; 5)$.
12. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо $A(3; -4; 5)$, $B(-6; 1; 6)$, $C(-5; 2; 1)$.
13. Точки $B_1(2; -3; 4)$ і $C_1(-6; 1; 2)$ — середини сторін AC і AB трикутника ABC відповідно. Знайдіть координати вершин A і B , якщо вершина C має координати $(-3; 4; 6)$.
14. Точки $A(4; 1; -1)$, $B(2; 4; -4)$ і $C(1; 2; 1)$ — середини сторін трикутника. Знайдіть координати вершин цього трикутника.
15. Знайдіть відстань між точками A і B , якщо:
1) $A(3; -2; 3)$, $B(-1; 2; 5)$; 2) $A(1; 5; -6)$, $B(-2; 3; -4)$.
16. У трикутнику ABC відомо, що $A(3; -1; -2)$, $B(-5; 7; 4)$, $C(1; 5; 2)$. Знайдіть довжину середньої лінії MN трикутника ABC , де M і N — середини сторін AC і BC відповідно.
17. Відстань між точками $A(4; -5; 2)$ і $B(1; y; -4)$ дорівнює 7. Знайдіть y .
18. На осі ординат знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(-2; 3; 1)$ і $B(1; 2; -4)$.
19. Знайдіть координати точок A і B та довжину відрізка AB , якщо точка A належить осі z , точка B лежить у площині xu і точка $C(-12; 10; -5)$ — середина відрізка AB .
20. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2; -3; 1)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(4; 1; 5)$ і $D(7; -2; 2)$ є ромбом.
21. Доведіть, що точки $A(5; 6; 7)$, $B(-1; -1; -4)$ і $C(11; 13; 18)$ лежать на одній прямій. Яка з них лежить між двома іншими?

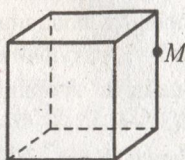
Симетрія у просторі

22. Запишіть координати точок, симетричних точкам $A(3; -4; 1)$, $B(-2; 1; -3)$, $C(5; 1; 9)$, $D(-2; -9; -8)$, $E(0; 0; 3)$, $F(0; -8; 9)$ відносно: 1) початку координат; 2) площини xu ; 3) площини xz ; 4) осі z .
23. Точки $M(4; -7; 2)$ і N симетричні відносно: 1) початку координат; 2) площини yz . Знайдіть довжину відрізка MN .
24. Точки $A(5; -3; 4)$ і $D(-3; 1; -2)$ симетричні відносно точки C . Знайдіть її координати.
25. Точку $M(a; b; c)$ послідовно симетрично відобразили відносно координатних площин xu , xz , yz . Доведіть, що отримана при цьому точка M_1 симетрична точці M відносно початку координат.

26. На рисунку 3 дано зображення куба. Перерисуйте його в зошит і побудуйте фігуру, симетричну кубу відносно точки M .



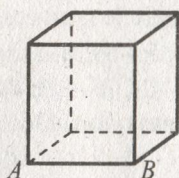
а)



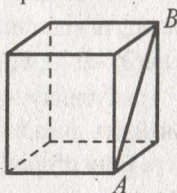
б)

Рис. 3

27. На рисунку 4 дано зображення куба. Перерисуйте його в зошит і побудуйте фігуру, симетричну кубу відносно прямої AB .



а)



б)

Рис. 4

Вектори в просторі. Рівність векторів

28. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{AB} , якщо:
 - 1) $A(2; 3; 1), B(1; -4; 5)$;
 - 2) $A(-3; -2; -8), B(4; -8; -9)$.
29. Дано точки $A(3; -2; 5), B(-4; 6; 1), C(-2; -6; -11), D(x; y; z)$. Знайдіть x, y і z , якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
30. Від точки $K(3; 9; -15)$ відкладено вектор $\overrightarrow{a}(2; -2; 1)$. Знайдіть координати кінця вектора.
31. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(3; -2; 5), B(-2; 7; -1), C(-4; 14; -4), D(1; 5; 2)$ є паралелограмом.
32. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A(3; -2; 1), B(-6; 4; 2), D(-3; 2; -4)$. Знайдіть координати вершини C .
33. Серед векторів $\overrightarrow{a}(3; -4; 5), \overrightarrow{b}(-4; 2; 4), \overrightarrow{c}(3; \sqrt{2}; -5), \overrightarrow{d}(1; 7; 0), \overrightarrow{e}(-2; \sqrt{5}; -5)$ знайдіть такі, що мають рівні модулі.
34. Модуль вектора $\overrightarrow{m}(5; -3; z)$ дорівнює 9. Знайдіть z .
35. Модуль вектора \overrightarrow{p} дорівнює 6, а його координати рівні. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{p} .

Додавання векторів

36. Дано вектори \vec{a} (4; -5; 6) і \vec{b} (-1; 2; 5). Знайдіть:
- 1) координати векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.
37. Знайдіть координати точки C такої, що $\vec{CA} + \vec{CB} = \vec{0}$, де $A(3; -4; 1)$, $B(-2; 6; -3)$.
38. Знайдіть координати векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо їх сумою є вектор \vec{m} (4; -1; 5), а різницею — вектор \vec{n} (6; 3; -1).
39. Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:
- 1) 2; 3; 4; 2) 7; 1; 8; 3) 3; 5; 9?
40. Дано вектори \vec{a} (-2; 4; 1), \vec{b} (3; -1; 4), \vec{c} (1; -3; 2). При якому значенні z модуль вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ набуває найменшого значення? Знайдіть це значення модуля.

Множення вектора на число. Колінеарні вектори

41. Дано вектори \vec{a} (2; -3; 4) і \vec{b} (-1; 6; 2). Знайдіть координати вектора:
- 1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $3\vec{a} + 4\vec{b}$; 3) $4\vec{a} - \vec{b}$; 4) $-3\vec{a} - 2\vec{b}$.
42. Знайдіть модуль вектора $\vec{c} = -3\vec{a} + \vec{b}$, де \vec{a} (4; 0; -3), \vec{b} (4; -6; -3).
43. Чи колінеарні вектори \vec{DE} і \vec{KF} , якщо $D(3; -2; -5)$, $E(-1; 4; 7)$, $K(1; 3; 6)$, $F(-3; 9; 18)$?
44. Знайдіть серед векторів \vec{a} (3; -2; 4), \vec{b} (-6; 4; -8), \vec{d} (-9; 6; -12), \vec{m} (30; -20; 40) співнапрямлені і протилежно напрямлені вектори.
45. Знайдіть значення y і z , при яких вектори \vec{a} (3; y ; 6) і \vec{b} (-6; 4; z) колінеарні.
46. Дано вектор \vec{a} (-3; 2; 6). Знайдіть координати вектора \vec{b} , протилежно напрямленого з вектором \vec{a} , якщо $|\vec{b}| = 21$.
47. Для ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} виконується рівність $5\vec{a} - 7\vec{b} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$. Доведіть, що вектори \vec{a} і \vec{b} співнапрямлені.
48. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(2; -3; 1)$, $B(-4; 2; 3)$, $C(6; 1; -4)$, $D(22; -5; -13)$ є трапецією.

49. Чи лежать точки $A(2; 3; -7)$, $B(4; 5; -1)$ і $C(0; 1; 11)$ на одній прямій?

Одиничний вектор. Розклад вектора за трьома неколінеарними векторами

50. Серед векторів $\vec{a}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{\sqrt{22}}{6}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\vec{c}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{11}}{4}\right)$, $\vec{d}(0; 0; -1)$, $\vec{e}(1; 1; 1)$ укажіть одиничні вектори.

51. Знайдіть координати одиничного вектора, який співнапрямлений з вектором:

1) $\vec{a}(-3; 4; 0)$; 2) $\vec{b}(2; -3; -6)$; 3) $\vec{c}(k; m; p)$.

52. Дано одиничні вектори $\vec{e}_1(1; 0; 0)$, $\vec{e}_2(0; 1; 0)$, $\vec{e}_3(0; 0; 1)$. Знайдіть координати векторів:

1) $5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$; 2) $4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_3$; 3) $m\vec{e}_1 - n\vec{e}_2 + k\vec{e}_3$.

53. Розкладіть вектор $\vec{m}(5; -17; 11)$ за векторами $\vec{a}(3; -2; 0)$, $\vec{b}(-2; 4; 1)$ і $\vec{c}(-1; -3; 4)$.

54. Точка S знаходиться поза площиною трикутника ABC . Виразіть вектори \vec{AB} , \vec{BC} і \vec{BM} , де точка M — середина відрізка AC , через вектори \vec{SA} , \vec{SB} і \vec{SC} .

55. Точка K рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$ з центром O . Виразіть вектори \vec{AD} , \vec{DC} , \vec{KD} і \vec{KO} через вектори \vec{KA} , \vec{KB} і \vec{KC} .

56. На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено відповідно точки E і F такі, що $BE:EA = 1:2$, $BF:FC = 3:1$. Поза площиною трикутника ABC взяли довільну точку P . Виразіть вектор \vec{FE} через вектори \vec{PA} , \vec{PB} і \vec{PC} .

Скалярний добуток векторів

57. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$;

2) $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$;

3) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 9$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

58. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:

1) $\vec{a}(-2; 3; 1)$, $\vec{b}(-4; -5; 2)$; 3) $\vec{a}(2; -1; 4)$, $\vec{b}(3; 2; -1)$.

2) $\vec{a}(0; 4; -7)$, $\vec{b}(-3; 0; 2)$;

59. Дано вектори $\vec{a}(4; -1; 5)$ і $\vec{b}(3; y; 2)$. При якому значенні y виконується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$?

60. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(2; -1; 2)$ і $\vec{b}(-4; 1; 3)$.

61. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC і установіть вид цього трикутника, якщо $A(1; -3; 4)$, $B(2; -2; 5)$, $C(3; 1; 3)$.

62. Дано вектори $\vec{a}(2; -3; 5)$ і $\vec{b}(1; 2; z)$. При якому значенні z вектори \vec{a} і \vec{b} перпендикулярні?

63. Дано вектори $\vec{a}(2; 4; -3)$ і $\vec{b}(x; 1; 6)$. При яких значеннях x кут між векторами \vec{a} і \vec{b} :

1) гострий;

2) прямий;

3) тупий?

64. Знайдіть кути, які утворює вектор \overrightarrow{AB} , де $A(5; 3; -1)$, $B(7; 1; -1)$, з додатними напрямками координатних осей.

65. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(5; -3; 2)$, $B(9; -1; 3)$, $C(12; -5; -1)$, $D(8; -7; -2)$ є прямокутником.

66. Знайдіть координати вектора \vec{n} , колінеарного вектору $\vec{k}(5; -3; 4)$, якщо $\vec{n} \cdot \vec{k} = -100$.

67. Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 120° , $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$. Знайдіть:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$; 3) $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{a}$; 4) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{a}$.

68. Кут між одиничними векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 30° . Обчисліть скалярний добуток $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$.

69. Дано вектори \vec{a} і \vec{b} , $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Знайдіть:

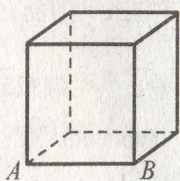
1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

70. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$ і $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, де \vec{m} і \vec{n} — одиничні перпендикулярні вектори.

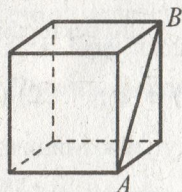
71. Дано вектори $\vec{a}(-2; 3; 1)$ і $\vec{b}(1; 4; -3)$. Знайдіть значення k , при якому вектори $\vec{a} + k\vec{b}$ і \vec{b} перпендикулярні.
72. Дано точки $A(1; 5; 8)$, $B(5; 2; 9)$, $C(7; 4; 7)$ і $D(8; 3; 0)$. Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини BCD .
73. Знайдіть множину точок $K(x; y; z)$ таку, що містить точку $M(2; 3; -1)$, і пряма, яка проходить через точки $A(2; -6; 4)$ і $B(6; -3; 5)$, перпендикулярна до кожної прямої, яка проходить через точку M .

Паралельне перенесення в просторі

74. Знайдіть точки, які є образами точок $A(4; -1; 5)$, $B(0; -3; -2)$, $C(2; 0; 0)$, $O(0; 0; 0)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(3; -2; 8)$.
75. При паралельному перенесенні образом точки $A(-3; 1; 2)$ є точка $A_1(5; -1; 4)$. Знайдіть образ точки $B(-4; 5; -7)$ при цьому паралельному перенесенні.
76. Дано точки $A(-7; 3; -2)$ і $B(4; -5; 1)$. Знайдіть вектор, який задає паралельне перенесення, при якому:
1) образом точки A є точка B ; 2) образом точки B є точка A .
77. Чи існує паралельне перенесення, при якому образом точки $K(-3; -2; 5)$ є точка $K_1(2; 4; 1)$, а образом точки $F(2; -7; 4)$ — точка $F_1(7; -1; 8)$?
78. На рисунку 5 дано зображення куба. Перерисуйте його в зошит і побудуйте фігуру, яка є образом даного куба при паралельному перенесенні, при якому образом точки A є точка B .



а)



б)

Рис. 5

Двогранні та тригранні кути

79. У гранях двогранного кута проведено прямі a і b , паралельні його ребру, на відстані 10 см і 6 см від нього відповідно. Знайдіть величину цього двогранного кута, якщо відстань між прямими a і b дорівнює 14 см.

80. Величина двогранного кута дорівнює 30° . Площина α перетинає грані двогранного кута по паралельним прямим, віддаленим від ребра двогранного кута на $2\sqrt{3}$ см і 6 см. Знайдіть відстань від ребра двогранного кута до площини α .
81. Рівносторонній трикутник ABC лежить в одній з граней двогранного кута, величина якого менша від 90° , а сторона AB належить його ребру. Знайдіть величину двогранного кута, якщо відстань від вершини C трикутника до другої грані дорівнює 2 см, а сторона трикутника дорівнює $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.
82. Величина двогранного кута дорівнює 60° . На його ребрі вибрано точки A і B , відстань між якими 24 см, а у гранях — точки C і D такі, що $AC = BC = 13$ см, $AD = BD = 15$ см. Знайдіть відстань між точками C і D .
83. Рівносторонній трикутник ABE і квадрат $ABCD$ лежать у гранях двогранного кута з ребром AB . Знайдіть величину двогранного кута, якщо $AB = 4\sqrt{2}$ см, $ED = 4$ см.
84. Рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) лежить в одній з граней двогранного кута з ребром AB , величина якого дорівнює 45° . Знайдіть кути, які утворюють катети цього трикутника з другою гранню.
85. З точок M і K , які лежать у різних гранях двогранного кута, величина якого 60° , проведено до його ребра перпендикуляри MM_1 і KK_1 завдовжки 3 см і 8 см відповідно. Знайдіть довжину відрізка MK , якщо $M_1K_1 = \sqrt{15}$ см.
86. З точок A і B , які лежать у різних гранях двогранного кута, проведено до його ребра перпендикуляри AC і BD завдовжки 5 см і 8 см відповідно. Знайдіть величину двогранного кута, якщо $CD = 24$ см, $AB = 25$ см.
87. У площині однієї з граней двогранного кута проведено пряму, яка утворює з ребром двогранного кута кут 60° , а з площиною другої грані — кут 45° . Знайдіть величину двогранного кута.
88. Точка A знаходиться всередині двогранного кута, величина якого дорівнює 60° , і віддалена від його граней на 8 см і 11 см. Знайдіть відстань від точки A до ребра двогранного кута.

89. Проекція прямої на площину однієї з граней двогранного кута перпендикулярна до його ребра. Доведіть, що проекція цієї прямої на площину другої грані також перпендикулярна до його ребра.
90. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від граней даного двогранного кута.
91. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Точка A знаходиться всередині тригранного кута на відстані 4 см, 8 см і 6 см від його ребер. Знайдіть відстань від точки A до вершини тригранного кута.
92. У тригранному куті плоскі кути дорівнюють 60° , 60° і 90° . Знайдіть величини двогранних кутів, які лежать проти рівних плоских кутів.
93. Усі плоскі кути тригранного кута дорівнюють 60° . Знайдіть величини його двогранних кутів.

Многогранники. Призма

94. Нарисуйте многогранник, у якого 6 вершин і 5 граней.
95. Нарисуйте многогранник, у якого 5 вершин і 5 граней.
96. Чи існує призма, у якій тільки одне бічне ребро перпендикулярне до площини основи?
97. Який многокутник лежить в основі призми, яка має: 1) 5 граней; 2) 14 граней; 3) k граней?
98. Чи існує призма, яка має 16 ребер?

Пряма і правильна призми

99. Основою прямої призми є квадрат зі стороною 4 см. Знайдіть діагоналі призми, якщо її бічне ребро дорівнює 7 см.
100. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом 60° і стороною 8 см. Знайдіть діагоналі призми, якщо її бічне ребро дорівнює 4 см.
101. Основою прямої призми є квадрат. Діагональ призми дорівнює 17 см, а висота — 15 см. Знайдіть діагональ бічної грані призми.
102. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 12 см і 18 см, а висота — 3 см. Знайдіть величини двогранних кутів при бічних ребрах призми.
103. Знайдіть ребро куба, якщо площа його діагонального перерізу дорівнює $16\sqrt{2}$ см².
104. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 4 см, а діагональ призми утворює з бічною гранню кут 30° . Знайдіть висоту призми і кут, який утворює діагональ призми з її основою.

105. Знайдіть сторону основи та меншу діагональ правильної шестикутної призми, якщо її більша діагональ дорівнює $8\sqrt{5}$ см, а всі ребра призми рівні між собою.
106. Основою прямої призми є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 8 см, а гострий кут — 30° . Через катет трикутника, який лежить проти кута 30° , проведено переріз, який утворює кут 60° з площиною основи і перетинає бічне ребро. Знайдіть площу перерізу.
107. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 4 см, а її висота — 8 см. Знайдіть площу перерізу призми, який проходить через діагональ основи паралельно діагоналі призми.
108. Основою призми є правильний трикутник зі стороною 8 см, а її бічні грані — прямокутники. Знайдіть площу бічної поверхні та площу повної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 12 см.
109. Знайдіть площу повної поверхні прямої призми, основою якої є рівнобедрений трикутник з основою 8 см і висотою, проведеною до неї, рівною 3 см, якщо висота призми дорівнює 6 см.
110. Основою прямої призми є ромб з діагоналями 16 см і 30 см, а діагональ бічної грані призми утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
111. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, якщо діагональ її бічної грані дорівнює m і утворює з бічним ребром кут α .
112. Радіус кола, описаного навколо основи правильної трикутної призми, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо всі її бічні грані — квадрати.
113. Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 8 см і 15 см і гострим кутом 60° . Площа меншого з діагональних перерізів призми дорівнює 130 см^2 . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
114. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, а площа повної поверхні призми — 312 см^2 . Знайдіть довжину її бічного ребра.
115. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 64 см^2 , а площа повної поверхні — 96 см^2 . Знайдіть висоту призми.
116. У правильній шестикутній призмі більша діагональ дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу повної поверхні призми.

117. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, менша основа якої дорівнює 8 см, а гострий кут — 60° . Діагоналі трапеції є бісектрисами її гострих кутів. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо діагональ призми утворює з площиною основи кут 30° .
118. Площа основи правильної трикутної призми дорівнює S , а діагональ бічної грані утворює з бічним ребром кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
119. Через сторону основи правильної трикутної призми зі стороною основи a проведено переріз, який перетинає бічне ребро призми у його середині і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
120. Основою прямої призми є ромб, більша діагональ якого дорівнює d . Діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут α , а з даною діагоналлю основи — кут β . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
121. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро — 2 см. Через сторону AC нижньої основи і середину сторони A_1B_1 верхньої основи проведено площину. Знайдіть площу утвореного перерізу призми.

Похила призма

122. Бічне ребро похилої призми дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть висоту призми.
123. Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC , $AB = AC = 10$ см, $BC = 16$ см. Бічне ребро призми AA_1 утворює з площиною основи кут 30° , а проекцією вершини A_1 на площину ABC є середина відрізка BC . Знайдіть площу грані BB_1C_1C .
124. Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнюють 4 см, 5 см і 7 см, а площа її бічної поверхні — 48 см^2 . Знайдіть бічне ребро призми.
125. У похилій трикутній призмі дві бічні грані перпендикулярні. Їх спільне бічне ребро дорівнює 12 см і віддалене від двох інших бічних ребер на 8 см і 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
126. Основою призми є правильний трикутник зі стороною 6 см. Одна з бічних граней — квадрат, а дві інші — паралелограми з гострим кутом 30° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

127. Кожне ребро похилої трикутної призми дорівнює 6 см, а одне з бічних ребер утворює з сусідніми сторонами основи кути по 45° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
128. Основою призми є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Дві бічні грані, що містять менші сторони основи, перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею кут 30° . Знайдіть бічне ребро призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 220 см^2 .

Паралелепіпед

129. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 6 см, а діагональ — $\sqrt{65}$ см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.
130. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ більша за ребра паралелепіпеда на 10 см, 9 см і 1 см відповідно.
131. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо площа його повної поверхні дорівнює 160 см^2 , а площа бічної поверхні — 128 см^2 .
132. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як 3 : 5, а діагоналі бічних граней дорівнюють 10 см і $2\sqrt{41}$ см. Знайдіть довжини ребер паралелепіпеда.
133. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут α , а з площиною бічної грані — кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
134. Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 60° . Знайдіть більшу діагональ паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 3 см.
135. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 4 см і 8 см, а кут між ними — 60° . Більша діагональ основи дорівнює меншій діагоналі паралелепіпеда. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
136. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо площі його діагональних перерізів дорівнюють 6 см^2 і 8 см^2 .
137. Основою паралелепіпеда є ромб з гострим кутом 60° . Бічне ребро, яке виходить з вершини цього кута, утворює з його сторонами кути по 45° . Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 6 см.

138. Основою паралелепіпеда є квадрат. Одна з вершин його верхньої основи рівновіддалена від вершин нижньої основи. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює $7,5$ см, а сторона основи — $6\sqrt{2}$ см.

Піраміда

139. Знайдіть суму плоских кутів трикутної піраміди.

140. Чи існує піраміда, яка має 11 ребер?

141. На рисунку 6 зображено правильну трикутну піраміду $SABC$. Перерисуйте рисунок у зошит і зобразіть: 1) висоту піраміди; 2) кут нахилу ребра SA до площини основи; 3) лінійний кут двогранного кута при ребрі BC .

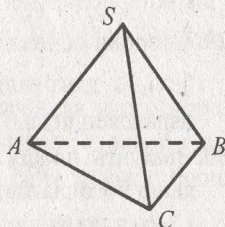


Рис. 6

142. Чи існує правильна шестикутна піраміда, усі ребра якої рівні?
143. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 8 см, а сторона основи — 6 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.
144. Знайдіть площу діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 см, а бічне ребро — 10 см.
145. Знайдіть апофему правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює 12 см, а діагональ основи — $4\sqrt{2}$ см.
146. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть сторону основи піраміди.
147. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема — 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
148. Плоский кут при вершині правильної дев'ятикутної піраміди дорівнює 30° , а бічне ребро — 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
149. У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні правильної піраміди, якщо сторону основи збільшити у 3 рази, а апофему — у 2 рази?
150. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота — 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

151. Знайдіть відношення площі основи правильної піраміди до площі бічної поверхні, якщо апофема утворює з площиною основи кут 60° .
152. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 2 см, а бічна грань утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
153. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 8 см, а висота — 4 см.
154. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
155. У правильній трикутній піраміді кут між апофемами дорівнює 60° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо сторона її основи дорівнює 4 см.
156. Кожне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
157. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а радіус кола, вписаного в основу, — 3 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
158. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює 6 см, а висота — 4 см. Знайдіть: 1) апофему піраміди; 2) кут нахилу бічного ребра до площини основи; 3) кут нахилу бічної грані до площини основи; 4) площу повної поверхні піраміди.
159. У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° , а радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
160. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює m і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
161. Радіус кола, описаного навколо бічної грані правильної трикутної піраміди, дорівнює R , а плоский кут при вершині — α . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
162. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут α , а відстань від основи висоти піраміди до бічного ребра дорівнює b . Знайдіть ребра піраміди.

163. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть: 1) кут нахилу бічної грані до площини основи; 2) плоский кут при вершині піраміди; 3) двогранний кут при бічному ребрі піраміди.
164. У правильній трикутній піраміді бічна грань утворює з площиною основи кут α . Знайдіть: 1) кут нахилу бічного ребра до площини основи; 2) плоский кут при вершині піраміди; 3) двогранний кут при бічному ребрі піраміди.
165. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди $MABCD$ дорівнює a , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через діагональ AC основи паралельно ребру MB .
166. У правильній чотирикутній піраміді через середини двох сусідніх бічних ребер проведено переріз, паралельний висоті піраміди. Знайдіть площу перерізу, якщо бічне ребро піраміди дорівнює 12 см, а діагональ основи — $8\sqrt{2}$ см.
167. Усі бічні ребра трикутної піраміди $SABC$ рівні, відрізок SO — її висота (рис. 7). Що можна сказати про вид трикутника ABC ?
168. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. Відомо, що $\angle SAC = \angle SCA$, $\angle SBD = \angle SDB$. Доведіть, що основа висоти піраміди — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$.
169. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см, а всі бічні ребра рівні.
170. Основою піраміди $SABC$ є трикутник ABC , $AB = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135^\circ$. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 30° . Знайдіть висоту піраміди.
171. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює 4 см, а діагоналі ділять гострі кути трапеції навпіл. Знайдіть висоту піраміди, якщо гострий кут трапеції дорівнює 60° , а всі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут 30° .
172. Основою піраміди є ромб, менша діагональ якого дорівнює 4 см, а гострий кут — 60° . Усі бічні грані утворюють з площиною основи піраміди кут 45° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

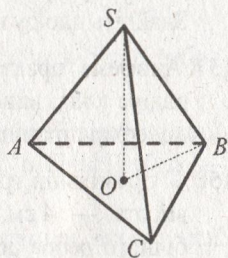


Рис. 7

173. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a і протилежним гострим кутом α . Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
174. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом 2α при основі і радіусом вписаного кола r . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β .
175. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 8 см і 4 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° .
176. Основою піраміди $SABC$ є правильний трикутник ABC , ребро SC перпендикулярне до площини основи (рис. 8). Перерисуйте рисунок у зошит і вкажіть: 1) кут нахилу грані ASB до площини основи; 2) кути нахилу ребер SA і SB до площини основи.
177. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 18 см і бічною стороною 15 см. Дві бічні грані, що містять рівні сторони основи, перпендикулярні до площини основи, а їх спільне бічне ребро дорівнює 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
178. Основою піраміди $DABC$ є прямокутний трикутник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $AB = 20$ см, $AC = 16$ см. Бічне ребро DA перпендикулярне до площини основи і дорівнює 18 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
179. Основою піраміди є квадрат. Дві сусідні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею кут 30° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її найменше бічне ребро дорівнює 4 см.
180. Основою піраміди є правильний шестикутник зі стороною a . Висота піраміди дорівнює стороні основи і проходить через одну з вершин основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
181. Основою піраміди є прямокутник. Дві сусідні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею кути α і β . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює h .

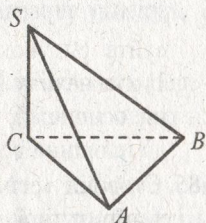


Рис. 8

182. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною 8 см і кутом при основі 30° . Бічна грань, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють з нею кут 30° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
183. Основою піраміди $MABCD$ є прямокутник $ABCD$, у якому $AB = 8$ см, $BC = 15$ см. Грань MAB перпендикулярна до площини основи, а грані MAD і MBC утворюють з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Зрізана піраміда

184. На рисунку 9 зображено правильну зрізану піраміду $ABCA_1B_1C_1$. Перерисуйте рисунок у зошит і побудуйте: 1) кут нахилу бічного ребра до площини основи; 2) кут нахилу бічної грані до площини основи.

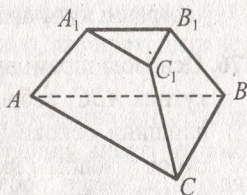


Рис. 9

185. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 8 см і 6 см, а бічне ребро — 5 см. Знайдіть площу повної поверхні зрізаної піраміди.
186. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 10 см і 6 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут 45° . Знайдіть площу діагонального перерізу зрізаної піраміди.
187. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді діагоналі основ дорівнюють 10 см і 6 см, а бічна грань утворює з площиною більшої основи кут 60° . Знайдіть висоту зрізаної піраміди.
188. У правильній зрізаній трикутній піраміді сторони основ дорівнюють 8 см і 16 см, а її висота — 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
189. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 2 см і 8 см, а її висота — 6 см. Через протилежні сторони верхньої та нижньої основ проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу.

Правильні многогранники

190. Скільки чотиригранних кутів має октаедр?
191. Знайдіть суму плоских кутів при всіх вершинах додекаедра.
192. Площа повної поверхні ікосаедра дорівнює 480 см^2 . Знайдіть площу однієї його грані.

193. Довжина ребра октаедра дорівнює 6 см. Знайдіть площу його повної поверхні.
194. Знайдіть площу повної поверхні куба, якщо його діагональ дорівнює d .
195. Доведіть, що центри граней куба — вершини октаедра. Знайдіть відношення площ їх поверхонь.

Циліндр

196. Площа осевого перерізу циліндра дорівнює 156 см^2 . Знайдіть висоту циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 6 см.
197. Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною основи циліндра кут 30° . Знайдіть висоту циліндра і площу його основи.
198. Радіус основи циліндра дорівнює 8 см, а діагональ осевого перерізу більша за твірну на 2 см. Знайдіть площу осевого перерізу циліндра.
199. Висота циліндра дорівнює 5 см. На відстані 4 см від його осі проведено переріз, перпендикулярний до основ циліндра. Знайдіть радіус основи, якщо діагональ перерізу дорівнює 13 см.
200. Осевий переріз циліндра — квадрат зі стороною $2\sqrt{5}$ см. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює 5 см. Знайдіть площу цього перерізу.
201. Через твірну циліндра проведено осевий переріз і переріз, площина якого утворює з площиною осевого перерізу кут 30° . Знайдіть площу осевого перерізу, якщо площа другого перерізу дорівнює Q .
202. Квадрат зі стороною 6 см обертається навколо однієї із сторін. Знайдіть: 1) площу осевого перерізу утвореного циліндра; 2) довжину кола основи утвореного циліндра; 3) площу перерізу, який проходить паралельно осі утвореного циліндра на відстані 3 см від неї.
203. Площа осевого перерізу циліндра дорівнює Q . Знайдіть площу перерізу циліндра, який проходить паралельно осі циліндра на відстані, яка дорівнює половині радіуса основи циліндра.
204. Через твірну циліндра проведено два перерізи, площі яких дорівнюють 8 см^2 і 15 см^2 . Знайдіть площу осевого перерізу циліндра, якщо площини проведених перерізів перпендикулярні.
205. Висота і радіус основи циліндра відповідно дорівнюють 5 см і 10 см. Кінці відрізка завдовжки 13 см лежать на колах різних

основ циліндра. Знайдіть відстань від осі циліндра до прямої, що містить цей відрізок.

206. Розгорткою бічної поверхні циліндра є квадрат. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать діагоналі осьового перерізу циліндра.
207. У нижній основі циліндра проведено хорду на відстані d від центра цієї основи, яку видно з центра верхньої основи під кутом α . Довжина відрізка, який з'єднує центр верхньої основи з серединою цієї хорди, дорівнює m . Знайдіть радіус основи циліндра.
208. Паралельно осі циліндра проведено переріз, площа якого дорівнює S , а діагональ перерізу утворює з площиною основи кут α . Переріз перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом β . Знайдіть висоту і радіус основи циліндра.
209. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює d і який перетинає нижню основу по хорді, яку видно з її центра під кутом α . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з серединою цієї хорди, утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть площу проведеного перерізу.

210. Прямокутник MM_1N_1N — переріз циліндра, паралельний його осі (рис. 10). Точки A і B лежать на основах циліндра по різні сторони від даного перерізу. Перерисуйте рисунок у зошит і побудуйте точку перетину прямої AB з площиною MM_1N_1 .

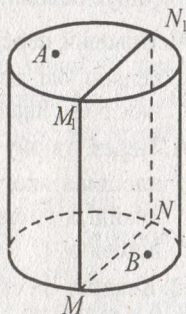


Рис. 10

Вписана і описана призми

211. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є прямокутник?
212. Чи можна вписати циліндр у призму, основою якої є ромб?
213. Визначте вид трикутника, який є основою призми, вписаної в циліндр, якщо вісь циліндра проходить поза прямою.
214. Основою прямої призми є чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 123^\circ$, $\angle C = 144^\circ$, $\angle D = 57^\circ$. Чи можна описати циліндр навколо цієї призми?
215. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює меншій основі, а гострий кут — 60° . Чи можна вписати циліндр у цю призму?

216. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а навколо нього описано правильну шестикутну призму. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь цих призм.
217. Основою прямої призми є рівнобедрений прямокутний трикутник. Висота призми дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 40 см^2 . Знайдіть радіус основи циліндра, описаного навколо цієї призми.
218. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a , а висота призми — H . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, який описано навколо призми.
219. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S . Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, вписаної у цей циліндр.
220. У правильну чотирикутну призму вписано циліндр, радіус основи якого дорівнює R , а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
221. У правильну трикутну призму вписано циліндр, висота якого дорівнює H , а радіус основи — R . Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, по яким бічна поверхня циліндра дотикається до бічної поверхні призми.
222. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ грані, що містить основу цього трикутника, утворює з площиною основи призми кут β . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо радіус основи циліндра, описаного навколо призми, дорівнює R .

Конус

223. Доведіть, що кожна точка осі конуса рівновіддалена від його твірних.
224. Висота конуса дорівнює 9 см, а його твірна — 11 см. Знайдіть радіус основи конуса.
225. Знайдіть висоту і радіус основи конуса, якщо його твірна дорівнює 12 см, а осьовий переріз конуса — правильний трикутник.
226. Висота конуса дорівнює 12 см, а різниця твірної і радіуса основи дорівнює 8 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.
227. Висота конуса дорівнює 18 см, а радіус основи — 6 см. Площина, перпендикулярна до осі конуса, перетинає його бічну поверхню по колу, радіус якого 4 см. Знайдіть відстань від площини перерізу до площини основи конуса.

228. Радіус основи конуса дорівнює 9 см, а його висота поділена на три рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні площині його основи. Знайдіть площі отриманих перерізів.
229. Твірна конуса утворює з площиною основи кут 30° , а радіус кола, описаного навколо осьового перерізу конуса, дорівнює 6 см. Знайдіть висоту конуса.
230. Твірна конуса утворює з площиною основи кут α , а площа осьового перерізу дорівнює Q . Знайдіть площу основи конуса.
231. Через вершину конуса проведено переріз, який перетинає його основу по хорді завдовжки 12 см. Цю хорду видно з центра основи під кутом 60° . Знайдіть кут між площиною перерізу і площиною основи конуса, якщо площа перерізу дорівнює 72 см^2 .
232. В основі конуса проведено хорду завдовжки m , яку видно з центра основи під кутом α . Знайдіть висоту конуса, якщо твірна конуса утворює з площиною основи кут β .
233. В основі конуса проведено хорду AB на відстані 3 см від центра O основи, відрізок MO — висота конуса, $MO = 6\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від точки O до площини AMB .
234. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює φ , проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо висота конуса дорівнює h і утворює з його твірною кут α .

Зрізаний конус

235. Висота зрізаного конуса дорівнює 10 см, а твірна утворює з площиною більшої основи кут 30° . Знайдіть твірну зрізаного конуса.
236. Твірна зрізаного конуса дорівнює 15 см, висота — 12 см, радіус однієї з основ — 6 см. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.
237. Радіуси основ зрізаного конуса відносяться як 9 : 5. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, якщо його висота дорівнює 15 см, а твірна — 17 см.
238. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 9 см^2 і 25 см^2 . Через середину його висоти проведено переріз, паралельний основам. Знайдіть площу цього перерізу.
239. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 10 см і 8 см, а його твірна перпендикулярна до діагоналі осьового перерізу, який проходить через цю твірну. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.

240. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 6 см і 9 см, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною більшої основи кут 30° . Знайдіть твірну зрізаного конуса.

241. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 8 см і 13 см, а його твірна дорівнює радіусу більшої основи. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.

242. У зрізаному конусі проведено осьовий переріз MM_1N_1N і по різні сторони від нього на колах основ вибрано точки A і B (рис. 11). Перерисуйте рисунок у зошит і побудуйте точку перетину прямої AB з площиною MM_1N_1 .

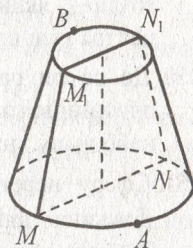


Рис. 11

Вписана і описана піраміди

243. У конус вписана піраміда, основою якої є прямокутний трикутник. Доведіть, що висотою конуса є висота грані піраміди, що містить гіпотенузу трикутника основи.

244. Основою піраміди є прямокутник, діагональ якого дорівнює 8 см. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кути по 30° . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

245. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона — 10 см. У піраміду вписано конус. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо його висота дорівнює 9 см.

246. Висота конуса дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з твірною кут 30° . Навколо конуса описано чотирикутну піраміду, основою якої є трапеція, середня лінія якої дорівнює 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

247. Основи зрізаної піраміди — квадрати, площі яких дорівнюють 16 см^2 і 36 см^2 , а площа її бічної поверхні — 40 см^2 . Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, вписаного в цю зрізану піраміду.

248. Основою піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює Q , а гострий кут — α . Бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

Куля

249. Радіус кулі дорівнює $\sqrt{5}$ см. Усередині чи зовні кулі розміщена точка A , якщо вона віддалена: 1) від центра кулі на 2 см; 2) від центра кулі на 2,3 см; 3) від точки на поверхні кулі на 4,5 см?
250. До сфери радіусом 8 см проведено дотичну площину. На цій площині взято точку A на відстані 6 см від точки дотику. Знайдіть найбільшу і найменшу відстані від точки A до точок сфери.
251. Сферу перетнуто площиною на відстані 12 см від її центра. Довжина лінії перетину сфери з площиною дорівнює 10π см. Знайдіть радіус сфери.
252. Через кінець радіуса кулі проведено площину, яка утворює з ним кут 30° . Знайдіть площу перерізу кулі цією площиною, якщо радіус кулі дорівнює 6 см.
253. Площа великого круга кулі дорівнює Q , а площа перерізу кулі площиною дорівнює $\frac{Q}{2}$. На якій відстані від центра кулі проведено переріз?
254. Діаметр кулі двома точками поділений на три частини у відношенні $2 : 3 : 5$. Знайдіть відношення площ перерізів кулі, які проходять через ці точки перпендикулярно до діаметра кулі.
255. Вершини прямокутного трикутника лежать на поверхні кулі, радіус якої 6 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 4 см.
256. Вершини трикутника зі стороною 16 см і протилежним їй кутом 150° лежать на поверхні кулі. Відстань від центра кулі до площини трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кулі.
257. Радіус кулі дорівнює 16 см. Вона дотикається до всіх сторін правильного трикутника зі стороною 48 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.
258. Куля дотикається до всіх сторін рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 16 см і 36 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трапеції, якщо радіус кулі дорівнює 13 см.
259. Куля дотикається до двох перпендикулярних площин. Відстань між точками дотику дорівнює 8 см. Знайдіть відстань від центра кулі до лінії перетину площин.
260. Радіуси двох сфер дорівнюють 13 см і 15 см, а відстань між їх центрами — 14 см. Знайдіть довжину лінії перетину цих сфер.

Об'єм прямого паралелепіпеда

261. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 3 см, 5 см і 4 см.
262. Площа поверхні куба дорівнює 96 см^2 . Знайдіть його об'єм.
263. Кожне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 6 см, а гострий кут основи — 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
264. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см і 8 см, а його діагональ утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
265. У прямокутному паралелепіпеді одна із сторін основи дорівнює 8 см. Діагональ паралелепіпеда дорівнює 16 см і утворює з бічною гранню, що містить цю сторону, кут 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
266. Менша сторона основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 6 см, а кут між діагоналями основи дорівнює 60° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його діагональ утворює з площиною основи кут 30° .
267. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, менша діагональ якого дорівнює 6 см, а гострий кут — 60° . Бічне ребро паралелепіпеда у 2 рази менше від сторони основи. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
268. Одна із сторін основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 4 см, а кут між діагоналями основи, що лежить проти цієї сторони, — 60° . Переріз, який проходить через діагональ нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
269. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною a і гострим кутом α . Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
270. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 5 см і 8 см, а гострий кут — 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 104 см^2 .
271. Площина, яка проходить через вершини A, B і C_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо $AB = a$, $BC = b$.
272. Основою прямокутного паралелепіпеда є паралелограм, гострий кут якого дорівнює α , а площа — S . Площі двох сусідніх бічних граней паралелепіпеда дорівнюють M і N . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

273. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 13 см, 15 см і $\sqrt{106}$ см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
274. У циліндр вписано прямокутний паралелепіпед, діагональ якого утворює з площиною основи кут 30° , а з однією з бічних граней — кут 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо радіус основи циліндра дорівнює 3 см.

Об'єм похилого паралелепіпеда

275. Основою похилого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 4 см і 9 см, а гострий кут — 30° . Бічне ребро паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 45° і дорівнює 6 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
276. Бічне ребро похилого паралелепіпеда дорівнює 9 см. Переріз паралелепіпеда площиною, перпендикулярною до бічного ребра, є прямокутником, сторони якого дорівнюють 6 см і 3 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
277. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 3 см. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 4 см і утворює з сусідніми сторонами основи, які перетинає, кути по 60° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
278. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 4 см. Дві його протилежні бічні грані — також квадрати, а дві інші — ромби з гострим кутом 60° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
279. Основою похилого паралелепіпеда є ромб зі стороною a і гострим кутом α . Бічне ребро, що виходить з вершини гострого кута ромба, дорівнює b і утворює з кожною із сторін ромба, які перетинає, гострий кут β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
280. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 2 см і 3 см, бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 7 см, а бічні грані утворюють з площиною основи кути 60° і 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
281. Бічне ребро похилого паралелепіпеда знаходиться на відстані m від паралельного йому діагонального перерізу, площа якого дорівнює Q . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Об'єм прямої призми

282. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою 16 см і бічною стороною 17 см. Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, утворює з площиною основи призми кут 30° . Знайдіть об'єм призми.

283. Кожне ребро правильної шестикутної призми дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм призми.
284. Діагональний переріз правильної чотирикутної призми — квадрат, площа якого дорівнює 16 см^2 . Знайдіть об'єм призми.
285. У правильній шестикутній призмі діагональ бічної грані дорівнює d і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм призми.
286. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V . Знайдіть об'єм призми, вершини якої — середини сторін основ даної призми.
287. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 16 см^2 , а діагональ основи призми втричі менша від діагоналі бічної грані. Знайдіть об'єм призми.
288. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ грані, що містить бічну сторону трикутника, дорівнює d і утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.
289. Основа прямої призми — трикутник зі стороною c і прилеглими до неї кутами α і β . Діагональ бічної грані, що проходить через сторону основи, яка протилежна куту α , нахилена до площини основи під кутом γ . Знайдіть об'єм призми.
290. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетом 6 см і гострим кутом 45° . Об'єм призми дорівнює 108 см^3 . Знайдіть площу повної поверхні призми.
291. Основа прямої призми — ромб з гострим кутом 30° . Діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 9 см.
292. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетом a і протилежним кутом α . Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм призми.
293. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ бічної грані призми, що містить бічну сторону основи, дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм призми.
294. У правильній шестикутній призмі діагоналі дорівнюють 10 см і $2\sqrt{21}$ см. Знайдіть об'єм призми.

295. Основою прямої призми є рівнобедрений прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює c . Через один з катетів нижньої основи та середину протилежного бічного ребра проведено переріз, площа якого дорівнює Q . Знайдіть об'єм призми.
296. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 16 см, а діаметр кола, вписаного в трапецію, вдвічі менший від діагоналі призми. Знайдіть об'єм призми.
297. Менший діагональний переріз правильної шестикутної призми — квадрат, а більша діагональ призми дорівнює $2d$. Знайдіть об'єм призми.
298. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами a і b ($a > b$). Через більшу основу трапеції і середину бічного ребра, протилежного цій основі, проведено переріз, який утворює з площиною основи кут α і площа якого дорівнює S . Знайдіть об'єм призми.
299. У правильній чотирикутній призмі діагональ бічної грані дорівнює 17 см, а площа бічної поверхні — 480 см^2 . Знайдіть об'єм призми.
300. Основа прямої призми — ромб з більшою діагоналлю d і гострим кутом α . Через меншу діагональ нижньої основи і вершину гострого кута верхньої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм призми.
301. Кут між діагоналями двох бічних граней правильної трикутної призми, проведеними з однієї вершини, дорівнює α . Знайдіть об'єм призми, якщо діагональ бічної грані дорівнює d .

Об'єм похилої призми

302. Основою похилої призми є рівнобедрений трикутник з бічною стороною 6 см і кутом при вершині 120° . Бічне ребро призми дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм призми.
303. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною a . Проекцією однієї з вершин верхньої основи на площину нижньої основи є центр цієї основи, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм призми.
304. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 3 см. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є ромбом з діагоналлю 4 см. Знайдіть об'єм призми.

305. Усі грані призми — рівні ромби зі стороною 8 см і гострим кутом 60° . Знайдіть об'єм призми.
306. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює a і віддалене від протилежної бічної грані на відстань m . Відстань між двома іншими бічними ребрами дорівнює l . Знайдіть об'єм призми.

Об'єм піраміди

307. Основою піраміди є трикутник ABC , $AB = BC = 8$ см, $AC = 6$ см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.
308. У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено переріз через пряму BD і точку A_1 (рис. 12). Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо об'єм піраміди $A_1 ABD$ дорівнює V .
309. Точки M , K і P — середини ребер $A_1 D_1$, $D_1 C_1$ і DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ відповідно (рис. 13). Знайдіть об'єм піраміди $D_1 MKP$, якщо об'єм куба дорівнює V .
310. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 16 см і бічною стороною 10 см. Проекцією вершини піраміди на площину її основи є точка перетину медіан основи. Найменше бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди.
311. Об'єм правильної піраміди дорівнює V . Чому буде дорівнювати об'єм правильної піраміди, висота якої в m разів більша за висоту, а сторона основи в n разів більша за сторону основи першої піраміди?
312. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, якщо сторона її основи дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 30° .

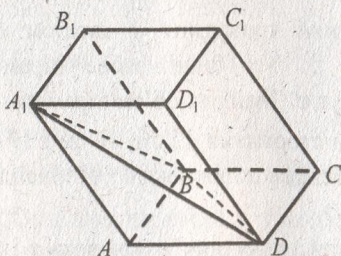


Рис. 12

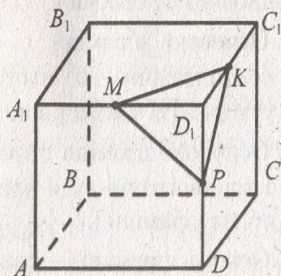


Рис. 13

313. Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює d , а бічна грань утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди.
314. Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди — рівносторонній трикутник, площа якого дорівнює S . Знайдіть об'єм піраміди.
315. Основою правильної піраміди є трикутник. Радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює 6 см, а бічні ребра утворюють з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм піраміди.
316. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює α , а відрізок, що сполучає середину висоти з серединою апофеми, дорівнює a . Знайдіть об'єм піраміди.
317. У правильній чотирикутній піраміді відстань від центра основи до бічної грані дорівнює 3 см, а бічна грань утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди.
318. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює 6 см, а двогранний кут при бічному ребрі — 120° . Знайдіть об'єм піраміди.
319. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює a , а плоский кут при вершині — α . Знайдіть об'єм піраміди.
320. У правильній чотирикутній піраміді апофема дорівнює a , а кут між апофемами двох сусідніх бічних граней дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди.
321. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h , а плоский кут при вершині — α . Знайдіть об'єм піраміди.
322. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди.
323. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом b і протилежним до нього кутом β . Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут φ . Знайдіть об'єм піраміди.
324. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 15 см, 16 см і 17 см, а всі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють 60° . Знайдіть об'єм піраміди.
325. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Усі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють β . Знайдіть об'єм піраміди.

326. Основа піраміди — ромб зі стороною a і кутом α . Усі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють β . Знайдіть об'єм піраміди.
327. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Бічне ребро, яке проходить через вершину найменшого кута основи, перпендикулярне до площини основи і дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм піраміди.
328. Основою піраміди $SABC$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Знайдіть об'єм піраміди, якщо бічне ребро SA перпендикулярне до площини основи і вдвічі менше від гіпотенузи AB трикутника ABC .
329. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом α при вершині. Бічне ребро, що проходить через вершину кута α , перпендикулярне до площини основи, а бічна грань, що містить основу трикутника, утворює з площиною основи кут ϕ . Знайдіть об'єм піраміди.
330. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього гострим кутом α . Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.
331. Основою піраміди є рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 6 см. Бічна грань, що містить один з катетів, перпендикулярна до площини основи і є правильним трикутником. Знайдіть об'єм піраміди.
332. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною a . Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є рівнобедреним прямокутним трикутником з гіпотенузою a . Знайдіть об'єм піраміди.
333. Основою піраміди $SABC$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle ABC = \beta$. Грань ASC перпендикулярна до площини основи, а грані BSC і ASB утворюють з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди.
334. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом α при основі. Бічна грань піраміди, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.

Об'єм зрізаної піраміди

335. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 3 см і 5 см, а висота — 4 см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
336. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 4 см і 6 см, а бічна грань утворює з площиною більшої основи кут 30° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
337. Сторона меншої основи правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнює 4 см, а бічне ребро дорівнює 6 см і утворює з площиною більшої основи кут 45° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
338. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 4 см і 6 см, а висота повної піраміди — 3 см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
339. Основи зрізаної піраміди — рівнобедрені трикутники зі сторонами 5 см, 5 см, 6 см і 10 см, 10 см, 12 см відповідно. Усі бічні ребра утворюють з площиною більшої основи кут 45° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
340. Основи зрізаної піраміди — трикутники зі сторонами 13 см, 14 см, 15 см і 26 см, 28 см, 30 см відповідно. Усі бічні грані утворюють з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
341. Основи зрізаної піраміди — трикутники зі сторонами 7 см, 12 см, 13 см і 14 см, 24 см, 26 см відповідно. Бічна грань, що містить середні за величиною сторони основ, перпендикулярна до площин основи, а бічне ребро, яке не лежить у цій грані, утворює з площиною більшої основи кут 30° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
342. Сторони основ правильної зрізаної-трикутної піраміди дорівнюють 6 см і 12 см, а гострий кут бічної грані дорівнює 45° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

Об'єми подібних тіл

343. Ребро куба зменшили у 4 рази. У скільки разів зменшився об'єм куба?
344. Із скількох кубів з ребром 2 см можна скласти куб з ребром 8 см?
345. Ребро одного куба дорівнює діагоналі грані другого куба. Знайдіть відношення об'ємів цих кубів.
346. Об'єм піраміди дорівнює V . Її висоту поділено у відношенні 2 : 3, рахуючи від вершини піраміди, і через точку поділу проведено площину, паралельну площині основи. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, що утворилась.

347. Висоту піраміди поділено на 3 рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні площині основи піраміди. Знайдіть відношення об'ємів частин, на які розбивають піраміду ці площини.

Об'єм циліндра

348. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а висота — 6 см. Знайдіть об'єм циліндра.
349. Висота циліндра дорівнює 4 см, а діагональ осевого перерізу утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм циліндра.
350. Осьовий переріз циліндра — квадрат з діагоналлю a . Знайдіть об'єм циліндра.
351. Висота циліндра дорівнює H , а площа його осевого перерізу дорівнює Q . Знайдіть об'єм циліндра.
352. Радіус основи першого циліндра у 4 рази більший за радіус основи другого, а висота першого циліндра у 4 рази менша від висоти другого. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів.
353. Об'єм циліндра дорівнює V , а площа його осевого перерізу — S . Знайдіть радіус основи циліндра та його висоту.
354. Розгортка бічної поверхні циліндра — квадрат зі стороною m . Знайдіть об'єм циліндра.
355. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює 120° , і віддалений від осі циліндра на 3 см. Знайдіть об'єм циліндра, якщо діагональ отриманого перерізу дорівнює 12 см.
356. Через одну твірну циліндра проведено два перерізи, кут між площинами яких дорівнює 120° , а площі отриманих перерізів дорівнюють по 48 см^2 . Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 8 см.
357. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом β . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з серединою цієї хорди, дорівнює a і утворює з площиною нижньої основи кут α . Знайдіть об'єм циліндра.
358. У циліндрі паралельно його осі проведено переріз, який перетинає нижню основу циліндра по хорді, яка стягує дугу α . Діагональ перерізу дорівнює d і утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм циліндра.

359. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює P , а кут між діагоналями перерізу, який лежить проти твірної, дорівнює α . Знайдіть об'єм циліндра.
360. Об'єм циліндра дорівнює V . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут φ . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Об'єм конуса

361. Радіус основи конуса дорівнює 4 см, а його висота — 6 см. Знайдіть об'єм конуса.
362. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник, площа якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см². Знайдіть об'єм конуса.
363. Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник, висота якого дорівнює H , а кут при вершині — α . Знайдіть об'єм конуса.
364. В основі конуса проведено хорду, яка дорівнює радіусу основи і віддалена від центра основи конуса на 12 см. Через вершину конуса і цю хорду проведено площину, яка утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм конуса.
365. Твірна конуса дорівнює l . З центра основи конуса до твірної проведено перпендикуляр, який утворює з висотою конуса кут α . Знайдіть об'єм конуса.
366. В основі конуса проведено хорду, довжина якої дорівнює a і яку видно з центра основи під кутом α . Відрізок, що сполучає вершину конуса з серединою цієї хорди, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм конуса.
367. Прямокутний трикутник, гострий кут якого дорівнює 30° , обертається спочатку навколо одного катета, а потім навколо другого. Знайдіть відношення об'ємів конусів, що утворились.
368. Твірна конуса дорівнює 4 см і дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу конуса. Знайдіть об'єм конуса.
369. Паралельно основі конуса проведено площину, яка ділить висоту конуса у відношенні 3 : 2, рахуючи від вершини. Знайдіть відношення об'ємів тіл, на які ця площина розбиває конус.
370. Відрізки SA , SB і SC — твірні конуса. Відомо, що $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = \alpha$, $AB = a$. Знайдіть об'єм конуса.

371. Переріз, який проведено через дві твірні конуса, має площу S . Цей переріз перетинає основу конуса по хорді, яку видно з вершини конуса під кутом α . Площина перерізу утворює з площиною основи конуса кут β . Знайдіть об'єм конуса.

Об'єм зрізаного конуса

372. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 8 см і 6 см, а його висота — 3 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

373. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 12 см і 2 см, а його твірна — 13 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

374. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r ($R > r$), а твірна утворює з площиною більшої основи кут α . Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

375. У зрізаному конусі відношення радіусів основ дорівнює 2, а твірна завдовжки 8 см утворює з площиною більшої основи кут 60° . Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

376. Через середину висоти конуса проведено площину, паралельну площині основи. Знайдіть об'єм утвореного зрізаного конуса, якщо об'єм повного конуса дорівнює V .

377. Діагоналі осового перерізу зрізаного конуса діляться точкою перетину на відрізки завдовжки 5,1 см і 11,9 см, а його твірна дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

Об'єм кулі. Об'єм кульового сегмента і кульового сектора

378. Радіус кулі дорівнює 6 см. Знайдіть її об'єм.

379. Радіуси двох куль відносяться як 3 : 4. Знайдіть відношення їх об'ємів.

380. У скільки разів треба зменшити радіус кулі, щоб її об'єм зменшився у 5 разів?

381. Дві кулі, радіуси яких 5 см і 7 см, мають спільний центр. Знайдіть об'єм тіла, яке міститься між поверхнями цих куль.

382. Радіус основи циліндра дорівнює 6 см, а його висота — 4 см. Знайдіть радіус кулі, яка рівновелика цьому циліндру.

383. На відстані 3 см від центра кулі проведено переріз. Знайдіть довжину лінії перетину площини перерізу і поверхні кулі, якщо об'єм кулі дорівнює $\frac{500}{3}\pi$ см³.

384. Через кінець радіуса кулі проведено переріз, площа якого утворює з цим радіусом кут α . Знайдіть об'єм кулі, якщо площа перерізу дорівнює S .

385. Діагоналі ромба дорівнюють a і b . Куля дотикається до всіх сторін ромба. Знайдіть об'єм кулі, якщо відстань від її центра до площини ромба дорівнює m .
386. Знайдіть об'єм кульового сегмента, якщо радіус кулі дорівнює 4 см, а висота кульового сегмента — 3 см.
387. Площина розбиває кулю на два сегменти, радіус кола основи яких дорівнює 8 см. Знайдіть об'єм меншого кульового сегмента, якщо радіус кулі дорівнює 10 см.
388. Знайдіть об'єм кульового сектора, якщо радіус кулі дорівнює 4 см, а висота відповідного кульового сегмента — 6 см.
389. Радіус кулі дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм кульового сектора цієї кулі, якщо дуга в його осьовому перерізі містить 90° .

Площа бічної поверхні циліндра

390. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а його висота — 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
391. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
392. У циліндрі паралельно його осі проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу у 30° . У якому відношенні ця площа ділить бічну поверхню циліндра?
393. Осьовий переріз циліндра має площу S . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
394. Висота одного циліндра у 3 рази більша за висоту другого, а площі бічних поверхонь циліндрів рівні. Знайдіть відношення радіусів основ цих циліндрів.
395. Радіус основи циліндра у 4 рази менший від його висоти, а площа бічної поверхні циліндра дорівнює 288π см². Знайдіть висоту циліндра і радіус його основи.
396. У циліндрі паралельно його осі проведено переріз, який є квадратом зі стороною $4\sqrt{2}$ см і відтинає від кола основи дугу у 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
397. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 12π см², а його об'єм — 18π см³. Знайдіть висоту циліндра.
398. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 15 см, а площа повної поверхні циліндра у 2 рази більша за площу його бічної поверхні. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

399. Прямокутник $ABCD$ є розгорткою бічної поверхні циліндра, $AC = 8$ см, $\angle ACD = 30^\circ$. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо менша сторона прямокутника $ABCD$ є висотою циліндра.
400. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює 120° . Площа перерізу дорівнює $16\sqrt{3}$ см², а діагональ перерізу утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
401. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом β . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з серединою цієї хорди, дорівнює m і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
402. Відрізок, кінці якого лежать на колах різних основ циліндра, утворює з площиною основи кут 60° і віддалений від осі циліндра на 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює $16\sqrt{3}$ см.
403. Об'єм циліндра дорівнює V , а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
404. Через одну твірну циліндра проведено два перерізи, кут між площинами яких дорівнює 30° , а площі перерізів дорівнюють 3 см² і $2\sqrt{3}$ см². Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Площа бічної поверхні конуса

405. Радіус основи конуса дорівнює 4 см, а його твірна — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
406. Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а його висота — 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
407. Осьовий переріз конуса — рівнобедрений прямокутний трикутник, висота якого, проведена до основи, дорівнює 10 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.
408. Висота конуса дорівнює H , а кут при вершині осьового перерізу — 2α . Знайдіть площу повної поверхні конуса.
409. Площа основи конуса дорівнює 36π см², а площа його повної поверхні — 96π см². Знайдіть об'єм конуса.
410. Площа повної поверхні конуса дорівнює 200π см², а його твірна — 17 см. Знайдіть об'єм конуса.

411. Площа бічної поверхні конуса дорівнює $32\pi \text{ см}^2$, а його висота — $4\sqrt{3} \text{ см}$. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини його основи.
412. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник, площа якого дорівнює S . Знайдіть площу повної поверхні конуса.
413. Точка M ділить висоту конуса у відношенні $3 : 2$, рахуючи від вершини конуса. Через цю точку проведено площину, паралельну площині основи конуса. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь тіл, на які ця площина розбиває конус.
414. Паралельно площині основи конуса проведено площину, яка ділить його на два тіла, причому площа бічної поверхні конуса, який відтинає площина, утричі менша від площі бічної поверхні усього конуса. У якому відношенні, рахуючи від вершини, ця площина ділить висоту конуса?
415. Твірна конуса утворює з площиною основи кут α , а площа осьового перерізу конуса дорівнює S . Знайдіть площу повної поверхні конуса.
416. Розгортка бічної поверхні конуса — сектор, кут якого дорівнює 120° . Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо периметр його осьового перерізу дорівнює 24 см .
417. Твірна конуса у 2 рази більша за радіус його основи. Доведіть, що розгортка бічної поверхні конуса є півкругом.
418. В основі конуса проведено хорду завдовжки a , яку видно з центра основи під кутом α , а з вершини конуса — під кутом φ . Знайдіть площу повної поверхні конуса.
419. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз, який утворює з площиною основи конуса кут β . Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює H .
420. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз, площа якого дорівнює Q і який утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Площа бічної поверхні зрізаного конуса

421. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 8 см і 9 см , а його твірна — 5 см . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
422. Твірна зрізаного конуса дорівнює 6 см і утворює з площиною більшої основи кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, якщо його твірна дорівнює діаметру меншої основи.

423. Висота зрізаного конуса дорівнює 6 см і утворює з твірною кут 30° . Діагональ осевого перерізу зрізаного конуса перпендикулярна до твірної, яка лежить у площині цього осевого перерізу. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
424. Діагоналі осевого перерізу зрізаного конуса перпендикулярні, а його твірна дорівнює m і утворює з площиною більшої основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

Площа сфери

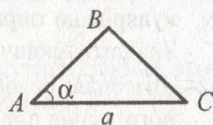
425. Радіус кулі дорівнює 4 см. Знайдіть площу її поверхні.
426. Площа великого круга кулі дорівнює S . Знайдіть площу поверхні цієї кулі.
427. Радіус кулі збільшили у 3 рази. Як при цьому змінилася площа її поверхні?
428. Об'єм кулі зменшили у 64 рази. У скільки разів зменшилась площа її поверхні?
429. Гіпотенуза і катети прямокутного трикутника є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших дорівнюють S_1 і S_2 .
430. На відстані 5 см від центра кулі проведено переріз, площа якого дорівнює 144π см². Знайдіть площу поверхні кулі.

Тіла обертання

431. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 12 см. Він обертається навколо прямої, що містить менший з катетів. Знайдіть об'єм і площу поверхні тіла обертання.
432. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 20 см і 21 см. Він обертається навколо прямої, що містить найбільшу з його сторін. Знайдіть об'єм і площу поверхні тіла обертання.
433. Прямокутний трикутник з катетом b і прилеглим до нього гострим кутом α обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
434. У рівнобічній трапеції $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, $AD = a$, $BC = b$ ($a > b$), $\angle A = \alpha$. Знайдіть об'єм тіла обертання, яке утворене обертанням трапеції навколо сторони AD .
435. У прямокутному трикутнику катет дорівнює b , а протилежний до нього гострий кут — β . Трикутник обертається навколо прямої, яка лежить у площині трикутника і проходить через вершину кута β перпендикулярно до гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

436. Площа паралелограма дорівнює Q . Він обертається навколо сторони, довжина якої дорівнює a . Знайдіть об'єм тіла обертання.

437. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а кут при вершині — 120° . Трикутник обертається навколо бічної сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.



438. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a , а кут при основі — α . Цей трикутник обертається навколо прямої m , яка лежить у площині трикутника, паралельна його основі і знаходиться на відстані b від неї (рис. 14). Знайдіть об'єм тіла обертання.

Рис. 14

Комбінації тіл

439. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a , а висота — H . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо цієї призми.

440. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ бічної грані призми, що містить бічну сторону основи, дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо призми.

441. Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює 8 см, а бічне ребро — 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в цю призму.

442. У правильній трикутній призмі бічне ребро дорівнює a , а діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут α . Знайдіть бічну поверхню циліндра, вписаного в цю призму.

443. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро — 4 см. Знайдіть об'єм і площу повної поверхні конуса, описаного навколо цієї піраміди.

444. Бічні ребра піраміди дорівнюють b , а її основою є прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього кутом β . Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо цієї піраміди.

445. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою m і кутом при основі α . Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють φ . Знайдіть площу повної поверхні конуса, вписаного в цю піраміду.

446. Основою піраміди є ромб зі стороною 16 см і гострим кутом 60° . Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 30° . Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду.

447. Навколо прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 1 см, 2 см і 5 см, описано кулю. Знайдіть об'єм кулі.
448. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а радіус описаної кулі — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
449. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α , а діагональ основи утворює з однією із сторін основи кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо радіус кулі, описаної навколо нього, дорівнює R .
450. У куб, ребро якого дорівнює 6 см, вписано кулю. Знайдіть об'єм кулі і площу її поверхні.
451. У правильну трикутну призму вписано кулю. Знайдіть відношення сторони основи призми до її висоти.
452. Знайдіть радіус кулі, вписаної у правильну шестикутну призму, сторона основи якої дорівнює 14 см.
453. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і гострим кутом 30° . У призму вписано кулю. Знайдіть радіус цієї кулі.
454. У пряму призму вписано кулю, радіус якої дорівнює 4 см. Знайдіть площу основи призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 48 см^2 .
455. У правильну трикутну призму вписано кулю радіуса r . Знайдіть об'єм призми.
456. У правильну шестикутну призму, об'єм якої дорівнює V , вписано кулю. Знайдіть об'єм цієї кулі.
457. У правильну трикутну призму вписано кулю та навколо неї описано кулю. Знайдіть відношення радіусів цих куль.
458. У кулю вписано правильну трикутну піраміду. Бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут 45° . Доведіть, що центр кулі збігається з основою висоти піраміди.
459. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, а її діагональний переріз — прямокутний трикутник. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.
460. На сфері вибрано точку M і з неї проведено три промені, які перетинають сферу в точках A , B і C . Знайдіть радіус сфери, якщо $MA = MB = MC$, $\angle AMB = \angle AMC = \angle BMC = 60^\circ$, а відстань від точки M до площини ABC дорівнює 18 см.

461. Радіуси кіл, описаних навколо основи та бічної грані правильної чотирикутної піраміди, дорівнюють відповідно 8 см і $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.
462. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює b , а висота — h . Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо піраміди.
463. Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a , а двогранний кут при основі — α .
464. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α , а радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
465. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 9 см, а протилежні бічні грані утворюють кут 60° . Знайдіть радіус кулі, вписаної в цю піраміду.
466. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною 8 см і кутом при вершині 120° . Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° . Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.
467. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю. Знайдіть об'єм цієї кулі, якщо бічна грань піраміди утворює з площиною основи кут α , а відстань від центра кулі до вершини піраміди дорівнює m .
468. Висота циліндра дорівнює діаметру основи. Доведіть, що в цей циліндр можна вписати кулю. Де знаходиться центр цієї кулі?
469. Знайдіть відношення об'ємів циліндра і кулі, вписаної в цей циліндр.
470. Висота циліндра дорівнює H і утворює з діагоналлю осьового перерізу циліндра кут α . Знайдіть радіус кулі, описаної навколо циліндра.
471. У сферу радіуса R вписано циліндр, осьовий переріз якого — квадрат. Знайдіть об'єм циліндра.
472. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а кут при вершині осьового перерізу конуса — 30° . Знайдіть радіус кулі, описаної навколо конуса.
473. Радіус основи конуса дорівнює 15 см, а висота — 36 см. Знайдіть радіуси куль, вписаної в конус та описаної навколо нього.

474. Твірна конуса дорівнює a і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть радіуси куль, вписаної в конус та описаної навколо нього.
475. Об'єм конуса дорівнює V , а кут при вершині осьового перерізу дорівнює α . Знайдіть об'єм кулі, вписаної в конус.
476. У зрізаний конус вписано кулю. Під яким кутом з центра кулі видно твірну зрізаного конуса?
477. Твірна зрізаного конуса дорівнює 12 см і утворює з площиною більшої основи кут 60° . У конус вписано кулю. Знайдіть радіус кулі та радіуси основ зрізаного конуса.
478. Твірна зрізаного конуса утворює з площиною більшої основи кут α , а радіуси основ конуса дорівнюють R і r . Знайдіть радіус кулі, описаного навколо конуса.
479. У зрізаний конус вписано кулю радіуса R . Знайдіть об'єм зрізаного конуса, якщо діаметр його більшої основи видно з центра кулі під кутом α .
480. У конус вписано циліндр, висота якого у два рази менша від висоти конуса. Знайдіть об'єм циліндра, якщо об'єм конуса дорівнює V .
481. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . У піраміду вписано куб так, що одна грань куба лежить у площині основи піраміди, а вершини паралельної їй грані лежать на бічних ребрах піраміди. Знайдіть об'єм куба.

Варіант 2

Прямокутна система координат у просторі

1. Установіть, чи лежить дана точка на координатній осі:
- | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| 1) $M(-7; 0; 9)$; | 3) $K(-23; 0; 0)$; | 5) $Q(0; 14,7; 0)$; |
| 2) $N(0; 8; -12)$; | 4) $P(0; 0; 101)$; | 6) $S(19; -36; 0)$. |

У разі позитивної відповіді вкажіть цю вісь.

2. Установіть, чи належить дана точка координатній площині:

- | | | |
|---------------------|----------------------|--------------------|
| 1) $A(6; -9; 11)$; | 3) $C(5; 0; -12)$; | 5) $E(1; -1; 2)$; |
| 2) $B(-5; 7; 0)$; | 4) $D(0; 17; -20)$; | 6) $F(0; -9; 0)$. |

У разі позитивної відповіді вкажіть цю площину.

3. Які з наведених точок лежать на одній прямій, паралельній осі ординат: $T(-2; 3; 1)$, $R(2; 3; 1)$, $S(-2; -8; 1)$, $F(-2; 0; -1)$?
4. Які з наведених точок лежать в одній площині, паралельній площині yz : $A(6; -4; 10)$, $B(6; 7; -12)$, $C(4; 7; -12)$, $D(-6; 13; 10)$?
5. На яких відстанях від координатних площин знаходиться точка $M(-9; 7; -3)$?
6. Сторона правильного трикутника AOB (рис. 15), який лежить у площині yz , дорівнює $2\sqrt{3}$. Знайдіть координати його вершин.

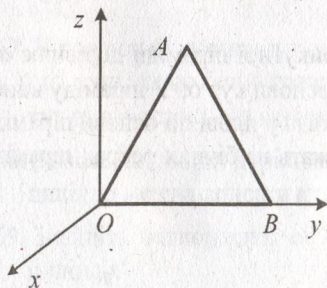


Рис. 15

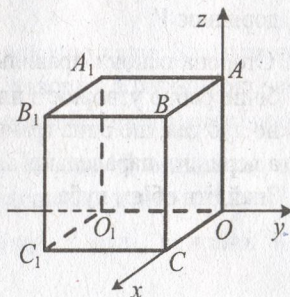


Рис. 16

7. Ребро куба $OABCO_1A_1B_1C_1$ дорівнює 6 (рис. 16). Знайдіть координати вершин куба.
8. Відстані від точки E до осей координат дорівнюють 12 см, 4 см і 1 см. Знайдіть відстань від точки E до початку координат.

Координати середини відрізка. Відстань між точками

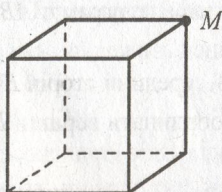
9. Знайдіть координати середини відрізка ST , якщо:
- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $S(-4; 8; -5)$, $T(8; 6; -7)$; | 2) $S(-1; 13; 9)$, $T(10; -15; 2)$. |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
10. Точка C — середина відрізка MK . Знайдіть координати точки M , якщо $C(-6; 2; 3,5)$, $K(0; -8; 3)$.

11. Знайдіть координати точки, яка ділить відрізок AB у відношенні $1 : 3$, рахуючи від точки A , якщо $A(4; -5; 2)$, $B(12; -3; -4)$.
12. Знайдіть координати вершини B паралелограма $ABCD$, якщо $A(-3; 8; -5)$, $C(-7; 6; 7)$, $D(4; -2; -3)$.
13. Точки $A_1(-4; 3; -2)$ і $C_1(3; -1; -2)$ — середини сторін BC і AB трикутника ABC відповідно. Знайдіть координати вершин B і C , якщо вершина A має координати $(5; 3; -6)$.
14. Точки $M(-2; 3; 4)$, $N(3; 5; 2)$ і $K(3; -5; 1)$ — середини сторін трикутника. Знайдіть координати вершин цього трикутника.
15. Знайдіть відстань між точками E і F , якщо:
1) $E(7; -7; 10)$, $F(1; -4; 4)$; 2) $E(5; -2; -1)$, $F(-3; 4; 3)$.
16. У трикутнику ABC відомо, що $A(3; -5; 0)$, $B(7; 1; 4)$, $C(-3; 9; -6)$. Знайдіть довжину середньої лінії MN трикутника ABC , де M і N — середини сторін AB і BC відповідно.
17. Відстань між точками $A(-2; 3; z)$ і $B(1; -5; -2)$ дорівнює $7\sqrt{2}$. Знайдіть z .
18. На осі абсцис знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(4; -5; 6)$ і $B(2; 3; -4)$.
19. Знайдіть координати точок A і B та довжину відрізка AB , якщо точка A належить осі y , точка B лежить у площині xz і точка $C(-2; 1; -3)$ — середина відрізка AB .
20. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1; 5; 3)$, $B(-3; 7; -5)$, $C(3; 1; -5)$ і $D(5; -1; 3)$ є ромбом.
21. Доведіть, що точки $A(-3; -7; 4)$, $B(2; 3; -1)$ і $C(-4; -9; 5)$ лежать на одній прямій. Яка з них лежить між двома іншими?

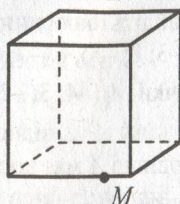
Симетрія у просторі

22. Запишіть координати точок, симетричних точкам $M(-3; 5; -1)$, $N(0; -1; 7)$, $K(8; 12; 6)$, $P(10; -5; 5)$, $E(4; 0; 0)$, $F(-11; -2; -4)$ відносно: 1) початку координат; 2) площини xz ; 3) площини yz ; 4) осі x .
23. Точки $A(3; -8; 6)$ і B симетричні відносно: 1) початку координат; 2) площини xu . Знайдіть довжину відрізка AB .
24. Точки $E(-3; 8; 7)$ і $F(-9; 6; -2)$ симетричні відносно точки M . Знайдіть її координати.
25. Точку $A(m; n; p)$ послідовно симетрично відобразили відносно координатних площин xu , yz та початку координат. Доведіть, що отримана при цьому точка A_1 симетрична точці A відносно площини xz .

26. На рисунку 17 дано зображення куба. Перерисуйте його в зошит і побудуйте фігуру, симетричну кубу відносно точки M .



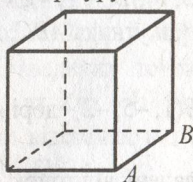
а)



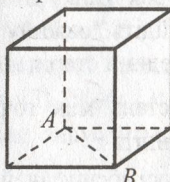
б)

Рис. 17

27. На рисунку 18 дано зображення куба. Перерисуйте його в зошит і побудуйте фігуру, симетричну кубу відносно прямої AB .



а)



б)

Рис. 18

Вектори в просторі. Рівність векторів

28. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{AB} , якщо:
 1) $A(3; -4; -7)$, $B(-1; 5; 3)$; 2) $A(-4; 0; 8)$, $B(0; -6; 2)$.
29. Дано точки $M(-3; 2; z)$, $N(4; -6; 3)$, $K(x; 1; -10)$, $E(2; y; -15)$. Знайдіть x , y і z , якщо $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EK}$.
30. Точка $K(-8; 3; -5)$ — кінець вектора $\overrightarrow{a}(6; -9; 2)$. Знайдіть координати початку вектора.
31. Доведіть, що чотирикутник $MNKP$ з вершинами в точках $M(-3; 2; -4)$, $N(-1; 6; 6)$, $K(6; 7; 8)$, $P(4; 3; -2)$ є паралелограмом.
32. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A(4; -5; -2)$, $B(2; 3; -8)$, $D(-3; -4; 6)$. Знайдіть координати вершини C .
33. Знайдіть серед векторів $\overrightarrow{a}(5; -3; 4)$, $\overrightarrow{b}(-2; 1; -7)$, $\overrightarrow{c}(2; -6; \sqrt{10})$, $\overrightarrow{d}(-3; 6; 3)$, $\overrightarrow{m}(-5; 5; -2)$ такі, що мають рівні модулі.
34. Модуль вектора $\overrightarrow{n}(x; -10; 8)$ дорівнює 13. Знайдіть x .
35. Модуль вектора $\overrightarrow{n}(x; y; z)$ дорівнює $3\sqrt{3}$, його координати x і y рівні, а x і z — протилежні числа. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{n} .

Додавання векторів

36. Дано вектори $\vec{c}(-3; 1; 2)$ і $\vec{d}(5; -6; 7)$. Знайдіть:

1) координати векторів $\vec{c} + \vec{d}$ і $\vec{c} - \vec{d}$;

2) $|\vec{c} + \vec{d}|$ і $|\vec{d} - \vec{c}|$.

37. Знайдіть координати точки K такої, що $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KN} = \vec{0}$, де $M(0; 5; -8)$, $N(-6; 3; 7)$.

38. Знайдіть координати векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо їх сумою є вектор $\vec{m}(-4; 5; 7)$, а різницею — вектор $\vec{n}(-3; 15; -25)$.

39. Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:

1) 5; 2; 3;

2) 4; 6; 3;

3) 8; 9; 18?

40. Дано вектори $\vec{m}(4; -2; 12)$, $\vec{n}(1; 3; 1)$, $\vec{k}(-1; y; -16)$. При якому значенні y модуль вектора $\vec{m} - \vec{n} - \vec{k}$ набуває найменшого значення? Знайдіть це значення модуля.

Множення вектора на число. Колінеарні вектори

41. Дано вектори $\vec{a}(4; -7; -3)$ і $\vec{b}(-3; 6; 22)$. Знайдіть координати вектора:

1) $3\vec{a} + \vec{b}$;

2) $4\vec{a} + 6\vec{b}$;

3) $\vec{b} - 4\vec{a}$;

4) $3\vec{b} - 5\vec{a}$.

42. Знайдіть модуль вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, де $\vec{a}(5; -12; 4)$, $\vec{b}(1; -2; 2)$.

43. Чи колінеарні вектори \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} , якщо $A(2; -5; 4)$, $B(1; 4; 6)$, $C(-4; -6; 8)$, $D(-2; 0; 12)$?

44. Знайдіть серед векторів $\vec{m}(4; -3; 5)$, $\vec{n}(-8; 6; -10)$, $\vec{p}(12; -9; 15)$, $\vec{k}(-0,8; 0,6; -1)$ співнаправлені і протилежно напрямлені вектори.

45. Знайдіть значення x і y , при яких вектори $\vec{a}(x; -8; 12)$ і $\vec{b}(24; y; -36)$ колінеарні.

46. Дано вектор $\vec{n}(-3; 4; -5)$. Знайдіть координати вектора \vec{m} , співнаправленого з вектором \vec{n} , якщо $|\vec{m}| = 10\sqrt{2}$.

47. Для ненульових векторів \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} виконується рівність $4\vec{a} - 9\vec{b} + 5\vec{c} = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 6\vec{c}$, причому вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні.

Доведіть, що вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} колінеарні.

48. Доведіть, що чотирикутник $MPFK$ з вершинами в точках $M(-2; 3; -5)$, $P(2; 5; 2)$, $F(4; 1; 6)$, $K(-4; -3; -8)$ є трапецією.
49. Чи лежать точки $D(4; -2; -3)$, $E(5; 1; 1)$ і $F(7; 7; -7)$ на одній прямій?

Одиничний вектор. Розклад вектора за трьома неколінеарними векторами

50. Серед векторів $\vec{a}\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $\vec{c}\left(\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$, $\vec{d}(0; -1; 0)$, $\vec{e}(1; 0; -1)$ укажіть одиничні вектори.
51. Знайдіть координати одиничного вектора, який протилежно напрямлений з вектором:
1) $\vec{a}(5; 0; -12)$; 2) $\vec{b}(-3; 4; 8)$; 3) $\vec{c}(m; m; t)$.
52. Дано одиничні вектори $\vec{e}_1(1; 0; 0)$, $\vec{e}_2(0; 1; 0)$, $\vec{e}_3(0; 0; 1)$. Знайдіть координати векторів:
1) $6\vec{e}_1 - 14\vec{e}_2 - 19\vec{e}_3$; 2) $-7\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2$; 3) $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$.
53. Розкладіть вектор $\vec{n}(11; -4; 11)$ за векторами $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(2; -1; 1)$ і $\vec{c}(3; -5; 2)$.
54. Точка M знаходиться поза площиною трикутника ABC . Виразіть вектори \vec{AC} , \vec{EF} і \vec{AF} , де точка E — середина відрізка AC , точка F — середина відрізка BC , через вектори \vec{MA} , \vec{MB} і \vec{MC} .
55. Проекцією точки S на площину паралелограма $ABCD$ є точка O перетину його діагоналей. Виразіть вектори \vec{AB} , \vec{CB} , \vec{SB} , \vec{SO} через вектори \vec{SA} , \vec{SC} , \vec{SD} .
56. На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N такі, що $AM:MB = 2:3$, $AN:NC = 3:2$. Поза площиною трикутника ABC взяли довільну точку D . Виразіть вектор \vec{MN} через вектори \vec{DA} , \vec{DB} і \vec{DC} .

Скалярний добуток векторів

57. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:
1) $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$;

2) $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 11$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;

3) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

58. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:

1) $\vec{a}(1; -3; 8)$, $\vec{b}(4; -2; -6)$; 3) $\vec{a}(-10; 5; 6)$, $\vec{b}(4; 2; 5)$.

2) $\vec{a}(-3; -8; 9)$, $\vec{b}(-7; -1; -2)$;

59. Дано вектори $\vec{a}(4; -2; p)$ і $\vec{b}(5; p; -3)$. При якому значенні p виконується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$?

60. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(5; -1; -2)$ і $\vec{b}(2; 6; -3)$.

61. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC і установіть вид цього трикутника, якщо $A(1; -4; -1)$, $B(4; 7; 0)$, $C(-2; 1; 6)$.

62. Дано вектори $\vec{a}(6; -1; -5)$ і $\vec{b}(x; 2; 2)$. При якому значенні x вектори \vec{a} і \vec{b} перпендикулярні?

63. Дано вектори $\vec{a}(4; -7; -2)$ і $\vec{b}(3; y; -1)$. При яких значеннях y кут між векторами \vec{a} і \vec{b} : 1) гострий; 2) прямий; 3) тупий?

64. Знайдіть кути, які утворює вектор \vec{AB} , де $A(5; -4; 2)$, $B(7; -4; -2)$, з додатними напрямками координатних осей.

65. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(6; -4; 2)$, $B(3; 2; 3)$, $C(0; 1; 0)$, $D(3; -5; -1)$ є прямокутником.

66. Знайдіть координати вектора \vec{a} , колінеарного вектору $\vec{b}(2; -5; -1)$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = -90$.

67. Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 135° , $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 7$.

Знайдіть:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$; 3) $(\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot \vec{b}$; 4) $(2\vec{b} + 5\vec{a}) \cdot \vec{a}$.

68. Кут між одиничними векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 120° . Обчисліть скалярний добуток $(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

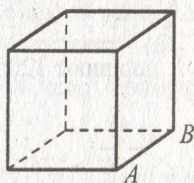
69. Дано вектори \vec{a} і \vec{b} , $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$. Знайдіть:

1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|\vec{b} - 3\vec{a}|$.

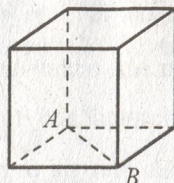
70. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = 3\vec{k} + \vec{p}$ і $\vec{b} = \vec{k} - 2\vec{p}$, де \vec{k} і \vec{p} — одиничні перпендикулярні вектори.
71. Дано вектори $\vec{c} (1; -2; 8)$ і $\vec{d} (3; 1; -4)$. Знайдіть значення n , при якому вектори $n\vec{c} + \vec{d}$ і \vec{c} перпендикулярні.
72. Дано точки $A(2; 2; 1)$, $B(3; 5; 4)$, $C(-1; -10; -14)$ і $D(-4; 6; -1)$. Доведіть, що пряма AD перпендикулярна до площини ABC .
73. Знайдіть множину точок $S(x; y; z)$ таку, що містить точку $M(-5; 2; -9)$, і пряма, яка проходить через точки $A(7; -8; 20)$ і $C(5; -2; 16)$, перпендикулярна до кожної прямої, яка проходить через точку M .

Паралельне перенесення в просторі

74. Знайдіть точки, які є образами точок $M(4; -2; 7)$, $N(-2; 0; -1)$, $K(0; 0; -8)$, $O(0; 0; 0)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-4; 2; -6)$.
75. При паралельному перенесенні образом точки $M(-8; 6; -3)$ є точка $M_1(3; -7; 2)$. Знайдіть образ точки $K(-1; -9; 6)$ при цьому паралельному перенесенні.
76. Дано точки $M(2; -3; 7)$ і $K(-3; -5; 0)$. Знайдіть вектор, який задає паралельне перенесення, при якому:
- 1) образом точки M є точка K ;
 - 2) образом точки K є точка M .
77. Чи існує паралельне перенесення, при якому образом точки $A(-3; 1; -6)$ є точка $A_1(2; 3; -9)$, а образом точки $B(4; -6; 3)$ — точка $B_1(9; -4; 6)$?
78. На рисунку 19 дано зображення куба. Перерисуйте його в зошит і побудуйте фігуру, яка є образом даного куба при паралельному перенесенні, при якому образом точки A є точка B .



а)



б)

Двогранні та тригранні кути

79. Величина двогранного кута дорівнює 30° . У гранях двогранного кута проведено прямі a і b , паралельні ребру двогранного кута, на відстані 8 см і $2\sqrt{3}$ см від нього відповідно. Знайдіть відстань між прямими a і b .
80. Площина γ перетинає грані двогранного кута по паралельним прямим a і b , віддаленим від ребра двогранного кута на 4 см і 6 см відповідно. Знайдіть відстань від ребра двогранного кута до площини γ , якщо відстань між прямими a і b дорівнює $2\sqrt{7}$ см.
81. Сторона AB рівностороннього трикутника ABC , площа якого дорівнює $36\sqrt{3}$ см², лежить на ребрі двогранного кута, величина якого менша від 90° , а точка C належить одній з його граней. З точки C до другої грані проведено перпендикуляр CD . Відстань від точки D до прямої AB дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть величину цього двогранного кута.
82. Величина двогранного кута дорівнює 120° . На його ребрі вибрано відрізок BC завдовжки 4 см. У різних гранях двогранного кута вибрано точки A і D такі, що $AB = AC = DB = DC$. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо $AD = 6$ см.
83. Квадрати $ABCD$ і $ABEF$ лежать у гранях двогранного кута. Знайдіть величину цього двогранного кута, якщо $AB = 8$ см, $CF = 8\sqrt{2}$ см.
84. Рівносторонній трикутник ABC лежить в одній з граней двогранного кута з ребром AB , величина якого дорівнює 60° . Знайдіть кути, які утворюють сторони BC і AC з другою гранню.
85. З точок C і D , які лежать у різних гранях двогранного кута, величина якого 45° , проведено до його ребра перпендикуляри DA і CB . Знайдіть довжину відрізка DC , якщо $AB = 3$ см, $AD = 6\sqrt{2}$ см, $BC = 8$ см.
86. Точки P і K лежать у різних гранях двогранного кута, величина якого 30° . З цих точок до ребра кута проведено перпендикуляри PP_1 і KK_1 . Знайдіть довжину відрізка PP_1 , якщо $KK_1 = 6\sqrt{3}$ см, $P_1K_1 = \sqrt{38}$ см, $PK = 9$ см.
87. У площині однієї з граней двогранного кута, величина якого дорівнює 30° , проведено пряму, яка утворює з ребром дво-

гранного кута кут 45° . Знайдіть кут, який утворює ця пряма з площиною другої грані.

88. Точка D знаходиться всередині двогранного кута і віддалена від однієї з його граней на $2\sqrt{3}$ см, а від ребра двогранного кута — на $4\sqrt{21}$ см. Знайдіть відстань від точки D до другої грані двогранного кута, якщо його величина дорівнює 30° .
89. Точка F лежить усередині двогранного кута. Точки M і K — проєкції точки F на площини граней цього кута. Доведіть, що коли $FM = FK$, то пряма MK перпендикулярна до ребра двогранного кута.
90. Знайдіть геометричне місце точок, які знаходяться на даній відстані від граней даного двогранного кута.
91. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Точка P знаходиться на відстані $3\sqrt{5}$ см від його вершини і на відстані 5 см і 7 см від двох його ребер. Знайдіть відстань від точки P до третього ребра.
92. У тригранному куті плоскі кути дорівнюють 45° , 45° і 60° . Знайдіть величини двогранних кутів, які лежать проти рівних плоских кутів.
93. Усі плоскі кути тригранного кута дорівнюють α ($\alpha < 90^\circ$). Знайдіть його двогранні кути.

Многогранники. Призма

94. Нарисуйте многогранник, у якого 8 вершин і 6 граней.
95. Нарисуйте многогранник, у якого 4 вершини і 4 грані.
96. Чи існує призма, у якої тільки одна грань перпендикулярна до площини основи?
97. Який многокутник лежить в основі призми, яка має: 1) 9 ребер; 2) 36 ребер; 3) k ребер?
98. Чи існує призма, яка має 22 ребра?

Пряма і правильна призми

99. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник ABC , $AB = BC = 5$ см. Висота BD трикутника ABC дорівнює 4 см. Знайдіть діагональ бічної грані призми, яка містить основу трикутника, якщо висота призми дорівнює 8 см.
100. Основою прямої призми є прямокутник, менша сторона якого дорівнює 6 см, а кут між діагоналями — 60° . Знайдіть діагональ призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.
101. Основою прямої призми є ромб. Знайдіть сторону основи призми, якщо діагоналі призми дорівнюють 8 см і 12 см, а висота — 4 см.

102. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 15 см, а бічна сторона — 6 см. Знайдіть величини двограних кутів при бічних ребрах призми.
103. Діагональ куба дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу його діагонального перерізу.
104. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює 18 см, а діагональ призми утворює з площиною її основи кут 60° . Знайдіть сторону основи призми та кут, який утворює діагональ призми з її бічною гранню.
105. Знайдіть діагоналі правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює 4 см.
106. Основою прямої призми є правильний трикутник, висота якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Через сторону основи проведено переріз, який перетинає бічне ребро. Площа цього перерізу дорівнює 32 см^2 . Знайдіть кут між площиною перерізу і площиною основи.
107. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $2\sqrt{2}$ см, а діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу перерізу призми, який проходить через сторону нижньої основи і протилежну їй сторону верхньої основи.
108. Основою призми є квадрат зі стороною 6 см, а бічними гранями — прямокутники. Знайдіть площу бічної поверхні та площу повної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 9 см.
109. Основою прямої призми є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, а один з катетів — 6 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 8 см.
110. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см, а діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
111. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, якщо діагональ її бічної грані дорівнює d і утворює з площиною основи призми кут β .
112. Радіус кола, описаного навколо основи правильної чотирикутної призми, дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо сторона її основи у два рази менша від бічного ребра.
113. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює $8\sqrt{2} \text{ см}^2$, а її висота — 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

114. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Бічна грань призми, що містить середню за довжиною сторону основи, рівновелика основі призми. Знайдіть площу повної поверхні призми.
115. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює $12\sqrt{3}$ см², а площа повної поверхні — $20\sqrt{3}$ см². Знайдіть висоту призми.
116. У правильній шестикутній призмі $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ площа чотирикутника $AA_1 D_1 D$ дорівнює 4 см². Знайдіть площу бічної поверхні призми.
117. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основа якої дорівнюють 4 см і 12 см, а діагоналі є бісектрисами її тупих кутів. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її діагональ утворює з бічним ребром кут 30° .
118. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює Q , а діагональ призми утворює з бічною гранню кут β . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
119. Через діагональ основи правильної чотирикутної призми зі стороною основи b проведено переріз, який утворює з площиною основи кут β і перетинає бічне ребро призми у його середині. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
120. Основою прямої призми є ромб, менша діагональ якого дорівнює d . Через цю діагональ і вершину верхньої основи проведено площину, яка перетинає площини двох сусідніх бічних граней по прямим, кут між якими дорівнює α , і утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
121. У правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основи дорівнює $8\sqrt{2}$ см, а бічне ребро — 3 см. Через діагональ BD нижньої основи і середину сторони $B_1 C_1$ верхньої основи проведено площину. Знайдіть площу утвореного перерізу призми.

Похила призма

122. Бічне ребро похилої призми утворює з площиною основи кут 60° , а висота призми дорівнює 6 см. Знайдіть бічне ребро призми.
123. Основою похилої призми $ABCA_1 B_1 C_1$ є трикутник ABC , $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. Бічне ребро призми BB_1 утворює з площиною основи кут 45° , а проекцією точки B_1 на площину ABC

є точка перетину медіан трикутника ABC . Знайдіть площу грані AA_1C_1C .

124. Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнюють 5 см, 5 см і 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 13 см.
125. У похилій трикутній призмі дві бічні грані перпендикулярні. Їх спільне бічне ребро віддалене від двох інших бічних ребер на 5 см і 12 см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 240 см^2 .
126. Основою призми є квадрат зі стороною 5 см. Дві бічні грані призми — квадрати, а дві інші — ромби з гострим кутом 60° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
127. Основою похилої трикутної призми є рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 6 см. Бічне ребро, що містить вершину прямого кута основи, дорівнює 4 см і утворює з катетами основи кути по 60° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
128. Основою призми є квадрат зі стороною 6 см. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 8 см.

Паралелепіпед

129. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 15 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.
130. Діагональ прямокутного паралелепіпеда більша за сторони основи на 3 см і 2 см. Знайдіть площу його повної поверхні, якщо висота паралелепіпеда дорівнює $2\sqrt{2}$ см.
131. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як 1 : 2. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо площа його повної поверхні дорівнює 76 см^2 , а площа бічної поверхні — 60 см^2 .
132. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 9 см, 11 см і 12 см. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.
133. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут α . Діагональ основи утворює з однією із сторін кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
134. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 16 см і 10 см, а гострий кут — 60° . Знайдіть більшу діагональ паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює $4\sqrt{10}$ см.

135. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом 60° і більшою діагоналлю $8\sqrt{3}$ см. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
136. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює 120 см^2 . Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо площі його діагональних перерізів дорівнюють 40 см^2 і 96 см^2 .
137. Основою паралелепіпеда є квадрат, а бічне ребро утворює зі сторонами основи кути по 60° . Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 12 см.
138. Основою паралелепіпеда є ромб з діагоналями 10 см і 32 см. Одна з вершин його верхньої основи рівновіддалена від сторін нижньої основи. Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 12 см. Скільки розв'язків має задача?

Піраміда

139. Знайдіть суму плоских кутів чотирикутної піраміди.

140. Чи існує піраміда, яка має 17 ребер?

141. На рисунку 20 зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$. Перерисуйте рисунок у зошит і зобразіть: 1) висоту піраміди; 2) кут нахилу ребра SC до площини основи; 3) лінійний кут двогранного кута при ребрі AD .

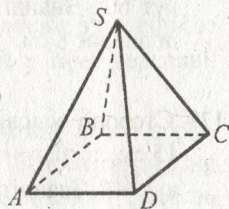


Рис. 20

142. Чи існує правильна п'ятикутна піраміда, усі ребра якої рівні?

143. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а бічне ребро — 6 см. Знайдіть сторону основи піраміди.

144. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює 48 см^2 , а сторона основи — $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

145. Знайдіть апофему правильної трикутної піраміди, якщо висота піраміди дорівнює 10 см, а висота основи — 6 см.

146. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а бічна грань утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть сторону основи піраміди.

147. Сторона основи правильної восьмикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

148. Плоский кут при вершині правильної шестикутної піраміди дорівнює 45° , а бічне ребро — 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
149. Як зміниться площа бічної поверхні правильної піраміди, якщо сторону основи збільшити в 4 рази, а апофему зменшити в 2 рази?
150. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а висота — 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
151. Площа бічної поверхні правильної піраміди в 2 рази більша за площу основи. Знайдіть величину двогранного кута при основі піраміди.
152. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
153. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 9 см, а висота — 6 см.
154. Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $6\sqrt{2}$ см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
155. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює половині сторони основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює $2\sqrt{2}$ см.
156. Кожне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
157. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см, а радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
158. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 8 см, а апофема — 5 см. Знайдіть: 1) висоту піраміди; 2) кут нахилу бічного ребра до площини основи; 3) кут нахилу бічної грані до площини основи; 4) площу повної поверхні піраміди.
159. Радіус кола, вписаного в основу правильної шестикутної піраміди, дорівнює $2\sqrt{3}$ см, бічне ребро утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
160. Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює d , а бічна грань утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

161. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут α , а радіус кола, вписаного у бічну грань, дорівнює r . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
162. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює H , а двогранний кут при основі — α . Знайдіть ребра піраміди.
163. У правильній трикутній піраміді бічна грань утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть: 1) кут нахилу бічного ребра до площини основи; 2) плоский кут при вершині піраміди; 3) двогранний кут при бічному ребрі піраміди.
164. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть: 1) кут нахилу бічної грані до площини основи; 2) плоский кут при вершині піраміди; 3) двогранний кут при бічному ребрі піраміди.
165. Сторона основи правильної піраміди $MABC$ дорівнює b . Двогранний кут при основі піраміди дорівнює β . Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через середини сторін AB і BC основи паралельно грані AMC .
166. У правильній шестикутній піраміді радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює 6 см, а бічне ребро — 8 см. Знайдіть площу перерізу, який проходить через середини двох сусідніх бічних ребер піраміди паралельно її висоті.
167. Усі бічні ребра трикутної піраміди $SABC$ рівні, відрізок SO — її висота (рис. 21). Що можна сказати про вид трикутника ABC ?
168. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$, O — точка перетину його діагоналей, $SA = SC$, $SB = SD$. Доведіть, що відрізок SO — висота піраміди.
169. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 12 см і 30 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 8 см, а бічні ребра утворюють з площиною основи рівні кути.
170. Основою піраміди $SABC$ є трикутник ABC , у якому $\angle B = 150^\circ$. Знайдіть сторону AC , якщо висота піраміди дорівнює 12 см, а бічні ребра утворюють з площиною основи рівні кути в 60° .
171. Основою піраміди є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює 6 см, а тупий кут — 120° . Менша основа трапеції дорівнює її бічній стороні. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною

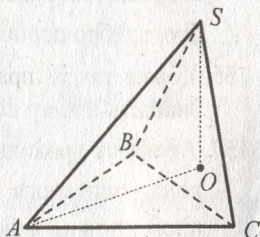


Рис. 21

основи рівні кути. Знайдіть ці кути, якщо висота піраміди дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

172. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 30° .

173. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і бічною стороною b . Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β .

174. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і радіусом описаного кола R . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β .

175. Основою піраміди є прямокутна трапеція, менша бічна сторона якої дорівнює 10 см. Гострий кут трапеції дорівнює 30° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при її основі дорівнюють 45° .

176. Основою піраміди $SABC$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), ребро SA перпендикулярне до площини основи (рис. 22). Укажіть: 1) кут нахилу грані SBC до площини основи; 2) кути нахилу ребер SB і SC до площини основи.

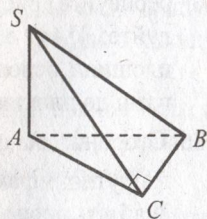


Рис. 22

177. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Бічне ребро, яке

лежить проти середньої за довжиною сторони основи, перпендикулярне до площини основи і дорівнює 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

178. Основою піраміди є прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $AB = 8$ см і кутом 60° . Бічні грані піраміди, які містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя грань утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

179. Основою піраміди є квадрат зі стороною 8 см. Дві сусідні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

180. Основою піраміди є квадрат зі стороною a . Одне з бічних ребер дорівнює b і перпендикулярне до площини основи піраміди. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
181. Основою піраміди є прямокутник. Одне з бічних ребер піраміди перпендикулярне до площини основи, а найбільше бічне ребро дорівнює a і утворює зі сторонами основи, які перетинає, кути α і β . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
182. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 8 см. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють з нею кут 30° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
183. Основою піраміди $MABCD$ є квадрат $ABCD$, $AB=16$ см. Грань MDC перпендикулярна до площини основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо $MD=MC=10$ см.

Зрізана піраміда

184. На рисунку 23 зображено правильну зрізану піраміду $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Перерисуйте рисунок у зошит і побудуйте: 1) кут нахилу бічного ребра до площини основи; 2) кут нахилу бічної грані до площини основи.

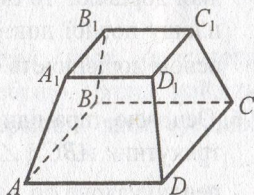


Рис. 23

185. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 6 см і 4 см, а бічне ребро — 8 см. Знайдіть площу повної поверхні зрізаної піраміди.
186. Бічне ребро правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а сторона більшої основи — 6 см. Знайдіть площу діагонального перерізу зрізаної піраміди, якщо її висота дорівнює 2 см.
187. У правильній зрізаній трикутній піраміді сторони основ дорівнюють 6 см і 8 см, а бічна грань утворює з площиною більшої основи кут 45° . Знайдіть висоту зрізаної піраміди.
188. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 10 см і 6 см, а її висота — 2 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
189. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 9 см і 18 см, а її висота — 8 см. Через сторону більшої основи і протилежну їй вершину меншої основи проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу.

Правильні многогранники

190. Скільки тригранних кутів має додекаедр?
191. Знайдіть суму плоских кутів при всіх вершинах ікосаедра.
192. Площа повної поверхні октаедра дорівнює 240 см^2 . Знайдіть площу однієї його грані.
193. Довжина ребра ікосаедра дорівнює 8 см. Знайдіть площу його повної поверхні.
194. Знайдіть площу повної поверхні правильного тетраедра, якщо радіус кола, описаного навколо його грані, дорівнює R .
195. Доведіть, що центри граней октаедра — вершини куба. Знайдіть ребро куба, якщо ребро октаедра дорівнює 6 см.

Циліндр

196. Висота циліндра дорівнює 8 см, а радіус основи — 7 см. Знайдіть площу осевого перерізу циліндра.
197. Висота циліндра дорівнює 6 см, а діагональ осевого перерізу утворює з твірною кут 60° . Знайдіть діагональ осевого перерізу циліндра та площу його основи.
198. Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює 13 см, а радіус основи циліндра більший за висоту на 1 см. Знайдіть площу осевого перерізу циліндра.
199. Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює 8 см, а твірна — 12 см, проведено переріз. Діагональ перерізу дорівнює 20 см. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу.
200. Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом з площею 10 см^2 . Знайдіть площу осевого перерізу циліндра.
201. Площа осевого перерізу циліндра дорівнює S . Через одну з твірних цього перерізу проведено переріз, площина якого утворює з площиною осевого перерізу кут 60° . Знайдіть площу цього перерізу.
202. Прямокутник зі сторонами 5 см і 9 см обертається навколо більшої із сторін. Знайдіть: 1) площу осевого перерізу утвореного циліндра; 2) довжину кола основи утвореного циліндра; 3) площу перерізу, який проходить паралельно осі утвореного циліндра на відстані 2 см від неї.
203. Площа осевого перерізу циліндра дорівнює S . Знайдіть площу перерізу циліндра, який паралельний його осі і знаходиться на відстані від неї, яка дорівнює третині радіуса основи циліндра.

204. Через твірну циліндра проведено два перерізи, площі яких дорівнюють 30 см^2 і $20\sqrt{3} \text{ см}^2$. Кут між площинами перерізів дорівнює 30° . Знайдіть площу перерізу циліндра, який проходить через дві інші сторони даних перерізів.
205. Радіус основи і висота циліндра дорівнюють відповідно 8 см і 16 см. Через дві точки, які лежать на колах різних основ циліндра, проведено пряму, яка знаходиться на відстані 6 см від осі циліндра. Знайдіть кут, який утворює ця пряма з віссю циліндра.
206. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник, одна із сторін якого вдвічі менша від другої. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать діагоналі осьового перерізу циліндра, якщо його висота менше від радіуса основи циліндра.
207. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює d . Переріз перетинає основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α . Знайдіть відстань від площини перерізу до осі циліндра, якщо діагональ перерізу утворює з площиною основи кут β .
208. Паралельно осі циліндра проведено переріз, площа якого дорівнює Q , а діагональ перерізу утворює з площиною основи кут φ . Відрізок, що сполучає центр кола верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з віссю циліндра кут α . Знайдіть висоту і радіус основи циліндра.
209. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який знаходиться на відстані d від осі циліндра і відтинає від нижньої основи циліндра хорду, яку видно з центра верхньої основи під кутом α . Знайдіть площу проведеного перерізу.
210. Прямокутник MM_1N_1N — переріз циліндра, паралельний його осі. На колах основ циліндра по різні сторони від даного перерізу вибрано точки A і B (рис. 24). Перерисуйте рисунок у зошит і побудуйте точку перетину прямої AB з площиною MM_1N_1 .

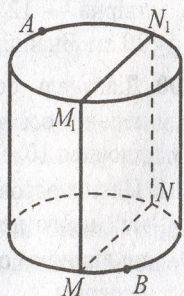


Рис. 24

Вписана і описана призми

211. Чи можна описати циліндр навколо прямої призми, основою якої є ромб?
212. Чи можна вписати циліндр у призму, основою якої є прямокутник, відмінний від квадрата?

213. Визначте вид трикутника, який є основою призми, вписаної в циліндр, якщо вісь циліндра проходить усередині призми.
214. Основою прямої призми є чотирикутник, кути якого в порядку слідування відносяться як $3 : 5 : 8 : 6$. Чи можна описати циліндр навколо цієї призми?
215. Сума бічних сторін трапеції, яка є основою прямої призми, дорівнює 16 см, а середня лінія трапеції — 7 см. Чи можна вписати циліндр у цю призму?
216. У циліндр вписано правильну шестикутну призму, а навколо нього описано правильну чотирикутну призму. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь цих призм.
217. Основою прямої призми є ромб. Площа бічної поверхні призми дорівнює 120 см^2 . Знайдіть радіус основи циліндра, вписаного в цю призму, якщо висота призми дорівнює 6 см, а гострий кут основи — 60° .
218. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a , а висота призми — H . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в цю призму.
219. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q . Знайдіть площу бічної поверхні правильної шестикутної призми, описаної навколо цього циліндра.
220. Навколо правильної трикутної призми описано циліндр, радіус основи якого r , а діагональ осьового перерізу утворює з твірною кут β . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
221. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює a , а висота — H . У призму вписано циліндр. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, по яких бічна поверхня циліндра дотикається до двох сусідніх бічних граней призми.
222. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ грані, що містить бічну сторону цього трикутника, утворює з площиною основи призми кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо радіус основи циліндра, вписаного в цю призму, дорівнює r .

Конус

223. Доведіть, що кожна точка, рівновіддалена від точок кола основи конуса, належить прямій, що містить вісь конуса.
224. Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а твірна — 11 см. Знайдіть висоту конуса.

225. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а його осьовий переріз — рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайдіть висоту конуса та його твірну.
226. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а його твірна більша за висоту на 2 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.
227. Радіус основи конуса дорівнює 10 см, а твірна — 26 см. На відстані 4,8 см від вершини конуса проведено переріз, площина якого паралельна площині основи. Знайдіть площу цього перерізу.
228. Радіус основи конуса дорівнює 24 см, а його висота поділена у відношенні $3:4:5$, рахуючи від вершини. Через точки поділу проведено площини, паралельні площині основи конуса. Знайдіть площі отриманих перерізів.
229. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 30° , а радіус кола, описаного навколо осьового перерізу, дорівнює 12 см. Знайдіть твірну конуса.
230. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює β , а його периметр дорівнює P . Знайдіть площу основи конуса.
231. Радіус основи конуса дорівнює 16 см. Через вершину конуса проведено переріз, який перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом 60° . Знайдіть кут між площиною перерізу і площиною основи конуса, якщо висота конуса дорівнює 24 см.
232. В основі конуса проведено хорду, яку видно з центра основи під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β . Знайдіть висоту конуса, якщо його твірна дорівнює l .
233. В основі конуса проведено хорду CD на відстані 9 см від центра O основи, відрізок SO — висота конуса. Знайдіть висоту конуса, якщо точка O віддалена від площини CDS на 4,5 см.
234. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює R , а твірна утворює з площиною основи кут β .

Зрізаний конус

235. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 8 см і 4 см, а твірна утворює з площиною більшої основи кут 60° . Знайдіть висоту зрізаного конуса та його твірну.
236. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 14 см і 22 см, а твірна — 17 см. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.

237. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 9 см і 21 см, а його твірна відноситься до висоти конуса як 13 : 5. Знайдіть площу осцевого перерізу зрізаного конуса.
238. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 12 см^2 і 24 см^2 . Через точку, яка ділить його висоту у відношенні 1 : 3, рахуючи від меншої основи, проведено переріз, паралельний основам. Знайдіть площу цього перерізу.
239. Твірна зрізаного конуса дорівнює 8 см і утворює з площиною більшої основи кут 60° . Діагональ осцевого перерізу перпендикулярна до твірної, через яку проходить даний переріз. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса.
240. Твірна зрізаного конуса дорівнює 4 см і утворює з площиною більшої основи кут 60° . Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса, якщо діагональ його осцевого перерізу дорівнює $2\sqrt{19}$ см.
241. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 10 см і 16 см, а його твірна дорівнює радіусу меншої з основ. Знайдіть площу осцевого перерізу зрізаного конуса.
242. У зрізаному конусі проведено осцевий переріз CC_1D_1D і по різні сторони від нього на основах конуса вибрано точки A і B (рис. 25). Перерисуйте рисунок у зошит і побудуйте точку перетину прямої AB з площиною CC_1D_1 .

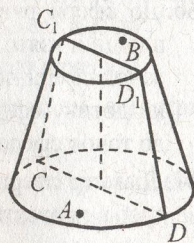


Рис. 25

Вписана і описана піраміди

243. У конус вписана піраміда, основою якої є гострокутний трикутник. Де знаходиться основа висоти конуса по відношенню до трикутника основи піраміди?
244. Основою піраміди є прямокутник, одна із сторін якого дорівнює 18 см і утворює з діагоналлю кут 60° . Усі бічні ребра піраміди дорівнюють 12 см. Знайдіть площу осцевого перерізу конуса, описаного навколо піраміди.
245. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см, а двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 30° . Знайдіть площу осцевого перерізу конуса, вписаного в цю піраміду.
246. Висота конуса дорівнює 8 см, а радіус основи — 6 см. Навколо конуса описано чотирикутну піраміду, основою якої є рівнобічна трапеція з бічною стороною 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

247. Площа осевого перерізу зрізаного конуса, описаного навколо зрізаної чотирикутної піраміди, дорівнює $5\sqrt{14}$ см². Основи зрізаної піраміди — квадрати зі сторонами 4 см і 6 см. Знайдіть твірну зрізаного конуса.
248. Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює c , а гострий кут — β . Двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють α . Знайдіть площу осевого перерізу конуса, вписаного в цю піраміду.

Куля

249. Радіус кулі дорівнює $4\frac{2}{3}$ см. У середині чи зовні кулі розміщена точка B , якщо вона віддалена: 1) від центра кулі на 5 см; 2) від центра кулі на $\sqrt{15}$ см; 3) від точки на поверхні кулі на 8,6 см?
250. До сфери радіусом 15 см проведено дотичну площину. На цій площині взято точку K таку, що найменша відстань від точки K до точок сфери дорівнює 2 см. Знайдіть відстань від точки K до точки дотику сфери з площиною та найбільшу відстань від точки K до точок сфери.
251. Діаметр сфери дорівнює 34 см. На якій відстані від центра сфери треба провести площину, щоб довжина лінії перетину сфери з цією площиною дорівнювала 16π см?
252. Через кінець радіуса кулі проведено площину, яка утворює з цим радіусом кут 30° . Знайдіть радіус кулі, якщо площа перерізу кулі цією площиною дорівнює 64π см².
253. Площа великого круга кулі дорівнює S , а площа перерізу кулі площиною дорівнює $\frac{2}{3}S$. На якій відстані від центра кулі проведено переріз?
254. Діаметр кулі двома точками поділений на три частини у відношенні 3 : 4 : 7. Знайдіть відношення площ перерізів кулі, які проходять через ці точки перпендикулярно до діаметра кулі.
255. Вершини рівностороннього трикутника зі стороною 9 см лежать на поверхні кулі, а відстань від центра кулі до площини трикутника дорівнює 3 см. Знайдіть радіус кулі.
256. Вершини рівнобедреного трикутника з основою 36 см і бічною стороною 30 см лежать на поверхні кулі, радіус якої дорівнює 25 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

257. Діагоналі ромба дорівнюють 30 см і 40 см. Куля дотикається до всіх сторін ромба, а відстань від центра кулі до площини ромба дорівнює 18 см. Знайдіть радіус кулі.
258. Куля дотикається до всіх сторін рівнобічної трапеції, бічна сторона якої дорівнює 8 см, а гострий кут — 45° . Знайдіть радіус кулі, якщо відстань від її центра до площини трапеції дорівнює $6\sqrt{2}$ см.
259. Куля дотикається до всіх граней тригранного кута, усі плоскі кути якого прями. Знайдіть відстань від центра кулі до вершини кута, якщо радіус кулі дорівнює 4 см.
260. Радіуси двох сфер дорівнюють 10 см і 17 см, а довжина лінії їх перетину — 16π см. Знайдіть відстань між центрами сфер.

Об'єм прямого паралелепіпеда

261. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює 140 см^3 , а два його виміри — 5 см і 7 см. Знайдіть третій вимір паралелепіпеда.
262. Об'єм куба дорівнює 64 см^3 . Знайдіть площу його поверхні.
263. Кожне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 8 см, а гострий кут основи — 60° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
264. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60° . Одна із сторін основи паралелепіпеда дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
265. У прямокутному паралелепіпеді одна із сторін основи дорівнює 6 см, а бічне ребро — 4 см. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
266. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ діагоналі $A_1 C$ і $B_1 D$ перетинаються в точці O так, що $\angle COD = 60^\circ$, і дорівнюють по 8 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його діагональ утворює з площиною основи кут 45° .
267. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 8 см і 12 см, а тупий кут — 120° . Висота паралелепіпеда дорівнює меншій діагоналі основи. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
268. Одна із сторін основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 6 см, а діагональ основи — 12 см. Переріз, який проходить через діагональ нижньої основи та протилежну вершину верхньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

269. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом α . Більша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо менша діагональ його основи дорівнює d .
270. Площі двох сусідніх бічних граней прямого паралелепіпеда дорівнюють 63 см^2 і 108 см^2 , а їх спільне ребро — 9 см . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо гострий кут його основи дорівнює 45° .
271. Діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює d і утворює зі стороною AB кут α . Площина, яка проходить через точки C, D і B_1 , утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
272. Основою прямокутного паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює S , а площі діагональних перерізів дорівнюють P і Q . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
273. Точка перетину діагоналей прямокутного паралелепіпеда віддалена від його ребер на 5 см , 8 см і 9 см . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
274. У циліндр, радіус основи якого дорівнює 6 см , вписано прямокутний паралелепіпед, бічне ребро якого утворює з діагоналлю паралелепіпеда і з діагоналлю грані, які мають спільну вершину, кути 60° і 45° відповідно. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Об'єм похилого паралелепіпеда

275. Основою похилого паралелепіпеда є ромб, більша діагональ якого дорівнює 8 см , а гострий кут — 60° . Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
276. Бічне ребро похилого паралелепіпеда дорівнює 8 см . Переріз паралелепіпеда площиною, перпендикулярною до бічного ребра, є паралелограмом, сторони якого дорівнюють 2 см і 3 см , а гострий кут — 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
277. Основою похилого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є ромб $ABCD$, $AB = 8 \text{ см}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Бічне ребро BB_1 дорівнює 8 см і утворює зі сторонами AB і BC кути по 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
278. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 5 см і 8 см . Дві його бічні грані — також прямокутники зі сторонами 5 см і 4 см , а гострий кут двох інших граней дорівнює 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

279. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною a . Одне з бічних ребер паралелепіпеда дорівнює b і утворює з кожною із сторін основи, які перетинає, кут β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
280. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 3 см і 4 см, бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 5 см, а бічні грані утворюють з площиною основи кути 30° і 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
281. Відстань між бічним ребром AA_1 і діагоналлю B_1D похилого паралелепіпеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ дорівнює m . Чотирикутник AB_1C_1D є ромбом зі стороною a і кутом α . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Об'єм прямої призми

282. Основою прямої призми є ромб з діагоналями 12 см і 16 см. Діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм призми.
283. Кожне ребро правильної трикутної призми дорівнює 2 см. Знайдіть об'єм призми.
284. Бічна грань правильної шестикутної призми є квадратом, діагональ якого дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм призми.
285. У правильній чотирикутній призмі діагональ дорівнює d і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм призми.
286. Об'єм правильної чотирикутної призми дорівнює V . Знайдіть об'єм призми, вершини якої — середини сторін основ даної призми.
287. Площа основи правильної трикутної призми дорівнює $25\sqrt{3}$ см². Висота основи призми в 4 рази менша від діагоналі бічної грані. Знайдіть об'єм призми.
288. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою b і кутом β при вершині. Діагональ грані, що містить бічну сторону трикутника, утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм призми.
289. Основа прямої призми — трикутник зі стороною a , протилежним їй стороні кутом α і прилеглим кутом β . Діагональ бічної грані, яка містить сторону основи, до якої прилягають кути α і β , нахилена до площини основи під кутом γ . Знайдіть об'єм призми.
290. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і кутом 30° . Об'єм призми дорівнює $48\sqrt{3}$ см³. Знайдіть площу повної поверхні призми.

291. Основа прямої призми — ромб з гострим кутом 45° . Діагональ бічної грані дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм призми.
292. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α . Діагональ бічної грані, що містить катет, протилежний куту α , нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм призми.
293. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Діагональ бічної грані призми, що містить основу рівнобедреного трикутника, нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм призми.
294. У правильній чотирикутній призмі діагональ дорівнює 8 см, а діагональ бічної грані — 6 см. Знайдіть об'єм призми.
295. Основою прямої призми є прямокутний трикутник, один з катетів якого дорівнює a . Через другий катет і протилежну йому вершину верхньої основи проведено переріз, площа якого дорівнює S . Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює H .
296. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює 5 см, а діаметр вписаного кола — 3 см. Діагональ призми утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм призми.
297. Бічні грані правильної шестикутної призми є квадратами, а менша діагональ основи дорівнює d . Знайдіть об'єм призми.
298. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють a і b ($a > b$), а площа дорівнює S . Через точку, яка ділить бічне ребро у відношенні $3 : 1$, рахуючи від верхньої основи, і протилежну цьому ребру меншу основу трапеції проведено переріз, який утворює з площиною нижньої основи кут α . Знайдіть об'єм призми.
299. У правильній трикутній призмі діагональ бічної грані дорівнює 25 см, а площа бічної поверхні — 504 см^2 . Знайдіть об'єм призми.
300. Основа прямої призми — ромб зі стороною a і тупим кутом α . Через більшу діагональ нижньої основи і вершину тупого кута верхньої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.
301. Кут між діагоналями двох бічних граней правильної чотирикутної призми, проведеними з однієї вершини, дорівнює α . Знайдіть об'єм призми, якщо діагональ бічної грані дорівнює d .

Об'єм похилої призми

302. Основою похилої призми є трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см. Бічне ребро призми дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм призми.
303. Основою похилої призми є правильний трикутник. Висота призми дорівнює h . Проекцією однієї з вершин верхньої основи на площину нижньої основи є центр цієї основи, а бічне ребро призми утворює з її висотою кут β . Знайдіть об'єм призми.
304. Основою похилої призми є квадрат. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а площа кожної з двох інших граней дорівнює 36 см^2 . Бічні ребра призми дорівнюють ребрам основи і утворюють з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм призми.
305. Основою призми є рівнобедрений прямокутний трикутник. Бічна грань, яка проходить через один з катетів основи, є квадратом зі стороною 4 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм призми.
306. Основою похилої призми є трапеція, площі паралельних бічних граней дорівнюють S_1 і S_2 , а відстань між ними — m . Знайдіть об'єм призми.

Об'єм піраміди

307. Основою піраміди є трикутник ABC , $AB = 6 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$, $\angle ABC = 30^\circ$, її висота дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм піраміди.
308. У призмі $ABCA_1B_1C_1$ проведено переріз, який ділить ребро AA_1 на дві рівні частини (рис. 26). Знайдіть об'єм призми, якщо об'єм піраміди $MABC$ дорівнює V .

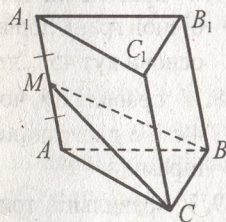


Рис. 26

309. На рисунку 27 зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки E , F і N належать ребрам $A_1 B_1$, $A_1 D_1$ і AA_1 відповідно, $A_1 E : EB_1 = 2 : 1$, $A_1 F : FD_1 = 3 : 1$, $A_1 N : NA = 2 : 3$. Знайдіть об'єм піраміди $A_1 EFN$, якщо об'єм куба дорівнює V .

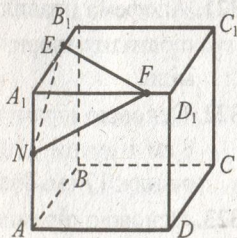


Рис. 27

310. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 12 см і бічною стороною 10 см. Проекцією вершини піраміди на площину її основи є точка перетину бісектрис основи. Найменше бічне ребро

- піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.
311. Об'єм правильної піраміди дорівнює V . Чому буде дорівнювати об'єм правильної піраміди, висота якої в m разів більша за висоту, а сторона основи в n разів менша від сторони основи першої піраміди?
312. Знайдіть об'єм правильної шестикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а бічна грань утворює з площиною основи кут 60° .
313. Висота основи правильної трикутної піраміди дорівнює h , а бічне ребро утворює з висотою піраміди кут φ . Знайдіть об'єм піраміди.
314. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює S , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди.
315. У правильній чотирикутній піраміді радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює 4 см, а бічні грані утворюють з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм піраміди.
316. У правильній чотирикутній піраміді висота утворює з бічним ребром кут φ , а основа висоти віддалена від середини бічного ребра на відстань m . Знайдіть об'єм піраміди.
317. У правильній трикутній піраміді відстань від центра основи до бічної грані дорівнює 3 см, а бічна грань утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм піраміди.
318. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 4 см, а двогранний кут при бічному ребрі — 120° . Знайдіть об'єм піраміди.
319. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює a , а плоский кут при вершині — α . Знайдіть об'єм піраміди.
320. У правильній трикутній піраміді висота дорівнює h , а кут між апофемами двох бічних граней — 90° . Знайдіть об'єм піраміди.
321. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює a . Бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди.
322. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною 8 см і кутом 120° при вершині. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 17 см. Знайдіть об'єм піраміди.
323. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α . Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм піраміди.

324. Основою піраміди є трикутник, дві сторони якого дорівнюють 8 см і 3 см, а кут між ними — 60° . Усі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють 30° . Знайдіть об'єм піраміди.
325. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом β при основі. Усі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють α . Знайдіть об'єм піраміди.
326. Основою піраміди є ромб з кутом α . Усі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють φ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H .
327. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 7 см, 10 см і 13 см. Висота піраміди проходить через вершину середнього за величиною кута основи, а вершина піраміди віддалена від середньої за величиною сторони основи на 8 см. Знайдіть об'єм піраміди.
328. Основою піраміди $SABC$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$. Ребро SA перпендикулярне до площини ABC , а грань SBC утворює з нею кут φ . Знайдіть об'єм піраміди.
329. Основою піраміди є ромб зі стороною a і кутом α . Бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а дві інші грані утворюють з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм піраміди.
330. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом b і протилежним до нього гострим кутом β . Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом α . Знайдіть об'єм піраміди.
331. Основою піраміди є квадрат з діагоналлю $14\sqrt{2}$ см. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є трикутником зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть об'єм піраміди.
332. Основою піраміди є квадрат зі стороною a . Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є рівностороннім трикутником. Знайдіть об'єм піраміди.
333. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α . Грань піраміди, що містить гіпотенузу, перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм піраміди.
334. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Бічна грань піраміди, що містить основу цього трикутника,

перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H .

Об'єм зрізаної піраміди

335. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 4 см, а висота — 5 см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
336. Сторона меншої основи правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а бічне ребро дорівнює 6 см і утворює з площиною більшої основи кут 60° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
337. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 3 см і 6 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут 60° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
338. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 3 см і 6 см, а висота повної піраміди — 10 см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
339. Основи зрізаної піраміди — рівнобедрені трикутники, у яких основи дорівнюють 6 см і 8 см відповідно, а кут при вершині — 150° . Усі бічні ребра утворюють з площиною більшої основи кут 60° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
340. Менша основа зрізаної піраміди — трикутник зі сторонами 8 см, 26 см і 30 см. Бічні грані утворюють з площиною більшої основи кути по 45° , а висоти бічних граней дорівнюють $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
341. Основи зрізаної піраміди — трикутники зі сторонами 7 см, 10 см, 13 см і 14 см, 20 см, 26 см відповідно. Бічна грань, що містить середні за величиною сторони основ, перпендикулярна до площин основ, а бічне ребро, яке не лежить у цій грані, дорівнює 8 см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.
342. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 2 см і 4 см, а гострий кут бічної грані — 60° . Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

Об'єми подібних тіл

343. Ребро куба збільшили у 3 рази. У скільки разів збільшився об'єм куба?
344. Із скількох кубів з ребром 3 см можна скласти куб з ребром 9 см?
345. Ребро одного куба дорівнює діагоналі другого куба. Знайдіть відношення об'ємів цих кубів.

346. Площа основи піраміди дорівнює S , а її висота, яка дорівнює H , поділена у відношенні $1 : 2$, рахуючи від вершини піраміди, і через точку поділу проведено площину, яка паралельна площині основи. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, що утворилась.
347. Висоту піраміди поділено на 4 рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні площині основи піраміди. Знайдіть відношення об'ємів частин, на які розбивають піраміду ці площини.

Об'єм циліндра

348. Радіус основи циліндра дорівнює 6 см, а висота — 3 см. Знайдіть об'єм циліндра.
349. Радіус основи циліндра дорівнює 3 см, а діагональ осевого перерізу утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм циліндра.
350. Осевий переріз циліндра — квадрат, площа якого дорівнює Q . Знайдіть об'єм циліндра.
351. Радіус основи циліндра дорівнює R , а площа його осевого перерізу дорівнює S . Знайдіть об'єм циліндра.
352. Радіус основи першого циліндра в 2 рази більший за радіус основи другого, а висота першого циліндра у 3 рази менша від висоти другого. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів.
353. Об'єм циліндра дорівнює V , а площа його осевого перерізу вдвічі менша від площі основи. Знайдіть радіус основи циліндра та його висоту.
354. Розгортка бічної поверхні циліндра — квадрат з діагоналлю d . Знайдіть об'єм циліндра.
355. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який знаходиться на відстані 4 см від його осі. Діагональ отриманого перерізу дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 12 см.
356. Через одну твірну циліндра проведено два перерізи, кут між площинами яких дорівнює 60° , а площі отриманих перерізів дорівнюють по 42 см^2 . Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює $2\sqrt{3}$ см.
357. В основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом α і яка знаходиться на відстані d від центра цієї основи. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут φ . Знайдіть об'єм циліндра.

358. У циліндрі паралельно його осі проведено переріз, який перетинає нижню основу циліндра по хорді, довжина якої дорівнює a і яку видно з центра цієї основи під кутом α , а з центра верхньої основи під кутом β . Знайдіть об'єм циліндра.
359. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює P , а його діагональ утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм циліндра.
360. Об'єм циліндра дорівнює V , а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Об'єм конуса

361. Радіус основи конуса дорівнює 3 см, а його висота — 4 см. Знайдіть об'єм конуса.
362. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник, площа якого дорівнює 16 см^2 . Знайдіть об'єм конуса.
363. Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює a , а кут при основі — α . Знайдіть об'єм конуса.
364. Через дві твірні конуса проведено переріз, який перетинає основу по хорді завдовжки 8 см. Цю хорду видно з центра основи конуса під кутом 90° . Знайдіть об'єм конуса, якщо площа перерізу утворює з площиною основи конуса кут 45° .
365. Твірна конуса утворює з його висотою кут α . Відрізок, що сполучає центр основи конуса з серединою твірної, дорівнює m . Знайдіть об'єм конуса.
366. В основі конуса проведено хорду, яка знаходиться на відстані d від центра основи і яку видно з цього центра під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β . Знайдіть об'єм конуса.
367. Прямокутний трикутник, гострий кут якого дорівнює α , обертається спочатку навколо одного катета, а потім навколо другого. Знайдіть відношення об'ємів конусів, що утворились.
368. Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а радіус описаного кола — 6 см. Знайдіть об'єм конуса.
369. Паралельно основі конуса проведено площину, яка ділить його на два тіла, об'єми яких відносяться як $8 : 19$, рахуючи від вершини. У якому відношенні ця площина ділить висоту конуса?
370. Відрізки SA , SB і SC — твірні конуса. Знайдіть його об'єм, якщо $SA = a$, $\angle SAB = \angle SBC = \angle SAC = \alpha$.

371. Переріз, який проведено через дві твірні конуса, має площу Q і утворює з площиною основи кут α . Переріз перетинає основу конуса по хорді, яку видно з центра основи під кутом β . Знайдіть об'єм конуса.

Об'єм зрізаного конуса

372. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 5 см і 7 см, а його висота — 4 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.
373. У зрізаному конусі твірна дорівнює 5 см, висота — 3 см, а радіус більшої основи — 7 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.
374. Радіус більшої основи зрізаного конуса дорівнює R , а його твірна дорівнює l і утворює з площиною більшої основи кут α . Знайдіть об'єм зрізаного конуса.
375. Радіуси основ зрізаного конуса відносяться як 3 : 7, а висота дорівнює 8 см і утворює з твірною кут 60° . Знайдіть об'єм зрізаного конуса.
376. Через точку, що ділить висоту конуса у відношенні 3 : 1, рахуючи від вершини, проведено переріз, паралельний основі. Знайдіть об'єм даного конуса, якщо об'єм зрізаного конуса, що утворився, дорівнює V .
377. У зрізаному конусі діагоналі осьового перерізу перпендикулярні, а його твірна дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

Об'єм кулі. Об'єм кульового сегмента і кульового сектора

378. Радіус кулі дорівнює 4 см. Знайдіть її об'єм.
379. Об'єми двох куль відносяться як 8 : 27. Знайдіть відношення їх радіусів.
380. У скільки разів треба збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився у 3 рази?
381. Дві кулі мають спільний центр. Знайдіть радіус більшої кулі, якщо радіус меншої кулі дорівнює 3 см, а об'єм тіла, що міститься між поверхнями цих куль, дорівнює 252π см³.
382. Радіус основи конуса дорівнює 2 см, а його висота — 3 см. Знайдіть радіус кулі, рівновеликої цьому конусу.
383. На відстані 5 см від центра кулі проведено переріз, площа якого дорівнює 144π см². Знайдіть об'єм кулі.
384. Через кінець радіуса кулі проведено переріз, площа якого утворює з цим радіусом кут β . Знайдіть площу цього перерізу, якщо об'єм кулі дорівнює V .

385. Куля, об'єм якої дорівнює V , дотикається до всіх сторін рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює b , а кут при основі — α . Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.
386. Знайдіть об'єм кульового сегмента, якщо радіус кулі дорівнює 5 см, а висота кульового сегмента — 6 см.
387. Площина розбиває кулю на два сегменти, радіус кола основи яких дорівнює 9 см. Знайдіть об'єм більшого кульового сегмента, якщо радіус кулі дорівнює 15 см.
388. Знайдіть об'єм кульового сектора, якщо радіус кулі дорівнює 6 см, а висота відповідного кульового сегмента — 2 см.
389. Радіус кулі дорівнює 6 см. Знайдіть об'єм кульового сектора цієї кулі, якщо дуга в його осьовому перерізі містить 60° .

Площа бічної поверхні циліндра

390. Радіус основи циліндра дорівнює 5 см, а його висота — 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
391. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 10 см, а кут між діагоналями осьового перерізу, який лежить проти діаметра основи, — 120° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
392. У циліндрі паралельно його осі проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу в 90° . У якому відношенні ця площа ділить бічну поверхню циліндра?
393. Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого дорівнює S . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
394. Радіус основи одного циліндра в n разів більший за радіус основи другого циліндра, а площі бічних поверхонь цих циліндрів рівні. Знайдіть відношення висот цих циліндрів.
395. Площа бічної поверхні циліндра в 2 рази більша за площу його основи, а площа повної поверхні циліндра дорівнює 256π см². Знайдіть радіус основи циліндра та його висоту.
396. Радіус основи циліндра дорівнює 6 см. Паралельно його осі проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу в 90° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо діагональ даного перерізу дорівнює 12 см.
397. Об'єм циліндра дорівнює 54π см³, а його висота — 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

398. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 5 см, а площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі його основи. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
399. Прямокутник $ABCD$ є розгорткою бічної поверхні циліндра. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см, а кут між діагоналями — 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо більша сторона прямокутника $ABCD$ є висотою циліндра.
400. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо відстань від осі циліндра до площини перерізу дорівнює 3 см.
401. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого утворює з площиною основи кут α . Цей переріз перетинає нижню основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює R .
402. Точки A і B лежать на колах різних основ циліндра, а довжина відрізка AB дорівнює 13 см. Знайдіть відстань від осі циліндра до прямої AB , якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює $100\pi \text{ см}^2$, а радіус його основи — 10 см.
403. Об'єм циліндра дорівнює V , а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу повної поверхні циліндра.
404. Через три твірні циліндра проведено перерізи, площі яких дорівнюють 3 см^2 , 5 см^2 і 7 см^2 . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Площа бічної поверхні конуса

405. Радіус основи конуса дорівнює 3 см, а його твірна — 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
406. Висота конуса дорівнює 15 см, а його твірна — 17 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
407. Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник з основою 8 см і кутом при вершині 120° . Знайдіть площу повної поверхні конуса.
408. Твірна конуса дорівнює a і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу повної поверхні конуса.
409. Об'єм конуса дорівнює $18\pi \text{ см}^3$, а його висота в 2 рази більша за радіус основи. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

410. Площа повної поверхні конуса дорівнює $90\pi \text{ см}^2$, а його твірна більша за радіус основи на 8 см. Знайдіть об'єм конуса.
411. Площа повної поверхні конуса дорівнює $108\pi \text{ см}^2$, а його висота — $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини його основи.
412. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник, периметр якого дорівнює P . Знайдіть площу повної поверхні конуса.
413. Точка K ділить висоту конуса у відношенні $2:3$, рахуючи від вершини конуса. Через цю точку проведено площину, паралельну площині основи конуса. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь тіл, на які ця площина розбиває конус.
414. Площина, паралельна площині основи конуса, ділить його на два тіла, площі бічних поверхонь яких рівні. У якому відношенні, рахуючи від вершини, ця площина ділить висоту конуса?
415. Твірна конуса утворює з його висотою кут β , а площа бічної поверхні конуса дорівнює S . Знайдіть площу повної поверхні конуса.
416. Розгортка бічної поверхні конуса — сектор, кут якого дорівнює 210° . Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо площа його осьового перерізу дорівнює 64 см^2 .
417. Розгорткою бічної поверхні конуса є півкруг. Доведіть, що твірна конуса в 2 рази більша за радіус його основи.
418. Радіус основи конуса дорівнює R . В основі конуса проведено хорду, яку видно з центра основи під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β . Знайдіть площу повної поверхні конуса.
419. Переріз конуса, який проходить через його вершину, перетинає основу конуса по хорді, яку видно з центра основи під кутом β . Площина перерізу утворює з висотою конуса кут φ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює H .
420. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює β , проведено переріз, який утворює з площиною основи конуса кут φ . Знайдіть площу перерізу, якщо площа бічної поверхні конуса дорівнює S .

Площа бічної поверхні зрізаного конуса

421. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 6 см, а його твірна — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
422. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса, твірна якого дорівнює 10 см, висота — 8 см, а площа бічної поверхні — $100\pi \text{ см}^2$.

423. Твірна зрізаного конуса дорівнює 10 см і утворює з площиною більшої основи кут 60° . Діагональ осьового перерізу зрізаного конуса утворює з площиною більшої основи кут 30° . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.
424. Висота зрізаного конуса дорівнює H , а діагоналі його осьового перерізу перпендикулярні. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, якщо його твірна утворює з площиною більшої основи кут β .

Площа сфери

425. Радіус сфери дорівнює 6 см. Знайдіть площу її поверхні.
426. Площа поверхні кулі дорівнює S . Знайдіть площу великого круга цієї кулі.
427. Радіус кулі зменшили в 4 рази. Як при цьому змінилася площа її поверхні?
428. Площу поверхні кулі збільшили в 9 разів. У скільки разів збільшився її об'єм?
429. Один з кутів трикутника дорівнює 120° . Його сторони є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших дорівнюють S_1 і S_2 .
430. Площина, яка знаходиться на відстані 8 см від центра кулі, перетинає її поверхню по лінії, довжина якої дорівнює 12π см. Знайдіть площу поверхні кулі.

Тіла обертання

431. Прямокутник зі сторонами 5 см і 12 см обертається навколо прямої, що містить більшу з його сторін. Знайдіть об'єм і площу поверхні тіла обертання.
432. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Він обертається навколо прямої, що містить середню з його сторін. Знайдіть об'єм і площу поверхні тіла обертання.
433. Прямокутний трикутник з катетом a і протилежним до нього гострим кутом α обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
434. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює b , гострий кут — β , а бічна сторона — c . Знайдіть об'єм тіла, яке утворене обертанням трапеції навколо меншої основи.

435. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює c , а один з гострих кутів — α . Трикутник обертається навколо прямої, яка проходить через вершину кута α перпендикулярно до гіпотенузи і лежить у площині трикутника. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
436. Площа ромба дорівнює S , а гострий кут — α . Він обертається навколо однієї із сторін. Знайдіть об'єм тіла обертання.
437. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 8 см, а кут при основі — 15° . Він обертається навколо бічної сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
438. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює b , а кут при вершині — 2β . Цей трикутник обертається навколо прямої m , яка лежить у площині трикутника, паралельна його основі і знаходиться на відстані c від неї (рис. 28). Знайдіть об'єм тіла обертання.

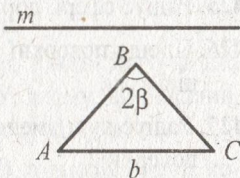


Рис. 28

Комбінації тіл

439. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a , а висота — H . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо цієї призми.
440. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Діагональ бічної грані призми, що містить основу рівнобедреного трикутника, нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо призми.
441. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, а бічне ребро — 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в цю призму.
442. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює d , а діагональ призми утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в цю призму.
443. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а висота — $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть об'єм і площу повної поверхні конуса, описаного навколо цієї піраміди.
444. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a і протилежним до нього кутом α . Бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут ϕ . Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо цієї піраміди.

445. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює a , а кут між бічними сторонами — β . Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють φ . Знайдіть площу повної поверхні конуса, вписаного в цю піраміду.
446. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною 20 см і основою 24 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 45° . Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду.
447. Навколо прямокутного паралелепіпеда, висота якого дорівнює 8 см, а діагоналі бічних граней — 10 см і 17 см, описано кулю. Знайдіть площу поверхні цієї кулі.
448. У правильній трикутній призмі радіус описаної кулі дорівнює 13 см, а сторона основи — $5\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
449. Сторона основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює a і утворює з однією з діагоналей основи кут α , а діагональ паралелепіпеда утворює з його бічним ребром кут β . Знайдіть площу поверхні кулі, описаної навколо паралелепіпеда.
450. Навколо куба, ребро якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см, описано кулю. Знайдіть об'єм кулі і площу її поверхні.
451. У правильну чотирикутну призму вписано кулю. Знайдіть відношення сторони основи призми до її висоти.
452. Знайдіть радіус кулі, вписаної у правильну трикутну призму, сторона основи якої дорівнює 6 см.
453. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 16 см, 28 см і 30 см. У призму вписано кулю. Знайдіть радіус цієї кулі.
454. У пряму призму вписано кулю. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо площа її основи дорівнює 8 см^2 .
455. У правильну чотирикутну призму вписано кулю радіуса r . Знайдіть об'єм призми.
456. У правильну трикутну призму вписано кулю, об'єм якої дорівнює V . Знайдіть об'єм призми.
457. У правильну чотирикутну призму вписано кулю та навколо неї описано кулю. Знайдіть відношення радіусів цих куль.
458. Усі ребра правильної чотирикутної піраміди рівні між собою. Доведіть, що центр кулі, описаної навколо піраміди, збігається з центром її основи.

459. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 9 см, а її діагональний переріз — рівносторонній трикутник. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.
460. З точки F , яка лежить на сфері, проведено три промені, які перетинають сферу в точках A , B і C . Знайдіть відстань від точки F до площини ABC , якщо радіус сфери дорівнює 18 см, $FA = FB = FC$, $\angle AFB = \angle BFC = \angle AFC = 90^\circ$.
461. Радіуси кіл, описаних навколо основи та бічної грані правильної трикутної піраміди, відповідно дорівнюють 24 см і $12\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.
462. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b , а сторона основи — a . Знайдіть площу поверхні кулі, описаної навколо піраміди.
463. Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну шестикутну піраміду, висота якої дорівнює H , а двогранний кут при основі дорівнює β .
464. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α , а радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
465. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофема — 13 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.
466. Основою піраміди є ромб зі стороною 50 см і більшою діагоналлю 80 см. Висота піраміди дорівнює 32 см і проходить через точку перетину діагоналей ромба. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.
467. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює b , а висота — H . Знайдіть об'єм кулі, вписаної в цю піраміду.
468. У циліндр вписано кулю. Доведіть, що висота циліндра дорівнює діаметру його основи. Де знаходиться центр цієї кулі?
469. Знайдіть відношення площі бічної поверхні циліндра до площі поверхні кулі, вписаної в цей циліндр.
470. Радіус основи циліндра дорівнює R . Діагональ осевого перерізу утворює з площиною основи кут α . Знайдіть радіус кулі, описаної навколо циліндра.
471. У кулю радіуса R вписано конус, основа якого — великий круг кулі. Знайдіть об'єм конуса.
472. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а його осевий переріз — рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо конуса.

473. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а його твірна — 17 см. Знайдіть радіуси куль, вписаної в конус та описаної навколо нього.
474. Радіус основи конуса дорівнює R , а кут при вершині осьового перерізу конуса — α . Знайдіть радіуси куль, вписаної в конус та описаної навколо нього.
475. Твірна конуса утворює з площиною основи кут α . У конус вписано кулю, об'єм якої дорівнює V . Знайдіть об'єм конуса.
476. Навколо зрізаного конуса описано кулю. Доведіть, що всі твірні зрізаного конуса видно з центра кулі під рівними кутами.
477. У зрізаного конуса твірна утворює з площиною більшої основи кут 60° , а різниця радіусів основ зрізаного конуса дорівнює 6 см. У конус вписано кулю. Знайдіть радіус кулі та радіуси основ зрізаного конуса.
478. Твірна зрізаного конуса дорівнює a і утворює з площиною більшої основи кут α . Знайдіть радіус кулі, описаного навколо зрізаного конуса, якщо діагональ його осьового перерізу перпендикулярна до твірної, яку перетинає.
479. У зрізаний конус вписано кулю радіуса R . Знайдіть об'єм зрізаного конуса, якщо його твірна утворює з площиною більшої основи кут β .
480. У конус вписано циліндр, радіуси їх основ відносяться як $3 : 2$. Знайдіть об'єм конуса, якщо об'єм циліндра дорівнює V .
481. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , а двогранний кут при основі дорівнює α . У піраміду вписано куб так, що одна грань куба лежить у площині основи піраміди, а вершини паралельної їй грані лежать на апофемах піраміди. Знайдіть об'єм куба.

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Варіант 1

Контрольна робота № 1

Тема. *Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі*

- 1.° Дано точки $M(3; -2; 1)$ і $N(5; 2; -3)$. Знайдіть координати середини відрізка MN та його довжину.
 - 2.° Дано точки $A(-2; 1; 3)$, $B(3; -2; -1)$ і $C(-3; 4; 2)$. Знайдіть:
 - 1) координати векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} ;
 - 2) модуль вектора \overrightarrow{AB} ;
 - 3) координати вектора $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
 - 3.* Чи існує паралельне перенесення, при якому образом точки $M(4; 3; 4)$ є точка $M_1(1; 3; 0)$, а образом точки $K(1; -8; 3)$ — точка $K_1(6; -2; 7)$?
 - 4.* Точки $A(-2; -4; 1)$ і $B(-5; -6; -1)$ — вершини паралелограма $ABCD$, точка $O(1; 3; 2)$ — точка перетину його діагоналей. Знайдіть координати вершин C і D паралелограма $ABCD$.
 - 5.* Дано вектори $\vec{a}(-2; 8; -4)$ і $\vec{b}(1; -4; k)$. При якому значенні k вектори \vec{a} і \vec{b} :
 - 1) колінеарні;
 - 2) перпендикулярні?
 - 6.** Дано вектори \vec{a} і \vec{b} такі, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, а кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 60° . Знайдіть $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.
-

Контрольна робота № 2

Тема. *Многогранники*

- 1.° Основою прямої призми є прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.
 - 2.° Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а висота — 8 см. Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди.
 - 3.° Діагональ бічної грані правильної чотирикутної призми дорівнює a і утворює з діагоналлю призми, яка виходить з тієї ж вершини, кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
 - 4.° Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
 - 5.° Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 12 см. Бічні грані піраміди, що містять бічні сторони трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя грань утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює $8\sqrt{3}$ см.
-

Контрольна робота № 3**Тема. Тіла обертання**

- 1.° Радіус основи циліндра дорівнює 6 см, а діагональ його осьового перерізу утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть висоту циліндра.
 - 2.° Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а твірна — 13 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.
 - 3.° На відстані 4 см від центра кулі проведено переріз. Відрізок, що з'єднує центр кулі з точкою перетину цього перерізу з поверхнею кулі, утворює з площиною перерізу кут 30° . Знайдіть площу перерізу.
 - 4.° Висота циліндра дорівнює 8 см, радіус основи — 5 см. На відстані 4 см від осі циліндра паралельно їй проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу.
 - 5.° Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює φ , проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо висота конуса дорівнює h і утворює з його твірною кут α .
 - 6.** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β . Знайдіть висоту конуса, описаного навколо даної піраміди.
-

Контрольна робота № 4

Тема. *Об'єми многогранників*

- 1.° Основою прямої призми є прямокутник, одна із сторін якого дорівнює 15 см, а діагональ — 17 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 10 см.
 - 2.° Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.
 - 3.° Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трикутника, дорівнює d і утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.
 - 4.° Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом 30° при основі і бічною стороною 12 см. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди.
 - 5.°° Основою піраміди є ромб з гострим кутом α і більшою діагоналлю d . Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом γ . Знайдіть об'єм піраміди.
-

Контрольна робота № 5**Тема. Об'єми та площі поверхонь тіл обертання**

- 1.° Об'єм кулі дорівнює $36\pi \text{ см}^3$. Знайдіть діаметр кулі.
 - 2.° Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а його висота — 8 см. Знайдіть об'єм і площу бічної поверхні конуса.
 - 3.° Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 6 см і утворює з площиною нижньої основи кут 45° . Знайдіть об'єм і площу бічної поверхні циліндра.
 - 4.° Осьовий переріз конуса — правильний трикутник зі стороною 4 см. Знайдіть об'єм конуса.
 - 5.° У нижній основі циліндра проведено хорду завдовжки 6 см, яку видно з центра верхньої основи під кутом 60° , а з центра нижньої основи — під кутом 120° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.
 - 6.** Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S , а діагональ перерізу утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм циліндра.
-

Контрольна робота № 6

Тема. *Повторення, узагальнення та систематизація
навчального матеріалу*

- 1.° Основою прямої призми є паралелограм, сторони якого дорівнюють 4 см і 6 см, а кут між ними 60° . Діагональ бічної грані, що містить меншу сторону основи, утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу повної поверхні призми.
 - 2.° Висота циліндра дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм циліндра.
 - 3.° Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , а бічна грань утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди.
 - 4.° Дано точки $A(1; \sqrt{3}; 3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(-1; -1; 3)$ і $D(-1; 0; 3)$. Знайдіть кут між векторами \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{CD} .
 - 5.** Рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює b , а кут при основі дорівнює β , обертається навколо прямої, що містить його основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
-

Варіант 2

Контрольна робота № 1

Тема. *Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі*

- 1.° Дано точки $A(-6; 5; 3)$ і $B(4; 1; -5)$. Знайдіть координати середини відрізка AB та його довжину.
- 2.° Дано точки $M(-4; -2; 1)$, $N(3; -1; -1)$ і $K(2; 1; -3)$. Знайдіть:
- 1) координати векторів \overrightarrow{MN} і \overrightarrow{KM} ;
 - 2) модуль вектора \overrightarrow{MN} ;
 - 3) координати вектора $\overrightarrow{PF} = 3\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{KM}$.
- 3.° Чи існує паралельне перенесення, при якому образом точки $A(-1; 3; -4)$ є точка $A_1(4; 5; -7)$, а образом точки $B(6; -4; 5)$ — точка $B_1(11; -2; 8)$?
- 4.° Точки $A(2; -4; 1)$, $B(-6; 2; 3)$ і $D(4; 0; -1)$ — вершини паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини C паралелограма і координати точки перетину його діагоналей.
- 5.° Дано вектори $\overrightarrow{m}(1; -4; -3)$ і $\overrightarrow{n}(5; p; -15)$. При якому значенні p вектори \overrightarrow{m} і \overrightarrow{n} :
- 1) колінеарні;
 - 2) перпендикулярні?
- 6.** Дано вектори \overrightarrow{a} і \overrightarrow{b} такі, що $|\overrightarrow{a}| = 3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, а кут між векторами \overrightarrow{a} і \overrightarrow{b} дорівнює 45° . Знайдіть $|3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}|$.
-

Контрольна робота № 2

Тема. *Многогранники*

- 1.° Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а основа — 16 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.
 - 2.° Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 24 см, а бічне ребро — 26 см. Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди.
 - 3.° Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює d і утворює з діагоналлю бічної грані, яка виходить з тієї ж вершини, кут β . Знайдіть площу повної поверхні призми.
 - 4.° Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом β при основі. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють φ . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
 - 5.°° Основою піраміди є рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 4 см. Бічні грані піраміди, що містять катети трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя грань утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.
-

Контрольна робота № 3**Тема. Тіла обертання**

- 1.° Висота циліндра дорівнює 8 см, а діагональ його осьового перерізу утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть радіус основи циліндра.
 - 2.° Висота конуса дорівнює 6 см, а твірна — 10 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.
 - 3.° Радіус кулі дорівнює 17 см. Знайдіть площу перерізу кулі площиною, яка віддалена на 15 см від центра кулі.
 - 4.° У нижній основі циліндра проведено хорду завдовжки 8 см, яка знаходиться на відстані 3 см від центра цієї основи. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо його висота дорівнює 6 см.
 - 5.° Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює R , а твірна утворює з площиною основи кут β .
 - 6.°° Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом α при основі. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β . Знайдіть твірну конуса, описаного навколо даної піраміди.
-

Контрольна робота № 4

Тема. *Об'єми многогранників*

- 1.° Основою прямої призми є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 13 см, а один з катетів — 12 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 5 см.
 - 2.° Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 9 см.
 - 3.° Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом β при вершині. Діагональ бічної грані, яка містить бічну сторону трикутника, утворює з площиною основи кут φ . Знайдіть об'єм призми.
 - 4.° Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 12 см і кутом 120° . Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди.
 - 5.** Основою піраміди є ромб з гострим кутом β і меншою діагоналлю d . Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α . Знайдіть об'єм піраміди.
-

Контрольна робота № 5**Тема. Об'єми та площі поверхонь тіл обертання**

- 1.° Площа поверхні кулі дорівнює 144π см². Знайдіть діаметр кулі.
 - 2.° Висота конуса дорівнює 5 см, а радіус основи — 12 см. Знайдіть об'єм і площу бічної поверхні конуса.
 - 3.° Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см і утворює з площиною нижньої основи кут 45° . Знайдіть об'єм і площу бічної поверхні циліндра.
 - 4.° Осьовий переріз конуса — рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 6 см. Знайдіть об'єм конуса.
 - 5.° У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра нижньої основи під кутом 90° , а з центра верхньої основи — під кутом 60° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 8 см.
 - 6.** Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S , а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут α . Знайдіть об'єм циліндра.
-

Контрольна робота № 6

Тема. Повторення, узагальнення та систематизація
навчального матеріалу

- 1.° Основою прямої призми є ромб з гострим кутом 30° . Діагональ бічної грані дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу повної поверхні призми.
 - 2.° Радіус основи циліндра дорівнює $2\sqrt{2}$ см, а діагональ осового перерізу утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм циліндра.
 - 3.° Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює m і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди.
 - 4.° Дано точки $M(3; -2; \sqrt{2})$, $N(2; -1; 0)$, $K(-1; -5; 4)$ і $P(0; -4; 4)$. Знайдіть кут між векторами \overrightarrow{MN} і \overrightarrow{KP} .
 - 5.°° Рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині обертається навколо прямої, що містить його основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.
-

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

Варіант 1

8. $\sqrt{70}$ см. 11. (0; 4; 4). Вказівка. Шукана точка — середина відрізка PK , де P — середина відрізка MK . 12. $D(4; -3; 0)$. 14. (3; -1; 4), (5; 3; -6), (-1; 5; -2). 17. $y = -3$ або $y = -7$. 18. (0; -3; 5; 0). 19. $A(0; 0; -10)$, $B(-24; 20; 0)$, $AB = 2\sqrt{269}$. 21. Вказівка. Порівняйте довжини відрізків AB , BC і AC . 34. $\sqrt{47}$ або $-\sqrt{47}$. 35. $\vec{p}(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ або $\vec{p}(-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$. 37. $C(0,5; 1; -1)$. 38. $\vec{a}(5; 1; 2)$, $\vec{b}(-1; -2; 3)$. 40. $z = 5$, $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = 6$. 45. $y = -2$, $z = -12$. 46. $\vec{b}(9; -6; -18)$. 49. Вказівка. Перевірте колінеарність векторів \vec{AB} і \vec{BC} . 53. $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$. 54. $\vec{BM} = 0,5\vec{SA} + 0,5\vec{SC} - \vec{SB}$. 55. $\vec{KD} = \vec{KA} - \vec{KB} + \vec{KC}$. 56. $\frac{1}{3}\vec{PA} + \frac{5}{12}\vec{PB} - \frac{3}{4}\vec{PC}$. Вказівка. $\vec{FE} = \vec{FB} + \vec{BE} = \frac{3}{4}\vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{BA}$. 63. 1) $x > 7$; 2) $x = 7$; 3) $x < 7$. 64. Вказівка. Знайдіть кути між вектором \vec{AB} і векторами $\vec{e}_1(1; 0; 0)$, $\vec{e}_2(0; 1; 0)$, $\vec{e}_3(0; 0; 1)$. 66. $\vec{n}(-10; 6; -8)$. 69. 1) $\sqrt{19}$. Вказівка. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}$. 70. $-0,1\sqrt{2}$. 71. $k = -\frac{7}{26}$. 72. Вказівка. Доведіть, що $AB \perp BC$ і $AB \perp BD$. 73. $4x + 3y + z - 16 = 0$. Вказівка. $\vec{AB} \cdot \vec{MK} = 0$. 79. 120° . 80. 3 см. 81. 30° . 82. $\sqrt{61}$ см. 83. 30° . Вказівка. Проведіть $EF \perp DC$ і $EK \perp AB$. Розгляньте $\triangle EFK$. 84. 30° . 85. 8 см. 86. 60° . 87. $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$. 88. $2\sqrt{91}$ см. Вказівка. Проведіть через точку A площину, перпендикулярну до ребра двогранного кута (рис. 29). З $\triangle ABE$: $AE = 16$ см. З $\triangle CDE$: $CD = 9\sqrt{3}$ см. 91. $\sqrt{58}$ см. Вказівка. Нехай a , b і c — відстані від точки A до граней кута. Тоді $a^2 + b^2 = 16$, $b^2 + c^2 = 64$, $a^2 + c^2 = 36$. Додавши ці рівності і поділивши результат на 2, отримаємо $a^2 + b^2 + c^2 = 58$. 92. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

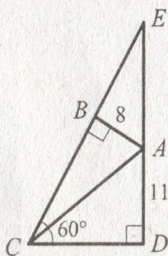


Рис. 29

93. $\arccos \frac{1}{3}$. 98. Ні. *Вказівка*. Кількість ребер будь-якої призми кратна числу 3. 99. 9 см. 100. $4\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{13}$ см. 102. 45° , 35° . 104. $4\sqrt{2}$ см, 45° . 106. $16\sqrt{3}$ см². *Вказівка*. Скористайтесь теоремою про площу ортогональної проекції многокутника. 107. $8\sqrt{3}$ см². *Вказівка*. Шуканий переріз — трикутник, висота якого дорівнює половині діагоналі призми. 111. $2m^2 \sin 2\alpha$. 112. 108 см². 114. 3 см. 117. 320 см². 118. $4\sqrt{3}S \operatorname{ctg} \alpha$.

119. $3a^2 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$. 120. $\frac{d^2 \sin 2\alpha}{2 \cos^2 \beta}$. 121. 24 см². 123. $64\sqrt{3}$ см². *Вказівка*.

Доведіть, що чотирикутник BB_1C_1C — прямокутник. 126. 72 см².

127. $64(\sqrt{2} + 1)$ см². *Вказівка*. Доведіть, що одна з бічних граней

призми — квадрат. 128. 10 см. 132. 6 см, 10 см, 8 см. 133. $2d^2 \sin \alpha \times$

$\times (\sin \beta + \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta})$. 135. 192 см². 136. 20 см². 137. $2\sqrt{3}$ см.

Вказівка. Оскільки бічне ребро утворює рівні кути зі сторонами основи, то його проекція на площину нижньої основи лежить на бісектрисі кута основи. 138. 4,5 см. 140. Ні. *Вказівка*. Кількість ребер будь-якої піраміди є парним числом. 142. Ні. 150. 162 см². 151. 0,5.

Вказівка. $S_{\text{осн}} = S_{\text{б}} \cdot \cos 60^\circ$. 154. $36\sqrt{7}$ см². 155. $(12 + 4\sqrt{3})$ см².

159. $9\sqrt{39}$ см². 160. $3m^2 \sqrt{3} \cos \alpha$. 161. $6R^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 162. $\frac{b\sqrt{2}}{\sin \alpha}$,

$\frac{2b}{\sin 2\alpha}$. 163. 1) $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$; 2) 60° ; 3) $2 \operatorname{arctg} \sqrt{2}$. 164. 1) $\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right)$;

2) $2 \operatorname{arctg} (\sqrt{3} \cos \alpha)$; 3) $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\sqrt{3}}$. 165. $\frac{a^2}{4 \cos \alpha}$. 166. $12\sqrt{7}$ см².

167. Гострокутний. 169. $(40 + 24\sqrt{2})$ см². 170. $2\sqrt{3}$ см. 171. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см.

172. $8\sqrt{6}$ см². 173. $\frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha \cos^2 \beta}{\cos \beta}$. 174. $\frac{r^2 \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\cos \beta}$. 175. $72\sqrt{2}$ см².

177. 192 см^2 . 179. $48\sqrt{3} \text{ см}^2$. 180. $0,5a^2(6 + \sqrt{7})$. Вказівка. Нехай $SAB CDEF$ — дана піраміда (рис. 30), $SB \perp \text{пл. } ABC$. $S_{SAB} = S_{SBC} = 0,5a^2$. $BF = a\sqrt{3}$, $SF = 2a$, $\angle SFE = 90^\circ$. $S_{SFE} = S_{SDE} = a^2$.

Проведемо $SK \perp AF$. $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$SK = \frac{a\sqrt{7}}{2}. S_{SAF} = S_{SCD} = \frac{\sqrt{7}}{4} a^2.$$

$$181. 0,5h^2 \left(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sin \alpha} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \beta} \right).$$

$$182. 8(3\sqrt{3} + 4) \text{ см}^2. 183. (120 + 16\sqrt{3} + 4\sqrt{273}) \text{ см}^2. 185. (100 + 56\sqrt{6}) \text{ см}^2.$$

$$187. \sqrt{6} \text{ см}. 189. 5\sqrt{61} \text{ см}^2. 194. 2d^2.$$

$$195. 2\sqrt{3}:1. 201. \frac{2}{3}Q\sqrt{3}. 203. \frac{Q\sqrt{3}}{2}.$$

204. 17 см^2 . 205. 8 см . 206. $2\operatorname{arccctg} \pi$. Вказівка. Сторони розгортки дорівнюють $2\pi R$ і H , звідки $H = 2\pi R$. 207. $\sqrt{d^2 + m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$.

$$208. \sqrt{S \operatorname{tg} \alpha}, \frac{\sqrt{S \operatorname{ctg} \alpha}}{2 \sin \frac{\beta}{2}}. 209. \frac{2d^2 \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{4 \operatorname{ctg}^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}. 210. \text{Вказівка. Через}$$

точку A проведіть пряму m , паралельну MM_1 . Вона перетинає нижню основу циліндра в точці A_1 ($AA_1 = MM_1$). K — точка перетину прямих A_1B і MN . Шукана точка — точка перетину прямих AB і KK_1 ($KK_1 \parallel MM_1$). 214. Так. 215. Ні. Вказівка. Порівняйте суми протилежних сторін трапеції. 216. $3:4$. Вказівка. Відношення площ бічних поверхонь призм дорівнює відношенню периметрів основ призм. Виразіть сторону основи кожної з призм через радіус основи циліндра. 217. $2(\sqrt{2} - 1) \text{ см}$. 219. $\frac{3}{2}S\sqrt{3}$. 220. $16R^2 \operatorname{tg} \alpha$. 221. $RH\sqrt{3}$.

$$222. 16R^2 \sin \alpha \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}. 230. \pi Q \operatorname{ctg} \alpha. 231. 30^\circ. 232. \frac{m \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$233. 2\sqrt{2} \text{ см}. 234. \frac{h^2 \sin^2 \varphi}{2 \cos^2 \alpha}. 238. 16 \text{ см}^2. 239. 108 \text{ см}^2. 240. 2\sqrt{21} \text{ см}.$$

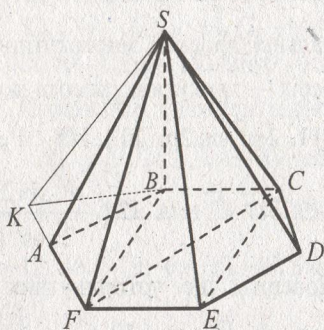


Рис. 30

241. 252 см^2 . 242. *Вказівка*. Продовжте дві твірні до перетину (точка S). Нехай промінь SB перетинає коло нижньої основи у точці B_1 . Через точку B проведіть пряму, паралельну прямій B_1A . Шукана точка — точка перетину прямої BA і лінії перетину площин BB_1A і

$$MM_1N_1. 245. 24 \text{ см}^2. 246. 160 \text{ см}^2. 247. 5\sqrt{3} \text{ см}^2. 248. \frac{Q \operatorname{tg} \beta}{\sin 2\alpha}. 253. \sqrt{\frac{Q}{2\pi}}.$$

$$254. 16 : 25. 258. 5 \text{ см}. 259. 8 \text{ см}. 260. 24\pi \text{ см}. 265. 512\sqrt{2} \text{ см}^3.$$

$$268. 96 \text{ см}^3. 269. a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta. 271. ab^2 \operatorname{tg} \alpha. 272. \sqrt{MNS \sin \alpha}.$$

Вказівка. Нехай сторони основи, які належать граням з площинами M і N , дорівнюють a і b відповідно. Тоді $ab \sin \alpha = S$, $ah = M$, $bh = N$,

$$abH^2 = MN, \quad h = \sqrt{\frac{MN}{ab}} = \sqrt{\frac{MN \sin \alpha}{S}}. 273. 540 \text{ см}^3. 274. 24\sqrt{6} \text{ см}^3.$$

$$275. 54\sqrt{2} \text{ см}^3. 276. 162 \text{ см}^3. 277. 18\sqrt{2} \text{ см}^3. 278. 32\sqrt{3} \text{ см}^3. 279. 2a^2b \times \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \beta}. 280. 6\sqrt{21} \text{ см}^3. \text{Вказівка. Проведемо висоту}$$

C_1O паралелепіпеда (рис. 31). Нехай $C_1O = h$, тоді $OK = \frac{h}{\sqrt{3}}$, $OP = h$,

$$OC = \sqrt{\frac{h^2}{3} + h^2} = \frac{2h}{\sqrt{3}}. 281. mQ. \text{Вказівка. Нехай } ABCDA_1B_1C_1D_1 \text{ — да-}$$

ний похилий паралелепіпед, $S_{BB_1D_1D} = Q$ (рис. 32). «Розріжемо» паралелепіпед по площині BB_1D_1 і сумістимо грані AA_1B_1B і DD_1C_1C . Отримаємо паралелепіпед, у якому BB_1D_1D — бічна грань, а m — відстань між гранню BB_1D_1D і паралельною їй гранню.

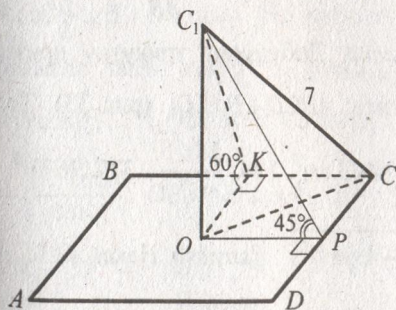


Рис. 31

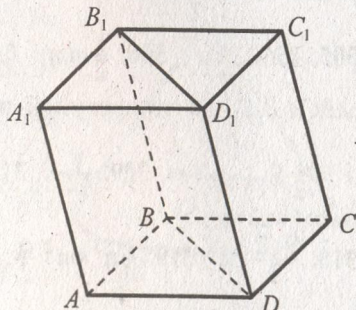


Рис. 32

$$= \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4}{3}a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = a \sqrt{\frac{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3}}. \quad 320. \frac{8}{3}a^3 \times$$

$$\times \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}. \quad 321. \frac{4h^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \cos \alpha}. \quad 322. \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ см}^3. \quad 324. 84\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

$$325. \frac{1}{24}a^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{tg} \beta. \quad 326. \frac{1}{6}a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta. \quad 329. \frac{1}{6}a^2 \sin \alpha \times$$

$$\times \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi. \quad 330. \frac{1}{6}a^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \beta. \quad 333. \frac{1}{6}a^3 \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad 334. \frac{1}{12}a^3 \times$$

$$\times \sin^2 2\alpha \operatorname{tg} \beta. \quad 338. 25\frac{1}{3} \text{ см}^3. \quad 339. 87,5 \text{ см}^3. \text{ Вказівка. Якщо } R_1 \text{ і } R_2 —$$

радіуси кіл, описаних навколо більшої та меншої основ зрізаної піраміди відповідно, H — її висота, то $H = (R_1 - R_2) \operatorname{tg} 45^\circ$.

340. $784\sqrt{3} \text{ см}^3$. Вказівка. Якщо r_1 і r_2 — радіуси кіл, вписаних у більшу та меншу основи зрізаної піраміди відповідно, H — її висота, то $H = (r_1 - r_2) \operatorname{tg} 60^\circ$. 341. $224\sqrt{3} \text{ см}^3$. 342. $63\sqrt{2} \text{ см}^3$. 346. $\frac{117V}{125}$.

$$347. 1 : 7 : 19. \quad 353. \frac{2V}{\pi S}, \frac{\pi S^2}{4V}. \quad 354. \frac{m^3}{4\pi}. \quad 355. 216\pi \text{ см}^3. \quad 356. 288\pi \text{ см}^3.$$

$$359. \frac{\pi P^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{32 \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^3}. \quad 360. 2\sqrt[3]{\frac{V^2 \operatorname{tg} \varphi}{\pi^2}}. \quad 364. 768\sqrt{3} \text{ см}^3. \quad 367. \sqrt{3}.$$

$$368. 8\pi \text{ см}^3. \quad 369. 27 : 98. \quad 370. \frac{\pi a^3 \sqrt{9 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{54 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad 371. \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{2S \cos \beta}{\sin \alpha}\right)^{\frac{2}{3}} \times$$

$\times \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$. Вказівка. На рисунку 35 зо-

бражено даний конус, $S_{OAB} = S_{SAB} \cos \beta =$

$$= S \cos \beta, \quad \frac{1}{2}OB^2 \sin \alpha = S \cos \beta, \quad OB =$$

$$= \sqrt{\frac{2S \cos \beta}{\sin \alpha}}, \quad OC = OB \cos \frac{\alpha}{2}, \quad SO = OC \operatorname{tg} \beta.$$

$$374. \frac{\pi}{3}(R^3 - r^3) \operatorname{tg} \alpha. \quad 375. \frac{448\pi\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3.$$

$$376. \frac{7}{8}V. \quad 377. 474\pi \text{ см}^3. \quad 382. 3\sqrt[3]{4} \text{ см}.$$

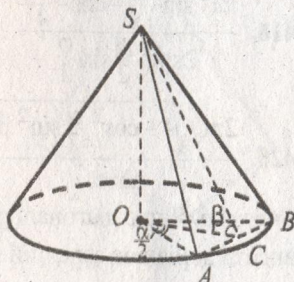


Рис. 35

$$383. \quad 8\pi \text{ см.} \quad 384. \quad \frac{4S\sqrt{\pi S}}{3\pi \cos^3 \alpha} \quad 385. \quad \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a^2 b^2 + 4m^2(a^2 + b^2)}{4(a^2 + b^2)} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$387. \quad \frac{416\pi}{3} \text{ см}^3. \quad 389. \quad 576\pi(2 - \sqrt{2}) \text{ см}^3. \quad 392. \quad 1 : 11. \quad 395. \quad 24 \text{ см}, \quad 6 \text{ см}.$$

$$397. \quad 2 \text{ см.} \quad 398. \quad 180\pi \text{ см}^2. \quad 399. \quad \left(\frac{24}{\pi} + 16\sqrt{3} \right) \text{ см}^2. \quad 400. \quad \frac{128\pi}{3} \text{ см}^2.$$

$$401. \quad \frac{\pi m^2 \sin 2\alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}. \quad 402. \quad 544\pi\sqrt{3} \text{ см}^2. \quad 403. \quad 2(1 + \operatorname{tg} \alpha) \sqrt[3]{\pi V^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

404. $2\pi\sqrt{3} \text{ см}^2$. *Вказівка.* Прямокутники AA_1B_1B і AA_1C_1C — дані перерізи, $\angle BAC = 30^\circ$ (рис. 36). Нехай $AB = a$, $AC = b$, $AA_1 = H$, тоді $aH = 3 \text{ см}^2$, $bH = 2\sqrt{3} \text{ см}^2$, $BC = \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}}$, радіус основи циліндра $R = \frac{BC}{2\sin \angle BAC} = BC$, площа бічної поверхні циліндра

$$S = 2\pi RH = 2\pi H \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}} = 2\pi \sqrt{a^2 H^2 + b^2 H^2 - aH \cdot bH \cdot \sqrt{3}} = 2\pi \sqrt{9 + 12 - 18} = 2\pi\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

409. $96\pi \text{ см}^3$. 410. $320\pi \text{ см}^3$. 411. 60° . 412. $\pi S(1 + \sqrt{2})$. *Вказівка.* Якщо радіус основи конуса дорівнює R , то його висота також дорівнює R , звідки $R = \sqrt{S}$.

413. $9 : 16$. 414. $(\sqrt{3} + 1) : 2$. 415. $\pi S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. 416. $36\pi \text{ см}^2$. *Вказівка.* Якщо l — твірна конуса, R — радіус його основи, то $\frac{2\pi l}{3} = 2\pi R$, звідки $l = 3R$.

$$418. \quad \frac{\pi a^2 \sin \frac{\varphi + \alpha}{4} \cos \frac{\varphi - \alpha}{4}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad 419. \quad \frac{\pi H^2 \sqrt{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sin^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$420. \quad \frac{2\pi Q \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta}}{\sin \alpha}. \quad 422. \quad 54\pi \text{ см}^2. \quad 423. \quad 72\pi \text{ см}^2. \quad 424. \quad \pi m^2 \sin \alpha.$$

Вказівка. Якщо діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії. 429. $S_1 + S_2$. 432. $1008\pi \text{ см}^3$, $396\pi \text{ см}^2$.

$$433. \quad \pi b^2 \sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha). \quad 434. \quad \frac{1}{12} \pi (a - b)^2 (a + 2b) \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

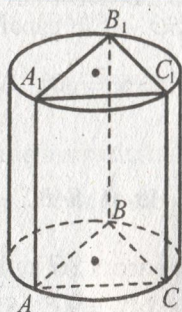


Рис. 36

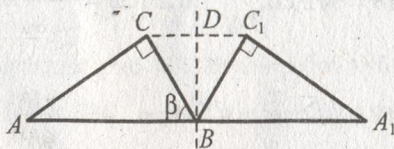


Рис. 37

435. $\frac{\pi b^2(1 + \sin\beta + \sin\beta \cos^2\beta + \cos^3\beta)}{\sin^2\beta}$. Вказівка (рис. 37). Поверхня

вказаного тіла обертання складається з бічної поверхні зрізаного конуса з осовим перерізом ACC_1A_1 , більшої основи цього зрізаного конуса та бічної поверхні конуса з осовим перерізом CBC_1 .

436. $\frac{\pi Q^2}{a}$.

437. $24\pi(3 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$. 438. $\frac{1}{12} \pi a^2 \operatorname{tg} \alpha (a \operatorname{tg} \alpha + 6b)$. 440. $\frac{\pi a^3 \sin \beta \cos^2 \beta}{4 \sin^2 \alpha}$.

441. $32\pi\sqrt{3} \text{ см}^2$. 442. $\frac{\sqrt{3}}{3} \pi a^2 \operatorname{ctg} \alpha$. 443. $8\pi \text{ см}^3$, $4\pi\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$.

445. $\frac{\pi m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \varphi}$. 446. $64\pi \text{ см}^3$. 447. $5\pi\sqrt{30} \text{ см}^3$. 448. 288 см^2 .

449. $4R^2 \sin 2\alpha (\sin \beta + \cos \beta)$. 451. $\sqrt{3}$. 452. $7\sqrt{3} \text{ см}$. 453. $2(\sqrt{3} - 1) \text{ см}$.

454. 12 см^2 . 455. $6r^3\sqrt{3}$. 456. $\frac{\pi V\sqrt{3}}{9}$.

457. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 459. 12 см . 460. $13,5 \text{ см}$. Вказівка

(рис. 38). Продовжимо висоту MO утвореної правильної піраміди $MABC$ до перетину зі сферою (точка D), $\angle MBD = 90^\circ$,

$OB^2 = MO \cdot OD$. Нехай R — радіус кулі, $MB = a$. Тоді $MD = 2R$, $OB = \frac{a}{\sqrt{3}}$,

$\frac{a^2}{3} + 324 = a^2$, $a = 9\sqrt{6} \text{ см}$. 461. 8 см .

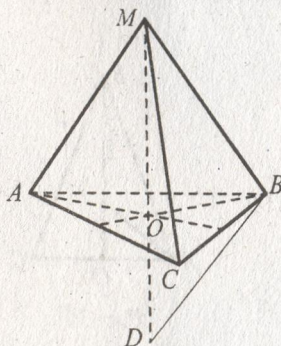


Рис. 38

Вказівка. Нехай $SABCD$ — дана піраміда, SO — її висота. Тоді

$$AB = 8\sqrt{2} \text{ см}, \quad \sin \angle ACB = \frac{AB}{2 \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \angle ASB = 60^\circ, \quad \text{звідки}$$

$$AS = 8\sqrt{2} \text{ см}, \quad SO = 8 \text{ см}. \quad 462. \frac{\pi b^6}{6h^3}. \quad \text{Вказівка. Нехай } SABC \text{ — дана}$$

піраміда, R — радіус описаної кулі. Продовжте висоту SO піраміди до перетину з поверхнею кулі (точка S_1). Тоді $\angle SAS_1 = 90^\circ$, $SS_1 = 2R$,

$$SB^2 = SS_1 \cdot SO. \quad 463. \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad 464. \frac{8r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}. \quad 465. 3 \text{ см}.$$

$$466. 4(2 - \sqrt{3}) \text{ см}. \quad 467. \frac{4}{3} \pi m^3 \cos^3 \alpha. \quad 473. 10 \text{ см}, \quad \frac{169}{8} \text{ см}.$$

$$474. a \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{a}{2 \sin \alpha}. \quad 475. 4V \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right). \quad \text{Вказівка. Розгля-$$

немо $\triangle ABC$ — осьовий переріз конуса (рис. 39), $AO = R$, $OO_1 = r$,

$$BO = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = V, \quad R = \sqrt[3]{\frac{3V \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\pi}}. \quad 3 \triangle AOO_1: \quad r =$$

$$= R \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right). \quad 477. 3\sqrt{3} \text{ см}, 3 \text{ см}, 9 \text{ см}. \quad 478. \frac{\sqrt{(R-r)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + (R+r)^2}}{2 \sin \alpha}.$$

Вказівка. Нехай трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — осьовий переріз зрізаного конуса. Тоді радіус кола, описаного навколо трапеції $ABCD$,

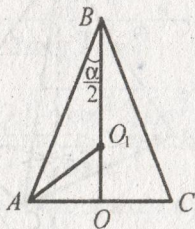


Рис. 39

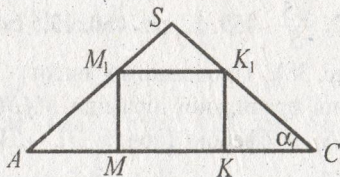


Рис. 40

дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника ABD .

$$479. \frac{2}{3} \pi R^3 \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right). \quad 480. \frac{3}{8} V. \quad 481. \frac{a^3 \operatorname{tg} \gamma}{(1 + \sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha)^3}. \text{ Вказівка.}$$

Розглянемо діагональний переріз піраміди (рис. 40). Нехай ребро куба

$$MM_1 = x, \quad \text{тоді} \quad KC = x \operatorname{ctg} \alpha, \quad MK = x\sqrt{2}, \quad a\sqrt{2} = x\sqrt{2} + 2x \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$x = \frac{a}{1 + \sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Зміст

Від авторів	3
Тематичний розподіл тренувальних вправ.....	4
Тренувальні вправи	6
Варіант 1	6
Варіант 2	48
Контрольні роботи.....	90
Варіант 1	90
Варіант 2	96
Відповіді та вказівки до тренувальних вправ.....	102

Навчальне видання

Мерзляк Аркадій Григорович, Полонський Віталій Борисович,
Рабінович Юхим Михайлович, Якір Михайло Семенович

Геометрія

11 клас

Збірник задач і контрольних робіт

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Комп'ютерне верстання *О. О. Удалова*
Коректор *Т. Є. Цента*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 7,00. Тираж 5000 прим. Зам. № 380.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

АЛГЕБРА

11
клас

Навчально-методичний комплект

Підручник

Книга
для
вчителя

Збірник
задач
і контрольних
робіт

ДЛЯ ТИХ, ХТО ПРАГНЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

**ПІДРУЧНИК ДЛЯ 11 КЛАСУ
ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ
НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ.
АКАДЕМІЧНИЙ РІВЕНЬ**



9 789664 741610

ТОВ ТО «Гімназія»

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

Тел.: (057) 719-17-26, 758-83-93, 719-46-80

факс: (057) 758-83-93

e-mail: contact@gymnasia.com.ua

