М. І. Шкіль, З. І. Слепкань, О. С. Дубинчук

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

10–11 кл.

ПІДРУЧНИК
ДЛЯ 10–11 КЛАСІВ
ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Затверджено Міністерством освіти і науки України

2-ге видання

КИЇВ
«ЗОДІАК-ЕКО»
2001

ББК 22.14я721
Ш66

Затверджено Міністерством освіти України (рішення колегії Міністерства освіти України від 25 березня 1998 р., протокол № 4/1–18)

Рецензенти:

В. П. Яковець, завідувач кафедри математики Ніжинського педагогічного інституту ім. М. Гоголя, доктор фізико-математичних наук, Н. П. Нікітенко, вчитель-методист київської середньої школи № 170

Шкіль М. І. та ін.

Ш66 Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук .– 2-ге вид.– Зодіак-ЕКО, 2001.– 656 с.

ISBN 966-7090-14-0. ББК 22.14.я721

Навчальне видання

Шкіль Микола Іванович, Слєпкань Зінаїда Іванівна, Дубинчук Олена Степанівна

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 10–11 класів
загальноосвітніх навчальних закладів

Затверджено Міністерством освіти і науки України

2-ге видання

Редактор *Н. В. Демиденко*
Художник обкладинки *В. П. Вересюк*
Художній редактор *В. П. Литвиненко*
Коректори *М. Ю. Зубченко, Л. О. Поповченко*

Підписано до друку 10.09.2001. Формат 84×108/32. Гарнітура літературна. Друк офсетний. Папір офсетний. Умов. друк. арк. 34,44. Обл.-вид. арк. 34,5. Наклад 20 000 пр. Вид. № 72. Зам. 1–565.

Видавництво «Зодіак-ЕКО».
01004, Київ-4, вул. Басейна, 1/2.

Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № 155 від 22.08.2000 р.
Головне підприємство республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига»,
03057, Київ-57, вул. Довженка, 3.

ISBN 966-7090-14-0

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

§ 1. Повторення і розширення відомостей про функції

1. Означення функції. Зростаючі, спадні, парні і непарні функції. Матеріальна єдність світу виявляється у взаємозв'язку і взаємообумовленості різних явищ і процесів, що відбуваються в природі. Розглядаючи їх, доводиться враховувати залежності одних змінних від інших. Наприклад, залежність шляху від часу, залежність кількості купленого товару на певну суму від ціни, залежність між площею круга і його радіусом. Необхідність вивчення на практиці залежностей між змінними різної природи привела до поняття функції в математиці.

Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

Функцію позначають або однією літерою латинського алфавіту f, F, або за допомогою рівності $y = f(x)$, яка символічно означає залежність між двома змінними.

Змінну x називають *незалежною* або *аргументом*, а змінну y — *залежною.*

Значенням функції називають значення залежної змінної y, якого вона набуває за деякого певного значення x.

Множина значень, яких набуває незалежна змінна x, називається *областю визначення функції.*

Множина відповідних значень залежної змінної y, яких вона набуває при всіх значеннях x з області визначення функції, називається *областю значень* або *областю зміни функції.*

П р и к л а д 1. Залежність шляху s тіла, яке рухається рівномірно, від часу t є функцією, що задається формулою

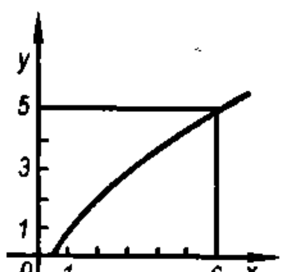
$s = s_0 + vt$, де s_0 — початковий шлях, v — швидкість, яка є сталою при рівномірному русі.

Приклад 2. Якщо учні групи, яка складається з 25 осіб, чергують протягом січня, крім тих днів, які припадають на неділю, то кожному з днів січня відповідає певний черговий. Незалежною змінною тут є дні січня, залежною — черговий. Маємо функцію, областю визначення якої є множина днів січня (без неділь), а областю зміни — множина учнів групи.

Приклад 3. Активна електрична енергія, яка витрачається в колі змінного струму за час t, є функцією часу і при сталій потужності P виражається формулою $W_а = Pt$.

Окремо означається числова функція: ***числовою функцією з областю визначення x називається залежність, при якій кожному числовому значенню x з множини X ставиться у відповідність єдине деяке число y.***

Нагадаємо основні способи задання функції: 1) за допомогою формули (приклади 1 і 3); 2) за допомогою таблиці (наприклад, таблиці квадратів чисел, значень тригонометричних функцій та ін.); 3) за допомогою графіка (наприклад, якщо фіксувати протягом кількох років висоту дерева, яке росте, то, зобразивши по осі Ox вік дерева в роках, а по осі Oy — висоту в метрах, дістанемо графік функції) (мал. 1).



Мал. 1

Отже, графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок $M(x; f(x))$ координатної площини, абсциси яких належать області визначення функції, а ординати є відповідними значеннями цієї функції.

Не завжди формула задає функцію.

Наприклад, формула $I = \dfrac{U}{R}$ (закон Ома) задає пряму пропорційність (функцію від U) при сталому опорі в колі і змінній напрузі і задає обернену пропорційність (функцію від R) при сталій напрузі і змінному опорі. Проте, якщо з цієї формули виразити R, то

$R = \frac{U}{I}$. Остання формула не задає функцію. Справді, R — величина стала для даного провідника і не залежить ні від напруги, ні від сили струму. Якщо напругу збільшити, наприклад, у 2 рази, то в 2 рази збільшиться і сила струму, а відношення напруги до сили струму не зміниться. Опір R є функцією (прямою пропорційністю $y = kx$) довжини провідника при сталій площі поперечного перерізу і функцією площі поперечного перерізу $\left(\text{оберненою пропорційністю } y = \frac{k}{x}\right)$ при сталій довжині провідника $R = \rho\frac{l}{S}$, де ρ — питомий опір; l — довжина провідника; S — площа його поперечного перерізу.

Інколи функцію задають різними формулами на різних множинах значень аргументу (так звані кусково-задані функції). Наприклад, якщо турист був у дорозі 9 год і перші 5 год рухався зі швидкістю 4,5 км/год, потім відпочивав 0,5 год, а решту часу йшов зі швидкістю 4 км/год, то функцію шляху s залежно від часу t запишемо у вигляді

$$s = \begin{cases} 4,5t, & \text{якщо } \ 0 \leqslant t \leqslant 5, \\ 22,5, & \text{якщо } \ 5 < t \leqslant 5,5, \\ 22,5 + 4\,(t - 5,5), & \text{якщо } \ 5,5 < t \leqslant 9. \end{cases}$$

Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 змінної x, взятих з області визначення, і таких, що $x_2 > x_1$, справджується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

Функція $y = f(x)$ називається *спадною*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто для будь-яких двох значень x_1, x_2 змінної x, взятих з області визначення, і таких, що $x_2 > x_1$, справджується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Для дослідження функцій на зростання і спадання, виходячи з їх означень, треба:

1) вибрати будь-які два значення x_1 і x_2 з області визначення функції такі, що $x_2 > x_1$;

2) скласти різницю $f(x_2) - f(x_1)$ і з'ясувати (якщо це можливо), чи буде вона додатною (від'ємною) і, користуючись означенням нерівності, переконатися, що $f(x_2) >$

$> f(x_1)$ (чи $f(x_2) < f(x_1)$), а звідси зробити висновок про зростання (спадання) функції.

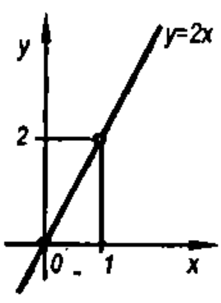
У зростаючої функції графік піднімається вгору, у спадної — опускається вниз.

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо для будь-якого значення x з області визначення значення $(-x)$ також належить області визначення і справджується рівність $f(-x) = f(x)$. Інакше кажучи, у парних функцій їх значення для протилежних значень аргументу рівні. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy.

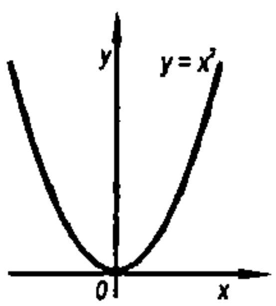
Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо для будь-якого значення x з області визначення значення $(-x)$ також належить області визначення і справджується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Тобто, у непарних функцій їх значення для протилежних значень аргументу протилежні. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклади. 1) Функція $y = 2x$ зростаюча і непарна у всій області визначення (мал. 2). Графік її симетричний відносно початку координат.



Мал. 2



Мал. 3

2) Функція $y = x^2$ зростаюча при $x \in [0; +\infty)$ і спадна при $x \in (-\infty; 0]$. Вона парна, її графік симетричний відносно осі Oy (мал. 3).

Щоб дослідити функцію на парність чи непарність, треба:

1) перевірити виконання умови: для будь-якого x з області визначення $(-x)$ також належить області визначе-

ння, тобто перевірити, чи буде область визначення даної функції множиною, симетричною відносно точки 0;

2) перевірити виконання умови: $f(-x) = f(x)$ чи $f(-x) = -f(x)$.

Якщо не виконується перша умова, то немає сенсу перевіряти другу.

2. Огляд властивостей основних видів функцій. Лінійна функція. *Лінійною називається функція, яку можна задати формулою $y=kx+b$, де x - незалежна змінна, k і b - числа.* Якщо $b = 0$, формула лінійної функції набирає вигляду $y = kx$. Ця формула, якщо $b = 0$, $k \neq 0$, задає пряму пропорційність. Графіком лінійної функції є пряма (мал. 4). Лінійна функція виражає залежності між змінними різної природи. Наприклад: а) залежність шляху s, який пройде тіло під час рівномірного руху, від часу t визначають за формулою $s = s_0 + vt$, де s_0 — початковий шлях, v — стала швидкість; б) залежність довжини металевого стержня від температури t при нагріванні задають формулою $l = l_0 + kt$, де l_0 — довжина стержня, якщо $t = 0$, k — коефіцієнт лінійного розтягу; в) вартість N телеграми з Києва в Чернівці обчислюється за формулою $N = 6x + 100$, де x — кількість слів, 6 грн. — вартість одного слова, 100 грн. — кур'єрська оплата; г) вартість проїзду в таксі можна обчислити за формулою $P = 8n + 8$, де n — кількість кілометрів (відстань), що проїхав пасажир, 8 грн. — вартість проїзду одного кілометра, 8 грн. — сума, яка автоматично фіксується на лічильнику, коли пасажир сідає в таксі (ціни умовні).

Нагадаємо властивості лінійної функції.

1) Областю визначення лінійної функції, якщо вона задана формулою $y = kx + b$ без вказівки на характер залежності між змінними x і y, є множина всіх дійсних чисел.

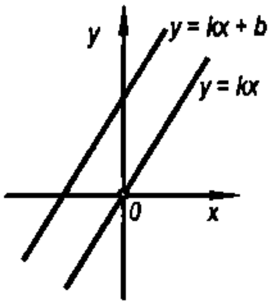
2) Зростання чи спадання функції залежить від знака коефіцієнта k. Якщо $k > 0$, функція зростає. Доведемо це, користуючись означенням зростаючої функції. Справді, нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in R$, $x_2 \in R$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - kx_1 - b = k(x_2 - x_1) > 0$, оскільки $k > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$ за умовою вибору k, x_2 і x_1. Тому $f(x_2) > f(x_1)$.

Якщо $k < 0$, лінійна функція спадна. Доведіть.

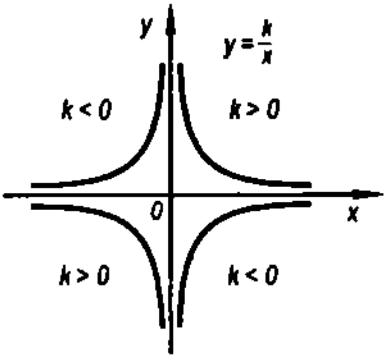
3) Якщо $k \neq 0$ і $b \neq 0$ лінійна функція не є ні парною, ні непарною. Справді, хоча для будь-якого $x \in R$ і $-x \in R$ (область визначення є множиною, симетричною відносно точки 0), проте $f(-x) = -kx + b \neq f(x)$ і $f(-x) = -kx + b \neq -f(x)$.

Якщо $k \neq 0$ і $b = 0$ лінійна функція є непарною, бо $f(-x) = -kx = -f(x)$. Графіком її за цієї умови є пряма, що проходить через початок координат. Вона симетрична відносно початку координат.

Якщо $k = 0$ і b – довільне, лінійна функція парна, бо $f(-x) = b = f(x)$. Графік її – пряма, що паралельна осі Ox (або збігається з нею) і тому симетрична відносно осі Oy.



Мал. 4



Мал. 5

Ф у н к ц і я $y = \dfrac{k}{x}$. Ця функція виражає обернено пропорційну залежність.

Оберненою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою $y = \dfrac{k}{x}$, *де x — незалежна змінна і число* $k \neq 0$. Графіком функції $y = \dfrac{k}{x}$ є гіпербола, яка складається з двох віток. Гіпербола розміщується в I і III чвертях, якщо $k > 0$ і в II та IV чвертях, якщо $k < 0$ (мал. 5).

Функція $y = \dfrac{k}{x}$ виражає залежності між різними змінними. Наприклад: а) залежність кількості купленого товару на задану суму грошей від ціни товару; б) залежність сили струму від опору провідника при сталій напрузі $I = \dfrac{U}{R}$

(закон Ома); в) залежність між тиском газу і об'ємом, який він заповнює, $p = \frac{k}{V}$ (закон Бойля – Маріотта), де k — стала; г) залежність часу від швидкості руху $t = \frac{s}{v}$, де s — шлях, та ін.

Нагадаємо властивості функції $y = \frac{k}{x}$.

1) Областю визначення і областю зміни функції є всі дійсні числа, за винятком нуля, бо $x \neq 0$ і $y \neq 0$.

2) Якщо $k > 0$, функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на множинах $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Доведемо, наприклад, якщо $k > 0$ і $x \in$ $\in (-\infty; 0)$, то функція спадає.

Справді, нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in (-\infty; 0)$ і $x_2 \in (-\infty; 0)$, $x_2 > x_1$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0$, бо $x_1 \cdot x_2 > 0$ як добуток двох від'ємних чисел; $k > 0$, $x_1 -$ $- x_2 < 0$ за умовою вибору k, x_1 і x_2. Тому $f(x_2) < f(x_1)$. Так само доводимо, якщо $k > 0$ і $x \in (0; +\infty)$, функція спадає, а коли $k < 0$ — зростає, якщо $x \in (-\infty; 0)$ і $x \in (0; +\infty)$.

Доведіть самостійно, що коли $k < 0$, то $y = \frac{k}{x}$ зростає при $x \in (-\infty; 0)$ і $x \in (0; +\infty)$.

3) Функція $y = \frac{k}{x}$ непарна. Справді, областю визначення її є множина, симетрична відносно точки 0, і $f(-x) =$ $= \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$.

Графік функції $y = \frac{k}{x}$ симетричний відносно початку координат.

Ф у н к ц і я $y = x^2$. Властивості цієї функції випливають із властивостей степеня з парним натуральним показником.

1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x \in R$. Областю її зміни є множина невід'ємних чисел, тобто $y \in (0; +\infty)$.

2) На множині $(-\infty; 0]$ функція спадає, а на $[0; +\infty)$ — зростає.

Доведемо, якщо $x \in (-\infty; 0]$, то функція спадає. Нехай

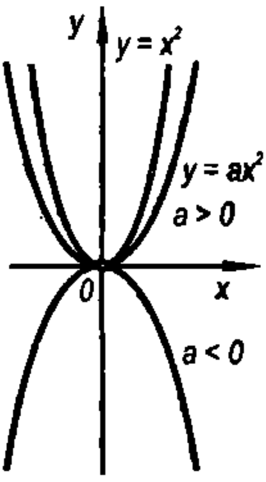
$x_2 > x_1$, де $x_1 \in (-\infty; 0]$ і $x_2 \in (-\infty; 0]$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1) < 0$, бо $x_2 - x_1 > 0$ за умовою, $x_2 + x_1 < 0$ як сума двох чисел, з яких одне від'ємне, а друге недодатне. Тому $f(x_2) < f(x_1)$.

Доведіть самостійно: якщо $x \in [0; +\infty)$, то функція $y = x^2$ зростає.

3) Функція парна, оскільки область її визначення — множина, симетрична відносно 0, і $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Графік функції — парабола, симетрична відносно осі Oy (мал. 6).

4) Оскільки при $x = 0$ і $y = 0$, то графік проходить через початок координат.



Мал. 6

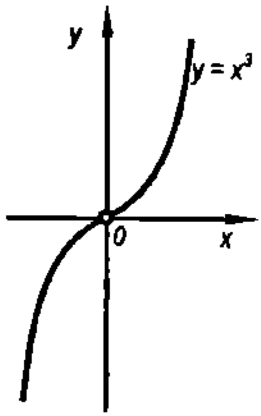
За допомогою функції $y = x^2$ виражають залежність площі квадрата від довжини його сторін. На практиці у фізиці, техніці частіше застосовують функцію $y = ax^2$, де a — число. За допомогою цієї функції виражають, наприклад: а) залежність площі круга від радіуса $S = \pi r^2$; б) залежність між кінетичною енергією тіла і його швидкістю $W_k = \frac{mv^2}{2}$; в) залежність шляху вільно падаючого тіла від часу $H = \frac{gt^2}{2}$ (якщо опором середовища нехтувати).

Графіком функції $y = ax^2$ є також парабола, симетрична відносно осі Oy. Якщо $a > 0$, вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$ — вниз.

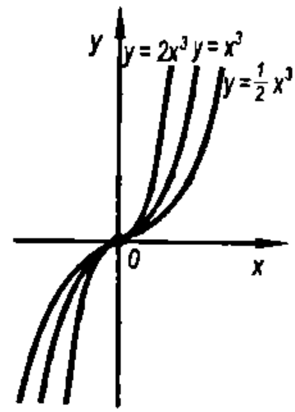
Форму параболи $y = ax^2$ мають: ланцюг, що підтримує висячий міст за допомогою великої кількості стержнів (якщо вагою ланцюга нехтувати); траєкторія снаряду, що летить; осьовий переріз автомобільної фари; осьовий переріз вільної поверхні рідини при обертанні посудини з рідиною навколо її осі симетрії.

Ф у н к ц і я $y = x^3$. Ця функція виражає, наприклад, залежність об'єму куба від довжини його сторони. Нагадаємо властивості цієї функції, що випливають з властивостей степеня з непарним натуральним показником.

1) Області визначення і зміни функції — множина всіх дійсних чисел.



Мал. 7



Мал. 8

2) Функція зростаюча на всій області визначення. Справді, нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in R$ і $x_2 \in R$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1) \cdot (x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) = (x_2 - x_1)\left(\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right) > 0$, оскільки $x_2 - x_1 > 0$ за умовою вибору x_1 і x_2, сума $\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 > 0$ за будь-яких x_1 і x_2. Тому $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція $y = x^3$ — зростаюча.

3) Функція $y = x^3$ непарна, оскільки область її визначення — симетрична відносно точки 0 множина і $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Графіком цієї функції є кубічна парабола, яка симетрична відносно початку координат (мал. 7).

4) Якщо $x = 0$, то і $y = 0$, тобто графік проходить через початок координат.

На практиці використовують також функцію $y = ax^3$, яка має ті самі властивості, хоча коефіцієнт a дещо впливає на форму графіка (мал. 8). Графік $y = ax^3$ використовують проектувальники залізниць та автомобільних шляхів, якщо треба здійснити плавний перехід від прямолінійних до криволінійних ділянок шляху.

Ф у н к ц і я $y = \sqrt{x}$. За допомогою цієї функції виражається, наприклад, залежність сторони квадрата від його площі S.

Властивості функції $y = \sqrt{x}$ випливають із властивостей арифметичного кореня.

1) Області визначення і зміни функції — множина невід'ємних чисел, тобто $x \in [0; +\infty)$ і $y \in [0; +\infty)$.

2) Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на всій області визначення. Дійсно, якщо $x_2 > x_1$, де $x_1 \in [0; +\infty)$ і $x_2 \in [0; +\infty)$, то $f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0$, оскільки $x_2 - x_1 > 0$ за умовою вибору x_1, x_2 і $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > 0$ як сума додатного і невід'ємного чисел. Отже, $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція $y = \sqrt{x}$ — зростаюча.

3) Функція $y = \sqrt{x}$ не належить ні до парних, ні до непарних функцій, оскільки її область визначення — множина, не симетрична відносно початку координат.

4) Якщо $x = 0$, то і $y = 0$, тобто графік проходить через початок координат, а оскільки x і y — невід'ємні, то він розміщений у I чверті (мал. 9). Графіком є розміщена у I чверті вітка параболи, симетрична вітці параболи $y = x^2$ $(x \geq 0)$ відносно прямої $y = x$.

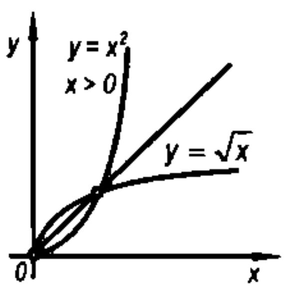
На практиці використовують функцію $y = a\sqrt{x}$. Зокрема, за допомогою цієї функції виражають залежність періоду T малих коливань математичного маятника від його довжини l: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де g — прискорення сили тяжіння.

К в а д р а т и ч н а ф у н к ц і я. Квадратичною називається функція, яка задається формулою $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c — дійсні числа, причому $a \neq 0$.

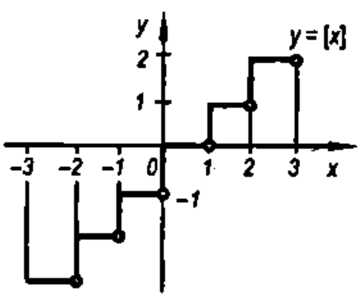
За допомогою квадратичної функції виражають залежність положення тіла у будь-який момент часу при прямолінійному рівноприскореному русі: $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$, де x_0 – початкова координата, v_{0x} – проекція початкової швидкості на вісь Ox, a_x – проекція прискорення.

Графіком квадратичної функції є парабола, вершина якої міститься у точці M_0 з координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Це можна показати, якщо подати формулу $y = ax^2 + bx + c$ так:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) =$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a^2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\Big).$$



Мал. 9



Мал. 10

Звідси випливає, що графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ можна дістати з графіка функції $y = ax^2$ такими геометричними перетвореннями: послідовне паралельне перенесення параболи $y = ax^2$ на $-\frac{b}{2a}$ одиниць вліво чи вправо по осі Ox залежно від того, яким буде знак числа $-\frac{b}{2a}$, і паралельне перенесення побудованого графіка по осі Oy вгору або вниз на $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ одиниць залежно від того, яким буде знак числа $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Ф у н к ц і ї $y = [x]$ і $y = \{x\}$. Кожне дробове число можна подати у вигляді суми двох доданків, один з яких —

ціле число, а другий — невід'ємний правильний дріб. Наприклад: $10,7 = 10 + 0,7$; $\sqrt{2} \approx 1 + 0,41$; $0,5 = 0 + 0,5$; $-2,25 = -3 + 0,75$. Отже, за цілу частину числа x візьмемо найбільше ціле число, яке не перевищує x. Цілу частину числа x позначають символом $[x]$, де $x = n + q$, $n \in Z$, а $0 \leqslant q < 1$. Очевидно, що $[x] = n$.

При будь-якому x справджується подвійна нерівність

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

Формула $y = [x]$, де $[x]$ — ціла частина x, задає функцію, областю визначення якої є множина всіх дійсних чисел.

Побудуємо графік функції $y = [x]$. З формул $x = n + q$, $n \in Z$, $0 \leqslant q < 1$, $[x] = n$ випливає, що коли $0 \leqslant x < 1$, то $y = 0$; якщо $1 \leqslant x < 2$, то $y = 1$; якщо $2 \leqslant x < 3$, то $y = 2$, якщо $-1 \leqslant x < 0$, то $y = -1$ т. д. Взагалі, якщо $n \leqslant x < n + 1$, де n — ціле число, то $y = n$. Отже, на кожному з проміжків $[n; n + 1)$ значення функції y дорівнює n (мал. 10).

Графік, подібний до графіка функції $y = [x]$, дістанемо, якщо зобразимо графічно залежність між вагою вантажу і вартістю його перевезення, коли відомо, що за перевезення першої повної чи неповної тонни вантажу треба платити (умовно) 20 грн., а за кожну наступну повну чи неповну тонну — 10 грн.

Дробовою частиною числа x називається різниця між цим числом і його цілою частиною.

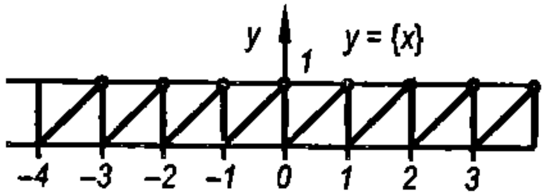
Дробову частину числа x позначають $\{x\}$. З означення випливає, що $\{x\} = x - [x]$.

Наприклад, $\{9,7\} = 9,7 - [9,7] = 9,7 - 9 = 0,7$; $\{-2,3\} = -2,3 - [-2,3] = -2,3 - (-3) = -2,3 + 3 = 0,7$.

Формулою $y = \{x\}$, або $y = x - [x]$ задається функція, областю визначення якої є множина всіх дійсних чисел.

Будуючи графік $y = \{x\}$, враховуємо, що коли $0 \leqslant x < 1$, то $[x] = 0$ і формула $y = x - [x]$ набирає вигляду $y = x$, а графіком функції $y = \{x\}$ є частина прямої $y = x$. Якщо $x = 1$, то $y = 1 - 1 = 0$, тобто відповідна точка графіка буде на осі Ox. Якщо $1 \leqslant x < 2$, то $[x] = 1$ і $y = \{x\} = x - [x] = x - 1$, тобто графіком функції на цьому проміжку буде частина прямої $y = x - 1$.

Взагалі, якщо $n \leqslant x < n+1$, де $n \in Z$, то $[x] = n$, а $y = \{x\} = x - n$, тобто на кожному проміжку $[n; n+1)$ графіком функції $y = \{x\}$ є частина прямої $y = x - n$ (мал. 11).



Мал. 11

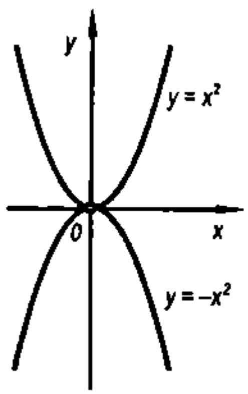
3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій. У багатьох випадках графік певної функції можна побудувати за допомогою геометричних перетворень (паралельне перенесення, симетрія відносно прямої, стиснення до осі, розтягування від осі та ін.) графіка відомої функції, через яку виражається дана.

1. Нехай дано графік функції $y = f(x)$. Треба побудувати графік функції $y = -f(x)$. Наприклад, треба побудувати графік функції $y = -x^2$, якщо відомий графік $y = x^2$. Тут $y = f(x) = x^2$, а $y = -f(x) = -x^2$. Області визначення обох функцій збігаються, аргумент x — однаковий, а значення функції y відрізняється лише знаком. Це означає, що кожній точці $M_0(x_0; y_0)$, що належить графіку $y = f(x)$, відповідає точка $M\ (x_0; -y_0)$ на графіку функції $y = -f(x)$,тобто точки шуканого графіка симетричні точкам графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Ox. Отже, графік функції $y = -f(x)$ можна дістати з графіка відомої функції $y = f(x)$ за допомогою відображення симетрії відносно осі Ox (мал. 12).

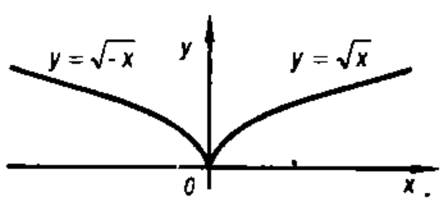
2. Нехай відомий графік функції $y = f(x)$, а треба побудувати графік функції $y = f(-x)$. Наприклад, відомий графік $y = \sqrt{x}$. Треба побудувати графік функції $y = \sqrt{-x}$. Аргументи функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ відрізняються знаками. Нехай точка $M_0(x_0; y_0) \in f(x)$. Знайдемо координати відповідної точки $M(x; y) \in f(-x)$. Введемо підстановку $x_0 = -x$, звідси $x = -x_0$, $y = f(-x) = f(x_0) = y_0$. Отже, точка M має протилежну абсцису і ту саму ординату, тобто $M(-x_0; y_0)$. Це означає, що графік функції $y = f(-x)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою відображення симетрії його відносно осі Oy (мал. 13).

3. Побудувати графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$. Наприклад, побудувати графік функції $y = \frac{2}{|x|}$, якщо відомий графік функції $y = \frac{2}{x}$. Майже в усіх вправах, пов'язаних з модулем, доводиться звільнятися від модуля числа, користуючись його означенням:

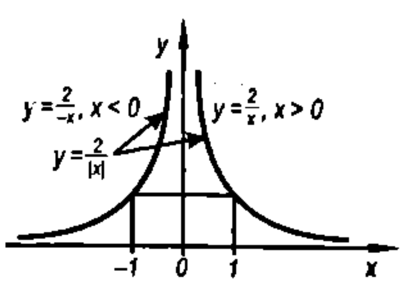
$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо} \quad x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$$



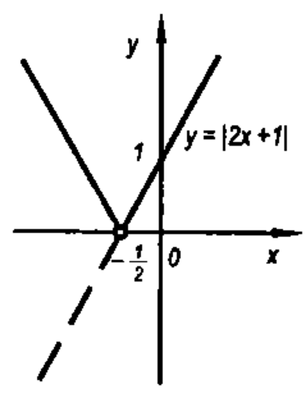
Мал. 12



Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15

Отже, $f(|x|) = \dfrac{2}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{2}{x}, & \text{якщо} \quad x > 0, \\ \dfrac{2}{-x}, & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$

Звідси випливає, що графік функції $y = f(|x|)$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, якщо $x \geqslant 0$, і з графіком $y = f(-x)$, якщо $x < 0$.

Для побудови графіка функції $y = \dfrac{2}{|x|}$ досить побудувати графік функції $y = \dfrac{2}{x}$, якщо $x > 0$, і графік функції $y = \dfrac{2}{-x}$, якщо $x < 0$. Об'єднавши дві побудовані криві, ми дістанемо графік функції $y = \dfrac{2}{|x|}$ (мал. 14).

176048

Неважко довести, що функція $y = f(|x|)$ парна. Справді, область визначення її — множина значень x, симетричних відносно початку відліку і $f(|-x|) = f(|x|) = f(x)$.

4. Побудувати графік функції $y = |f(x)|$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$. Нехай відомий графік функції $y = 2x + 1$, побудуємо графік $y = |2x + 1|$. Врахуємо, що

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо} \quad f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{якщо} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ збігається з графіком функції $y = f(x)$ на проміжку, де $f(x) \geq 0$, і з графіком функції $y = -f(x)$ на проміжку, де $f(x) < 0$.

Отже, для побудови графіка функції $y = |2x+1|$ досить побудувати графік лінійної функції $y = 2x + 1$, а ту частину прямої, яка розміщена нижче від осі Ox, відобразити симетрично відносно осі Ox. Ламана, яка лежить вище від осі Ox, включаючи точку на цій осі, буде графіком функції $y = |2x + 1|$ (мал. 15).

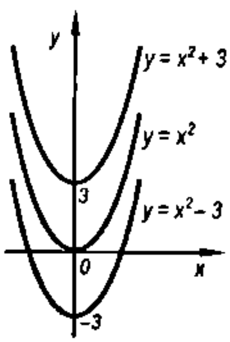
5. Побудувати графік функції $y = f(x) \pm b$, де $b > 0$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$. Області визначення обох функцій збігаються, аргументи їх однакові, а значення функцій відрізняються на b чи $-b$. Це означає, що всі точки, наприклад, графіка $y = f(x) + b$ мають ті самі

абсциси, що і відповідні точки графіка $y = f(x)$, а ординати збільшені на b. Тому шуканий графік легко дістати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення його у напрямі осі Oy на b одиниць вгору.

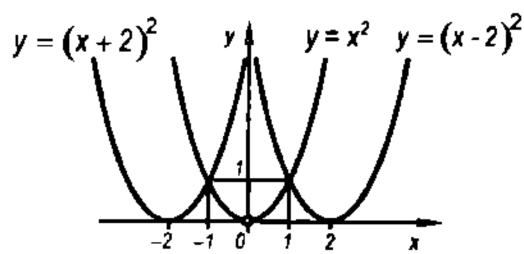
Наприклад. графіки функцій $y = x^2 \pm 3$ можна дістати з графіка функції $y = x^2$ за допомогою паралельного перенесення його на 3 одиниці вгору для $y = x^2 + 3$ і на 3 одиниці вниз для $y = x^2 - 3$ (мал. 16).

6. Відомий графік функції $y = f(x)$. Треба побудувати графік функції $y = f(x \pm a)$, де $a > 0$. Наприклад, нехай відомий графік функції $y = x^2$. Побудуємо графік функції $y = (x \pm 2)^2$.

Розглянемо випадок побудови графіка функції $y = f(x - a)$. Нехай $M_0(x_0;\ y_0) \in f(x)$. Знайдемо відповідну точку $M(x;\ y) \in f(x - a)$. Введемо підстановку: $x_0 = x - a$, звідки $x = x_0 + a$, $y = f(x - a) = f(x_0) = y_0$. Отже, абсциса точки $M(x_0 + a;\ y_0)$ на a одиниць більша від абсциси точки $M_0(x_0;\ y_0)$, а ордината та сама.



Мал. 16



Мал. 17

Це означає, що будь-яка точка графіка функції $y = f(x)$ переходить у відповідну точку графіка функції $y = f(x - a)$ за допомогою паралельного перенесення її вправо у напрямі осі Ox на a одиниць.

Обгрунтуйте самостійно побудову графіка $y = f(x+a)$.

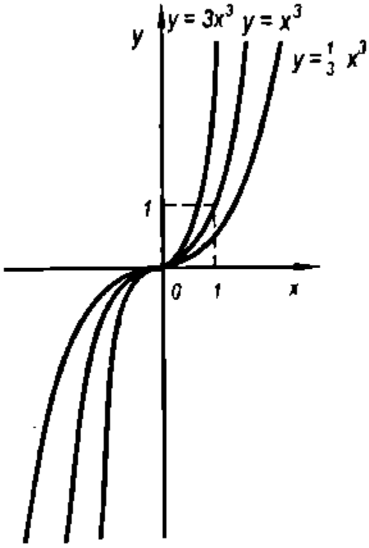
Таким чином, графіки функцій $y = (x \pm 2)^2$ можна дістати з графіка функції $y = x^2$ за допомогою паралельного перенесення його на 2 одиниці вправо по осі Ox, якщо $y = (x-2)^2$ і на 2 одиниці вліво, якщо $y = (x+2)^2$ (мал. 17).

7. Побудувати графік функції $y = af(x)$, де $a > 0$, якщо відомий графік $y = f(x)$.

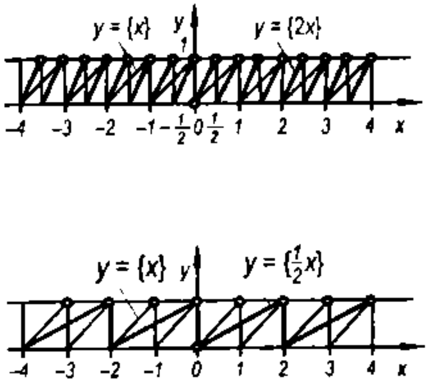
Наприклад, побудуємо графік функції $y = 3x^3$ і $y = \frac{1}{3}x^3$, якщо відомий графік функції $y = x^3$.

Області визначення і аргументи обох функцій однакові. Значення функції при будь-якому x для функції $y = af(x)$ в a разів змінюється порівняно з функцією $y = f(x)$. Якщо $a > 1$, ордината збільшується в a разів, якщо $0 < a < 1$ — зменшується. Тому графік функції $y = af(x)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою розтягу його в a разів від осі Ox, якщо $a > 1$, і за допомогою стиснення в a разів до осі Ox, якщо $0 < a < 1$.

Зокрема, графік функції $y = 3x^3$ можна дістати з графіка $y = x^3$ за допомогою розтягу його від осі Ox у 3 рази, а графік функції $y = \frac{1}{3}x^3$ — за допомогою стиснення його до осі Ox у 3 рази (мал. 18).



Мал. 18



Мал. 19

8. Відомий графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(ax)$, де $a > 0$.

Наприклад, за відомим графіком функції $y = \{x\}$ побудуємо графіки функцій $y = \{2x\}$ та $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$.

Оскільки над змінною x у другій функції виконується дія множення на число a, введемо підстановку і знайдемо координати точки $M(x;\ y) \in f(ax)$, в яку перейде точка $M_0(x_0;\ y_0) \in f(x)$. Нехай $x_0 = ax$, звідси $x = \frac{x_0}{a}$, $y = f(ax) = f(x_0) = y_0$. Отже, $M\left(\frac{x_0}{a};\ y_0\right)$. Це означає, що будь-яка точка графіка функції $y = f(x)$ перейде у точку графіка функції $y = f(ax)$ з абсцисою $\frac{x_0}{a}$ і тією самою ординатою. Очевидно, якщо $a > 1$, абсциса точки M зменшується в a разів, а якщо $0 < a < 1$ — збільшується. Це означає, що графік функції $y = f(ax)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою його розтягу або стиснення до осі Oy.

Графік функцій $y = \{2x\}$ та $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$ зображено на малюнку 19.

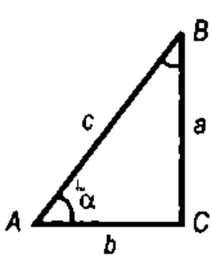
Зведені відомості про побудову графіків функцій за допомогою геометричних перетворень подано в таблиці 1 (с. 21).

§ 2. Тригонометричні функції кута

У курсі геометрії 8-го класу було введено означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута як відношення сторін у прямокутному трикутнику.

Синусом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\sin\alpha$) називається відношення протилежного катета a до гіпотенузи c (мал. 20)

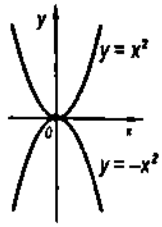
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$



Мал. 20

Косинусом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\cos\alpha$) називається відношення прилеглого катета b до гіпотенузи c

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$



1. Дано: графік функції $y = f(x)$.

Побудувати графік $y = -f(x)$.

П р и к л а д. Дано: графік $y = x^2$.

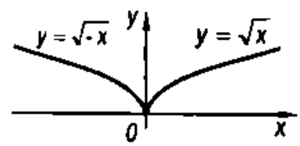
Побудувати графік $y = -x^2$.

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$.

2) Відобразити побудований графік симетрично відносно осі Ox.

Дістанемо графік функції $y = -f(x)$.



2. Дано: графік функції $y = f(x)$.

Побудувати графік $y = f(-x)$.

П р и к л а д. Дано: графік $y = \sqrt{x}$.

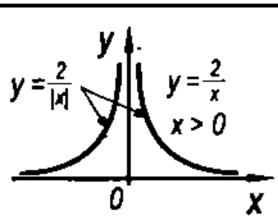
Побудувати графік $y = \sqrt{-x}$.

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$.

2) Відобразити побудований графік симетрично відносно осі Oy.

Дістанемо графік $f(-x)$.

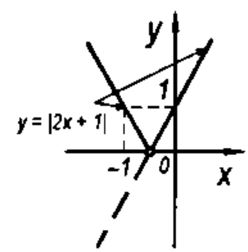


3. Дано: графік функції $y = f(x)$.

Побудувати графік $y = f(|x|)$.

П р и к л а д. Дано: графік $y = \dfrac{2}{x}$.

Побудувати графік $y = \dfrac{2}{|x|}$.



4. Дано: графік функції $y = f(x)$.

Побудувати графік $y = |f(x)|$.

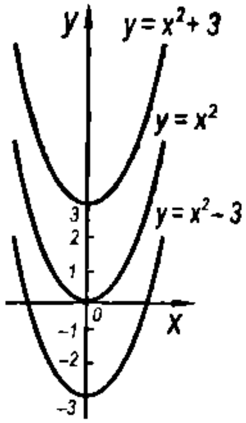
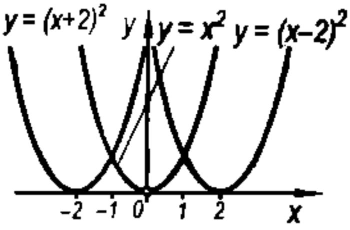
П р и к л а д. Дано: графік $y = 2x + 1$.

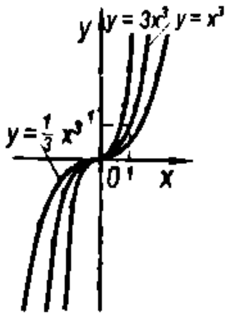
Побудувати графік $y = |2x + 1|$.

Алгоритм

1) Побудувати графік функції $y = f(x)$.

2) Відобразити симетрично відносно осі Ox частину, нижчу від Ox.

1) Побудувати графік $y = f(x)$ для $x > 0$. 2) Відобразити його симетрично відносно осі Oy. Об'єднання цих графіків є графіком $y = f(x)$.	Об'єднання частин графіка, що лежать вище від осі Ox, є графіком $y = \lvert f(x) \rvert$.
 **5.** Дано: графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік $y = f(x) \pm b$, де $b > 0$. П р и к л а д. Дано: графік $y = x^2$. Побудувати графік $y = x^2 \pm 3$. **Алгоритм** 1) Побудувати графік $y = f(x)$. 2) Паралельно перенести побудований графік у напрямі осі Oy вгору на b одиниць, якщо $y = f(x) + b$, і вниз на b одиниць, якщо $y = f(x) - b$.	 **6.** Дано: графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік $y = f(x \pm a)$, де $a > 0$. П р и к л а д. Дано: графік $y = x^2$. Побудувати графік $y = (x \pm 2)^2$. **Алгоритм** 1) Побудувати графік $y = f(x)$. 2) Паралельно перенести побудований графік у напрямі осі Ox вправо на a одиниць, якщо $y = f(x - a)$, і вліво на a одиниць, якщо $y = f(x + a)$.



7. Дано: графік функції $y = f(x)$.

Побудувати графік $y = af(x)$, якщо $a > 0$.

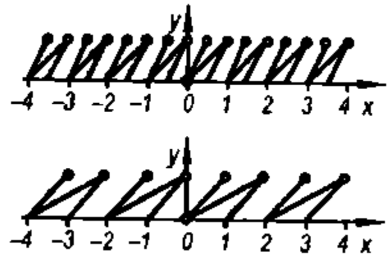
Приклад. Дано графік $y = x^3$.

Побудувати графіки $y = 3x^3$, $y = \dfrac{1}{3}x^3$.

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$.

2) Розтягнути його в a разів від осі Ox, якщо $a > 1$, стиснути до осі Ox в a разів, якщо $0 < a < 1$.



8. Дано: графік функції $y = f(x)$.

Побудувати графік $y = f(ax)$, де $a > 0$.

Приклад. Дано графік $y = \{x\}$.

Побудувати графіки $y = \{2x\}$, $y = \left\{\dfrac{1}{2}x\right\}$.

Алгоритм

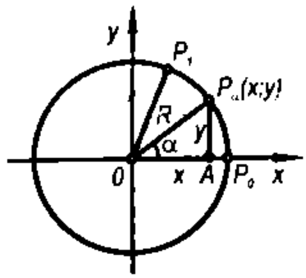
1) Побудувати графік $y = f(x)$.

2) Стиснути його до осі Oy в a разів, якщо $a > 1$, розтягнути від осі Oy в a разів, якщо $0 < a < 1$.

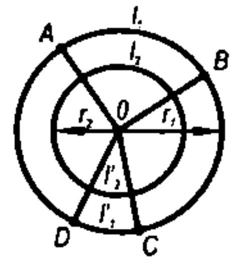
Тангенсом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\operatorname{tg}\alpha$) називається відношення протилежного катета до прилеглого

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Було доведено, що синус і косинус гострого кута трикутника залежать лише від величини кута і не залежать від довжини сторін трикутника, його розміщення, тобто синус, косинус, а отже, і тангенс є функціями кута. Пізніше для кутів від 0° до 180° означення цих функцій було введено за допомогою кола радіуса R у системі координат (координатний спосіб означення).



Мал. 21



Мал. 22

Синусом кута α називається відношення ординати y точки $P_\alpha(x; y)$ кола до його радіуса R (мал. 21):

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}.$$

Косинусом кута α називається відношення абсциси x точки $P_\alpha\ (x; y)$ кола до його радіуса R:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}.$$

Тангенсом кута α називається відношення ординати y точки $P_\alpha\ (x; y)$ кола до абсциси x цієї точки:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Для $\operatorname{tg}\alpha$ кут $\alpha = 90^\circ$ виключають, бо при $\alpha = 90^\circ$ абсциса дорівнює 0, а ділити на 0 не можна.

При такому означенні $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$. Якщо взяти до уваги, що промені, які збігаються, утворюють кут 0°, то $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$.

Нагадаємо, що для будь-якого кута $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. Для кута $\alpha \neq 90^\circ$ $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Котангенсом кута α називається відношення абсциси x точки $P_\alpha\ (x; y)$ кола до ординати y цієї точки:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Якщо будь-який кут розглядати як фігуру, утворену обертанням променя навколо своєї початкової точки у двох можливих напрямах (додатному, проти годинникової стрілки і від'ємному, за годинниковою стрілкою), то введені означення можна розширити на будь-які кути.

Кути довільної величини описують стрілки годинника, точки обертових частин механізмів тощо.

Приклад 1. Записати кут β у вигляді $\beta = \alpha + 360°n$, де $n \in Z$, α — додатний кут, менший від 360°, якщо: 1) $\beta = 2000°$; 2) $\beta = -490°$.

Розв'язання. 1) Поділимо 2000° на 360°. Отже, даний кут складається з 5 повних обертів і ще 200°. Тому $\beta = 2000° = 200° + 360° \cdot 5$, $n = 5$, $\alpha = 200°$.

2) З рівності $-490° = \alpha + 360°n$ знайдемо умову, яку має задовольняти n, щоб кут α був додатним. Розв'яжемо останнє рівняння відносно α : $\alpha = -490° - 360°n$.

За умови $\alpha > 0$ маємо: $-490° - 360°n > 0$. Розв'яжемо цю нерівність відносно n: $360°n < -490°$; $n < -\frac{490°}{360°}$ або $n < -1\frac{13}{36}$.

Найближче ціле число n, яке задовольняє цю нерівність, є $n = -2$. З рівності $\alpha = -490° - 360°n$ знайдемо α, підставляючи значення n. Маємо:

$$\alpha = -490° - 360° \cdot (-2) = -490° + 720° = 230°;$$

$$-490° = 360° \cdot (-2) + 230°,\ n = -2,\ \alpha = 230°.$$

Приклад 2. Стрілки годинника показують рівно 12 год. Через який найменший інтервал часу хвилинна стрілка знову суміститься з годинною?

Розв'язання. Хвилинна стрілка робить повний оберт, тобто повертається на кут у 360° за 60 хв. Тому за 1 хв вона повертається на $\frac{360°}{60} = 6°$. Годинна стрілка робить повний оберт за 12 год або за 720 хв. Отже, за 1 хв вона повертається на $\frac{360°}{720} = 0,5°$.

Коли годинник показує 12 год, то найменший відмінний від нуля кут між годинною і хвилинною стрілками дорівнює 360°. Позначаючи шуканий інтервал часу у хвилинах через x, дістанемо рівняння $6x - \frac{1}{2}x = 360°$. Звідси $x = 65\frac{5}{11}$ (хв), або 1 год $5\frac{5}{11}$ хв.

Отже, хвилинна стрілка суміститься з годинною щонайменше через 1 год $5\frac{5}{11}$ хв.

У геометрії термін «кут» вживають для позначення двох понять: 1) геометричної фігури, утвореної двома променями із спільним початком; 2) величини, що характеризує міру відхилення одного променя від іншого ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$), або однієї прямої від іншої при їх перетині ($0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$), або кута повороту ($-\infty < \alpha < +\infty$).

Коли йдеться про аргумент тригонометричної функції, то термін «кут» (синус кута, косинус кута) вживають у розумінні величини, а не фігури.

Відомо, що кожному центральному куту відповідає певна дуга кола заданого радіуса. Якщо розгорнутий центральний кут поділити на 180 рівних частин (величина кожної частини називається градусом), то і відповідна дуга (півколо) теж ділиться на 180 рівних частин. Величину кожної з дуг, на які розіб'ється півколо, теж називають градусом. Інколи для кута вживають термін «кутовий градус», а для дуги — «дуговий градус».

Існують різні системи вимірювання кутів і дуг. Крім градуса, його частин (мінути, секунди) в геометрії як одиницю вимірювання кутів використовують прямий кут. Цю одиницю позначають буквою d. Наприклад, величину кута α, що дорівнює 30°, в одиницях прямого кута позначають так: $\alpha = \frac{1}{3}d$.

В астрономії за одиницю вимірювання кутів взято кутову годину. Це величина кута, який становить $\frac{1}{6}$ частину прямого.

У техніці за одиницю вимірювання кутів взято повний оберт. Мова йде про число обертів вала, шківа, махового колеса тощо.

В артилерії кути вимірюють у так званих поділках кутоміра. Велика поділка кутоміра — це $\frac{1}{60}$ частина повного оберту. Мала поділка кутоміра дорівнює $\frac{1}{100}$ частині великої поділки. Кут, виміряний у таких одиницях, записують так: 28–32, що означає 28 великих і 32 малих поділки кутоміра.

Моряки вимірюють кути в румбах. Ця одиниця дорівнює $\frac{1}{16}$ частині величини розгорнутого кута.

У картографії в деяких країнах за одиницю вимірювання кутів взято град. Град дорівнює $\frac{1}{200}$ частині величини розгорнутого кута і позначається знаком g. Наприклад, $\angle AOB = 5^g$.

§ 3. Радіанна система вимірювання кутів і дуг

У математиці, астрономії, фізиці, техніці використовують радіанну систему вимірювання кутів і дуг, яка має певні переваги перед іншими системами. Введення радіанної системи зумовлено такою властивістю дуг, що відповідають кожному центральному куту: якщо розглянути два концентричних кола радіусів r_1 і r_2 (мал. 22) і два різних центральних кути $\angle AOB = \alpha^\circ$ і $\angle DOC = \beta^\circ$ з відповідними дугами l_1 і l_2, l_1' і l_2'. За відомою формулою довжини дуги маємо:

$$l_1 = \frac{\pi\alpha^\circ r_1}{180^\circ}; \quad l_2 = \frac{\pi\alpha^\circ r_2}{180^\circ};$$

$$l_1' = \frac{\pi\beta^\circ r_1}{180^\circ}; \quad l_2' = \frac{\pi\beta^\circ r_2}{180^\circ}.$$

Поділимо обидві частини кожної з цих чотирьох рівностей на відповідний радіус і дістанемо:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}, \ \frac{l_2}{r_2} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ};$$

$$\frac{l_1'}{r_1} = \frac{\pi\beta^\circ}{180^\circ}, \ \frac{l_2'}{r_2} = \frac{\pi\beta^\circ}{180^\circ}.$$

Звідси $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = m$, $\frac{l_1'}{r_1} = \frac{l_2'}{r_2} = n$. Якщо $\alpha^\circ > \beta^\circ$, то $m > n$. Отже, для даного центрального кута відношення довжин дуг концентричних кіл до довжин відповідних радіусів є величиною сталою. Це відношення залежить від величини кута, тому може служити характеристикою величини центрального кута:

$$\frac{l}{r} = a.$$

Число a характеризує величину даного центрального кута. Якщо $l = r$, то $a = 1$. Тому у радіанній системі за одиницю вимірювання кутів і дуг взято величину центрального кута, для якого довжина відповідної дуги дорівнює довжині радіуса.

Оскільки довжина півкола радіуса r дорівнює πr, то радіанна міра розгорнутого кута дорівнює $\frac{\pi r}{r} = \pi$ радіанів. Враховуючи, що градусна міра розгорнутого кута становить $180°$, а його радіанна міра дорівнює π радіанів, то $1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$, а $1° = \frac{\pi}{180}$ рад $\approx 0{,}01745$ рад.

Нехай $\alpha°$ — градусна міра деякого кута, а a — його радіанна міра. Оскільки градусна міра кута, утвореного при одному оберті точки $P_0(1; 0)$, дорівнює $360°$, а його радіанна міра дорівнює 2π, то $\frac{360°}{\alpha°} = \frac{2\pi}{a}$.

Звідси $a = \frac{\pi\alpha°}{180°}$ і $\alpha° = \frac{a \cdot 180°}{\pi}$, тобто ми дістали формули переходу від градусної міри кута до радіанної і навпаки.

Використовуючи ці формули для обчислення радіанної і градусної мір кута, слід враховувати правила наближених обчислень. Навіть тоді, коли наперед задати точне значення градусної чи радіанної міри кута (це може бути лише у теоретичних розрахунках), обчислені за формулами переходу значення будуть наближеними з точністю, яка залежить від вибору наближеного значення числа π.

Приклад 1. Визначити радіанну міру кута $108°$.

Розв'язання. Маємо $a = \frac{\pi\alpha°}{180°}$, $a = \frac{\pi \cdot 108°}{180°} = \frac{3}{5}\pi$. Якщо $\pi \approx 3{,}14$, $a \approx \frac{3}{5} \cdot 3{,}14 = 0{,}6 \cdot 3{,}14 = 1{,}884 \approx \approx 1{,}88$ (рад), коли вважати, що градусна міра задана точним значенням.

Приклад 2. Визначити градусну міру кута, радіанна міра якого наближено дорівнює 2,3 рад.

Розв'язання. Маємо $\alpha^\circ = \frac{a \cdot 180^\circ}{\pi}$, $\alpha^\circ \approx \approx \frac{2,3 \cdot 180^\circ}{\pi}$; при $\pi \approx 3,14$, $\alpha^\circ \approx \frac{2,3 \cdot 180^\circ}{3,14} \approx 132^\circ \approx 130^\circ$.

У радіанній системі не було введено позначення одиниці вимірювання, тобто позначення радіана. Тому, якщо кут як аргумент тригонометричної функції виміряний у радіанах, під знаком тригонометричної функції записують тільки числове значення величини кута. Наприклад, $\sin 2$, $\cos \frac{\pi}{4}$.

Особливістю радіанної міри є і те, що її одиниця (один радіан) міститься у розгорнутому куті не ціле число разів, як наприклад 1°, а ірраціональне: $\pi \approx 3,14$.

Перевага радіанної міри перед іншими полягає в тому, що для малих кутів, виміряних у радіанах, справджуються наближені рівності: $\sin \alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$.

Справді, нехай $\alpha = 3^\circ$. За таблицею переходу від градусної міри до радіанної знаходимо, що $3^\circ \approx 0,0524$ рад. За таблицями значень тригонометричних функцій для кутів, виміряних у градусній мірі, $\sin 3^\circ \approx 0,0523$. Якщо кут α виміряно у радіанній мірі, то $\sin 0,0524 \approx 0,0523$, тобто $\sin \alpha \approx \alpha$.

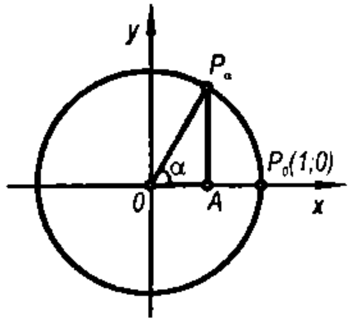
У градусній мірі аналогічна наближена рівність $\sin 3^\circ \approx 3$ не має сенсу. Вказана перевага радіанної міри широко застосовується у математичному аналізі та інших науках.

Перевага радіанної міри полягає ще і в тому, що відома з геометрії формула довжини дуги, виміряної в градусах, $l = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}$ і формула площі сектора $S = \frac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ}$ у радіанній мірі спрощуються і мають вигляд $l = ra$, $S = \frac{ar^2}{2}$, де r — радіус кола, a — радіанна міра дуги.

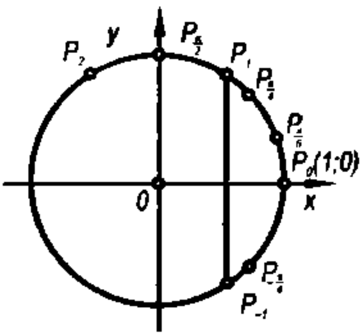
Радіанна міра дає змогу ввести поняття тригонометричної функції довільного числового аргументу.

§ 4. Тригонометричні функції числового аргументу

Перш ніж вводити означення тригонометричних функцій числового аргументу, пригадаємо, що синус, косинус, тангенс і котангенс довільного кута не залежать від радіуса R кола. Тому покладемо $R = 1$, а відповідне коло назвемо одиничним (мал. 23).



Мал. 23



Мал. 24

Виконаємо таку вправу: побудуємо на одиничному колі точки, на які відображується початкова точка P_0 (1; 0) при повороті навколо центра кола на кут α радіанів, якщо: а) $\alpha = 0$; б) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; в) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; г) $\alpha = -1$; д) $\alpha = 2$.

Розв'язання. а) Числу 0 на одиничному колі (мал. 24) відповідає точка P_0 (1; 0) — початок відліку.

б) Оскільки кут 90° дорівнює $\frac{\pi}{2}$ рад, то, поділивши на 3 кут $\frac{\pi}{2}$ рад, матимемо кут обертання $\frac{\pi}{6}$ рад, якому відповідає на колі точка $P_{\frac{\pi}{6}}$, що відсікає $\frac{1}{3}$ частину дуги $P_0 P_{\frac{\pi}{2}}$.

в) Відомо, що кути, градусна чи радіанна міра яких виражається від'ємним числом, відкладають від радіуса OP_0 за годинниковою стрілкою; розділимо прямий кут, тобто кут $\frac{\pi}{2}$ рад навпіл і відкладемо кут $-\frac{\pi}{4}$ від радіуса OP_0 у IV чверті, дістанемо точку $P_{-\frac{\pi}{4}}$.

г) Куту 1 рад відповідає дуга одиничного кола, довжина якої дорівнює радіусу $R = 1$; оскільки $\frac{\pi}{4} \approx \frac{3,14}{4} \approx 0,78$, а $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3,14}{2} \approx 1,57$, то точка P_1 лежить вище від точки $P_{\frac{\pi}{4}}$.

Точка P_{-1} буде симетричною їй відносно осі Ox і розміщена на одиничному колі у IV чверті.

д) Щоб знайти на одиничному колі точку P_2, досить відкласти від початкової точки у напрямі, протилежному рухові годинникової стрілки, дві дуги P_0P_1 послідовно.

Розв'язуючи цю вправу, помічаємо, що кожному дійсному числу α на одиничному колі відповідає точка P_α, положення якої залежить від числа α.

Кожній точці P_α на одиничному колі відповідають певна абсциса і ордината, які також залежать від α.

Отже, маємо залежності між дійсним числом α і абсцисою та ординатою відповідної точки одиничного кола, на яку відображується початкова точка P_0 (1; 0) при повороті навколо центра кола на кут α рад. Ці залежності дістали назву *тригонометричних функцій числа* або *тригонометричних функцій числового аргументу.*

Оскільки $R = 1$, то означення тригонометричних функцій як відношення ординати і абсциси до радіуса, які були введені для довільних кутів α і R, спрощуються.

Синусом числа α називається ордината точки P_α одиничного кола в яку переходить початкова точка P_0 (1; 0) при повороті навколо центра кола на кут α рад і позначається $\sin\alpha$.

Косинусом числа а називається абсциса точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка P_0 (1; 0) при повороті навколо центра кола на кут α рад і позначається $\cos\alpha$.

Тангенсом числа α називається відношення $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, *а котангенсом числа α — відношення* $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, *і позначаються вони відповідно* $\operatorname{tg}\alpha$ *і* $\operatorname{ctg}\alpha$.

Отже, за означенням, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

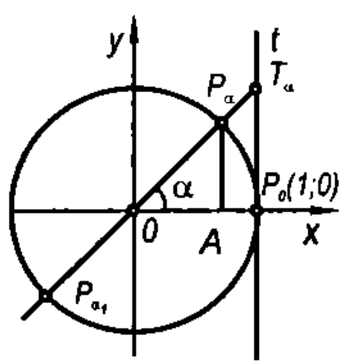
Оскільки кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність дійсні числа $\sin x$ і $\cos x$, то вважатимемо, що на множині R задано функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Оскільки $y = tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ визначений для всіх x, крім тих, при яких $\cos x = 0$, то кожному дійсному числу x, крім $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$, відповідає єдине число $\operatorname{tg} x$ (значення y залежить від x), тобто вважатимемо, що задана функція

$$y = \operatorname{tg} x, \quad \text{де } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \; n \in Z.$$

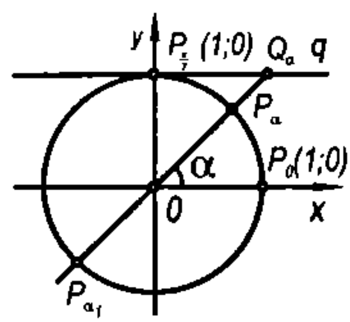
Можна вважати, міркуючи аналогічно, що на множині R при $x \neq n\pi$, $n \in Z$ задана функція $y = \operatorname{ctg} x$.

Для побудови графіків функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ та розв'язування деяких інших задач доцільно ввести поняття про лінії тангенсів і котангенсів.

Проведемо дотичну t до одиничного кола у точці $P_0\,(1; 0)$ (мал. 25).



Мал. 25



Мал. 26

Для довільного числа α, якщо $\alpha \neq 0$, відповідна точка $P_\alpha\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$ не лежить на осі Oy, а тому промінь OP_α перетинає дотичну в деякій точці T_α з абсцисою, що дорівнює 1.

Для знаходження ординати точки T_α скористаємось подібністю трикутників $OP_\alpha A$ і $T_\alpha OP_0$.

З подібності випливає, що

$$\frac{P_\alpha A}{OA} = \frac{T_\alpha P_0}{OP_0} = T_\alpha P_0 = \operatorname{tg}\alpha.$$

Таким чином, ордината точки перетину прямої OP_α з прямою t дорівнює тангенсу кута α. Тому дотична t дістала назву *лінії тангенсів*.

Щоб ввести поняття лінії котангенсів, проведемо дотичну q до одиничного кола у точці $P_{\frac{\pi}{2}}$ (мал. 26). Для довільного числа α, якщо $\sin\alpha \neq 0$, відповідна точка P_α

$(\cos\alpha;\sin\alpha)$ не лежить на осі Ox, а тому промінь OP_α перетинає пряму q у деякій точці Q_α з ординатою, що дорівнює 1. Знайдемо абсцису цієї точки.

Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через початок координат. Воно має вигляд $y = kx$, де $k = \operatorname{tg}\alpha$. Оскільки ордината точки Q_α дорівнює 1, то, підставляючи значення k і $y = 1$ у рівняння $y = kx$, дістанемо рівність $1 = x\ \operatorname{tg}\alpha$. Звідси $x = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Таким чином, абсциса точки перетину прямої OP_α з прямою q дорівнює котангенсу кута α. Тому дотична q дістала назву *лінії котангенсів.*

Оскільки кожному дійсному числу α на одиничному колі відповідає певна точка P_α, а цій точці відповідають певні абсциса і ордината $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$, то областю визначення функцій $y = \cos x$ і $y = \sin x$ є множина всіх дійсних чисел R. Оскільки абсциса і ордината точки P_α одиничного кола змінюються від -1 до 1, то областю значень цих функцій є відрізок $[-1; 1]$.

Областю визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина всіх чисел, для яких $\cos x \neq 0$, тобто множина всіх дійсних чисел, крім чисел $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, де n — будь-яке ціле число, тобто $n \in Z$.

Областю визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина всіх дійсних чисел, для яких $\sin x \neq 0$, тобто множина всіх дійсних чисел, крім чисел $x = n\pi$, де $n \in Z$.

Областю значень функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є множина всіх дійсних чисел. Справді, якщо α — довільне дійсне число, йому відповідає на лінії тангенсів (див. мал. 25) точка $T_\alpha\ (1; y_0)$ така, що $\operatorname{tg}\ \angle T_\alpha Ox = y_0$, а на лінії котангенсів — точка $Q_\alpha(y_0; 1)$ така, що $\operatorname{ctg}\angle Q_\alpha Ox = y_0$ (див. мал. 26). Отже, функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ набувають будь-яких дійсних значень y_0.

П р и к л а д 1. Знайти значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса числа $\dfrac{\pi}{3}$.

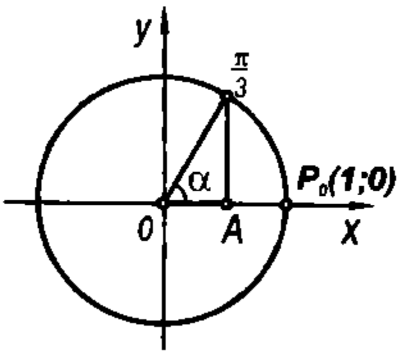
Р о з в' я з а н н я. Числу $\dfrac{\pi}{3}$ на одиничному колі відповідає точка $P_{\frac{\pi}{3}}$ (мал. 27). Щоб знайти $\sin\dfrac{\pi}{3}$ і $\cos\dfrac{\pi}{3}$, достатньо знайти ординату і абсцису точки $P_{\frac{\pi}{3}}$. У прямокутному трикутнику $OAP_{\frac{\pi}{3}}$ $\angle OP_{\frac{\pi}{3}}A = \frac{\pi}{6}$ рад, або $\angle OP_{\frac{\pi}{3}}A = 30°$. Оскільки у прямокутному трикутнику катет, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи, то $OA = \frac{1}{2}$. За теоремою Піфагора, $P_{\frac{\pi}{3}}A = \sqrt{OP^2_{\frac{\pi}{3}} - OA^2}$, $P_{\frac{\pi}{3}}A = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

За означенням $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тому $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

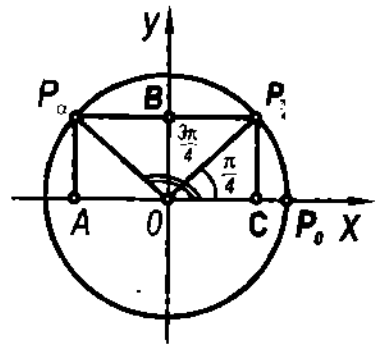
Таблиця 2

α	$0(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	0	Не існує	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не існує	0	Не існує

Аналогічно можна знайти значення тригонометричних функцій чисел $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, що дорівнюють тригонометричним функціям відповідних кутів у градусній і радіанній мірах. Доцільно пам'ятати ці значення, як і значення функцій для чисел (кутів) 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, оскільки їх часто використовують під час розв'язування задач. Значення тригонометричних функцій таких чисел (кутів) систематизовано у таблиці 2.



Мал. 27



Мал. 28

П р и к л а д 2. Знайти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай точка P_α утворена з точки P_0 (1; 0) при її повороті на кут $\frac{3\pi}{4}$ (мал. 28). Точки A і B — проекції точки P_α на осі координат. У прямокутному трикутнику $P_\alpha AO$ $\angle P_\alpha OA = \frac{\pi}{4}$, тому $\triangle P_\alpha AO$ — рівнобедрений. Оскільки $\triangle P_\alpha AO = \triangle P_{\frac{\pi}{4}}CO$, то $P_\alpha A = P_{\frac{\pi}{4}}C = \sin\frac{\pi}{4}$, $AO = OC = \cos\frac{\pi}{4}$. Відомо (див. табл. 2), що $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. За означенням, $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ є відповідно абсцисою і ординатою точки P_α. Тому $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, оскільки ординати точок II чверті додатні, а абсциси — від'ємні.

За означенням, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тому

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}} = -1.$$

П р и к л а д 3. Дослідити зміну $\cos\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π.

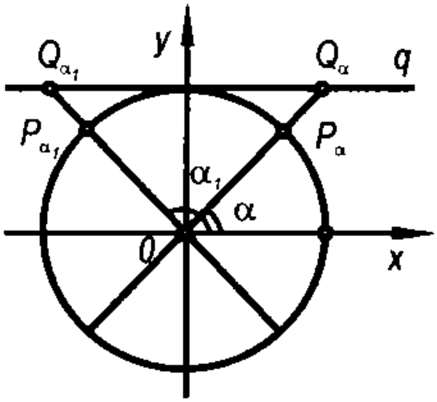
Р о з в' я з а н н я. За означенням, $\cos\alpha$ є абсцисою точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка P_0 (1; 0) при повороті навколо центра кола на кут α рад.

Якщо α збільшується від 0 до π (I і II чверті), то абсциса зменшується від 1 до -1. Отже, при зростанні аргументу від 0 до π функція косинус спадає від 1 до -1.

Якщо α збільшується від π до 2π (III і IV чверті), абсциса збільшується від -1 до 1, тобто при зростанні аргументу від π до 2π функція косинус зростає від -1 до 1.

Аналогічно досліджують зміну функції синус.

Характер зміни тангенса і котангенса легко дослідити, користуючись лініями тангенса і котангенса.



Мал. 29

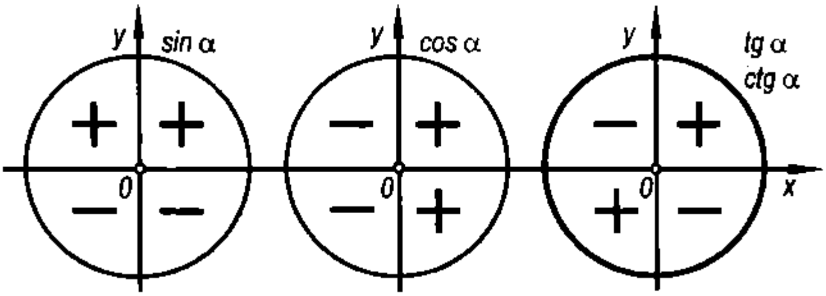
П р и к л а д 4. Дослідити знаки синуса і котангенса у кожній з чотирьох координатних чвертей.

Р о з в' я з а н н я. Можна скористатися одиничним колом і означенням синуса числа. Відомо, що ординати точок y у I і II чвертях додатні, тому синус чисел α, для яких відповідна точка P_α належить I і II чвертям, додатний.

Досліджуючи знак котангенса, можна скористатися лінією котангенса (мал. 29). Якщо врахувати, що значення котангенса додатні на промені, який розміщено справа від осі Oy, і від'ємні на промені, який розміщено зліва від осі Oy, то для чисел α, відповідна точка яких P_α належить I і III чвертям, котангенс додатний, а для тих, що P_α належить II і IV чвертям, – від'ємний.

Можна дослідити знак котангенса інакше: попередньо дослідити знаки синуса і косинуса. Тоді за означенням неважко встановити знаки котангенса.

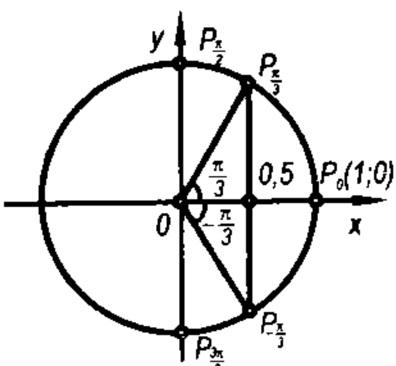
Знаки тригонометричних функцій у координатних чвертях схематично показано на малюнку 30.



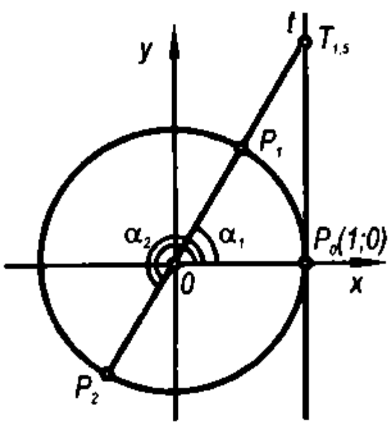
Мал. 30

П р и к л а д 5. На одиничному колі побудувати такі кути α, щоб: а) $\sin\alpha = -1$; б) $\cos\alpha = 0,5$; в) $\mathrm{tg}\alpha = 1,5$; г) $\mathrm{ctg}\alpha = -2$.

Р о з в' я з а н н я. а) Ординату, що дорівнює -1, мають кути $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$, де $n \in Z$ (мал. 31).



Мал. 31



Мал. 32

б) Відкладемо на осі Ox відрізок завдовжки $0,5$ і через кінець його проведемо пряму, паралельну осі Oy. Вона перетне одиничне коло у точках $P_{\frac{\pi}{3}}$ і $P_{-\frac{\pi}{3}}$. Цим двом точкам відповідають не лише кути $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{3}$ і $\alpha_2 = -\dfrac{\pi}{3}$, а й усі кути, радіанна міра яких дорівнює $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$.

в) На одиничному колі побудуємо лінію тангенсів і на ній від точки P_0 відкладемо відрізок P_0T завдовжки $1,5$ (мал. 32). Через кінець відрізка проведемо пряму $T_{1,5}O$, яка перетне коло у двох точках P_1 і P_2. Шуканими є кути $P_0OP_1 = \alpha_1$ і $P_0OP_2 = \alpha_2$, а також усі кути $\alpha_1 + 2n\pi$ і $\alpha_2 + 2n\pi$, де $n \in Z$. Оскільки $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$, то $\alpha_2 + 2n\pi = \alpha_1 + \pi + 2n\pi = \alpha_1 + (2n+1)\pi$.

Дві формули $\alpha_1 + 2n\pi$ і $\alpha_1 + (2n+1)\pi$ можна об'єднати в одну $\alpha_1 + k\pi$, де $k \in Z$.

Отже, шуканими є кути виду $\alpha_1 + k\pi$, де $k \in Z$.

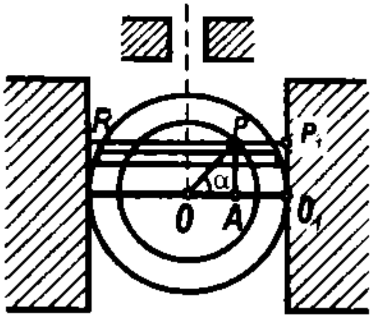
г) На лінії котангенсів вліво від осі відкладемо відрізок $P_{\frac{\pi}{2}}C$ завдовжки 2. Через кінець C проведемо пряму CO, яка перетне коло у двох точках P_1 і P_2. Шуканими є кути $P_0OP_1 = \alpha_1$ і $P_0OP_2 = \alpha_2$, а також усі кути $\alpha_1 + k\pi$, де $k \in Z$.

§ 5. Періодичність тригонометричних функцій

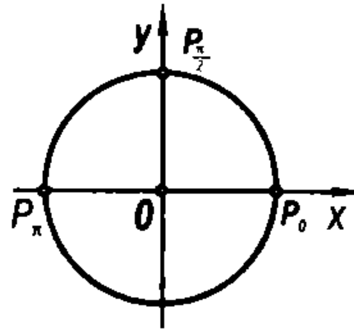
До поняття періодичної функції приводять періодичні процеси, у яких стан певних змінних повторюється. Прикладами таких процесів є рух колінчастого вала і поршня у двигунах внутрішнього згоряння, різні обертальні рухи та ін.

На малюнку 33 зображено простий пристрій, який перетворює обертальний рух у прямолінійний. Колесо, яке обертається і насаджене на вісь, з'єднане за допомогою «пальця» P з рамкою R. При обертанні колеса «палець» P здійснює обертальний рух, захоплює за собою рамку R, яка рухається вздовж бічних напрямних станин, і здійснює прямолінійний періодичний рух (якщо колесо обертається рівномірно). Якщо позначити $OP = r$, а точку дотику рамки до станин – P_1, то шлях O_1P_1 кінця рамки змінюватиметься залежно від зміни кута α, який утворює радіус кола з горизонтальним діаметром. Оскільки $O_1P_1 = AP = r\sin\alpha$, то, позначивши O_1P_1 через y, дістанемо $y = r\sin\alpha$, тобто періодичну функцію. Через кожний оберт колеса (через 2π) положення точки P повторюється.

Тому найменший додатний період функції $y = r\sin\alpha$ дорівнює 2π.



Мал. 33



Мал. 34

Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення функції числа $x + T$ та $x - T$ також належать області визначення і виконується умова $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Неважко довести, що коли T період функції $y = f(x)$, то всі числа виду nT, де $n \in Z$, $n \neq 0$, також є періодами функції.

Справді, застосовуючи кілька разів означення періодичної функції, дістанемо $f(x + 3T) = f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$.

Використовуючи означення синуса, косинуса числового аргументу та враховуючи їх геометричну інтерпретацію на одиничному колі, маємо:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2) = \cos x.$$

Будь-яке число виду $2\pi n$, де $n \in Z$, $n \neq 0$, є періодом синуса і косинуса.

Використовуючи лінії тангенсів і котангенсів, неважко зробити висновок, що $\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}(x+\pi) = \mathrm{ctg}x$. Це ж саме можна довести, користуючись означенням тангенса і формулами зведення:

$$\mathrm{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \mathrm{tg}x$$

Будь-яке число виду $n\pi$, де $n \in Z$, $n \neq 0$, є періодом тангенса і котангенса.

Доведемо, що найменшим додатним періодом синуса і косинуса є число 2π, а тангенса — число π.

Доведення виконаємо методом від супротивного.

1) Вище було показано, що число 2π є періодом синуса. Припустимо, що існує додатне число $l < 2\pi$ таке, що $\sin(x + l) = \sin x$. Нехай $x = \frac{\pi}{2}$, тоді $\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Але синус може дорівнювати 1 лише в точці $P_{\frac{\pi}{2}}$ (мал. 34), яка відповідає на одиничному колі числам $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, де $\in Z$. Отже, $\frac{\pi}{2} + l = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, звідки $l = 2n\pi$. Проте, за припущенням, $0 < l < 2\pi$, тобто $0 < 2n\pi < 2\pi$. Поділивши всі частини подвійної нерівності на 2π, дістанемо $0 < n < 1$, що суперечить умові, оскільки $n \in Z$, а між 0 і 1 немає жодного цілого числа.

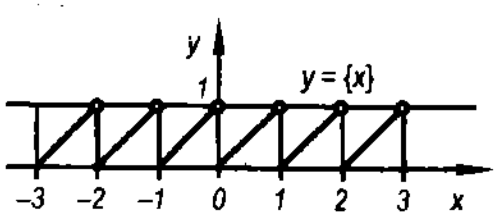
Отже, припущення неправильне, 2π — найменший додатний період синуса.

2) Відомо, що число π є періодом тангенса. Припустимо, що існує додатне число $0 < l < \pi$ і $\mathrm{tg}\,(x + l) = \mathrm{tg}\,x$. Нехай $x = 0$, тоді $\mathrm{tg}\,(0 + l) = \mathrm{tg}\,0 = 0$. Але тангенс дорівнює нулю лише у двох точках P_0 і P_1 одиничного кола, які відповідають числам виду $n\pi$, де $n \in Z$. Тому $l = n\pi$. За припущенням $0 < l < \pi$, тобто $0 < n\pi < \pi$. Звідси $0 < n < 1$, що суперечить умові.

Отже, припущення неправильне, π – найменший додатний період тангенса.

Самостійно доведіть, що найменшим додатним періодом косинуса є 2π, а котангенса – число π.

Не слід думати, що періодичними є лише тригонометричні функції. Прикладом періодичної є функція $y = \{x\}$ (y дорівнює дробовій частині x) (мал. 35). Найменшим додатним періодом цієї функції є число 1.



Мал. 35

Лінійна функція $y = kx + b$ є періодичною при $k = 0$. Для неї періодом є будь-яке дійсне число $T \neq 0$, оскільки $f(x + T) = f(x) = b$. Найменшого додатного періоду ця функція не має.

За найменшим додатним періодом тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ можна знайти найменший додатний період складеної тригонометричної функції, проміжним аргументом якої є, зокрема, лінійна функція.

П р и к л а д 1. Знайти найменший додатний період функції $y = \sin(kx + b)$, де k, b – числа.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $T > 0$ – шуканий період. За означенням періодичної функції

$$\sin(k(x + T) + b) = \sin(kx + b),$$

або

$$\sin(kx + kT + b) = \sin(kx + b).$$

Позначимо $x_1 = kx + b$ і підставимо значення x_1 замість $kx + b$ в останню рівність. Дістанемо $\sin(x_1 + kT) = \sin x_1$.

Оскільки найменшим додатним періодом синуса є 2π, то $|k| \cdot T = 2\pi$, звідки $T = \dfrac{2\pi}{|k|}$.

Користуючись здобутим результатом, можна стверджувати, що найменшим додатним періодом функції $y = \sin 2x$ є $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$, функції $y = \sin \dfrac{1}{2}x$ – число $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, функції $y = \sin kx$ – число $\dfrac{2\pi}{|k|}$.

Спираючись на властивість періодичності тригонометричних функцій, можна знаходити значення функцій будь-якого аргументу через значення функцій аргументу $0 < x < 2\pi$ для синуса і косинуса і $0 < x < \pi$ – для тангенса і котангенса.

П р и к л а д 2. Звести до однойменних функцій гострого кута:

1) $\cos 1827°$; 2) $\operatorname{tg} 978°$; 3) $\sin(-800°)$; 4) $\operatorname{ctg} 1305°$; 5) $\sin \dfrac{26\pi}{5}$; 6) $\operatorname{tg} \dfrac{7\pi}{3}$; 7) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{35\pi}{9}\right)$

Розв'язання

1) $\cos 1827^\circ = \cos(360^\circ \cdot 5 + 27^\circ) = \cos 27^\circ$;

2) $\text{tg} 978^\circ = \text{tg}(180^\circ \cdot 5 + 78^\circ) = \text{tg} 78^\circ$;

3) $\sin(-800^\circ) = \sin(360^\circ \cdot (-2) - 80^\circ) = \sin(-80^\circ)$;

4) $\text{ctg} 1305^\circ = \text{ctg}(180^\circ \cdot 7 + 45^\circ) = \text{ctg} 45^\circ = 1$;

5) $\sin \frac{26\pi}{5} = \sin\left(5\pi + \frac{1}{5}\pi\right) = \sin\left(4\pi + \left(\pi + \frac{1}{5}\pi\right)\right) =$
$= \sin\left(\pi + \frac{1}{5}\pi\right) = -\sin \frac{1}{5}\pi$;

6) $\text{tg}\frac{7\pi}{3} = \text{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

7) $\text{tg}\left(-\frac{35\pi}{9}\right) = \text{tg}\left(\pi(-4) + \frac{1}{9}\pi\right) = \text{tg}\frac{1}{9}\pi$.

Приклад 3. Обчислити значення тригонометричних функцій:

1) $\cos 1125^\circ$; 2) $\cos(-315^\circ)$ 3) $\text{tg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$; 4) $\cos\frac{13\pi}{6}$.

Розв'язання.

1) $\cos 1125^\circ = \cos(360^\circ \cdot 3 + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin(-315^\circ) = \sin(-360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

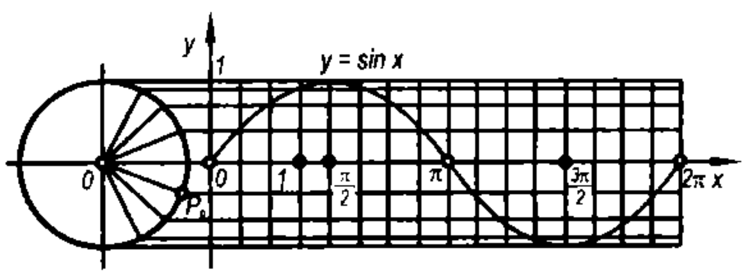
3) $\text{tg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right) = \text{tg}\left(\pi \cdot (-6) + \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

4) $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 6. Побудова графіків тригонометричних функцій

Графік кожної з тригонометричних функцій досить побудувати на проміжку, що дорівнює найменшому додатному періоду, а потім його можна продовжити на всю область визначення. При побудові графіків за точками скористаємось геометричним тлумаченням кожної з тригонометричних функцій на одиничному колі.

Графік функції $y = \sin x$ побудуємо на відрізку $[0; 2\pi]$. Оскільки синус числа α – це ордината точки одиничного кола, в яку переходить точка P_1 $(1; 0)$ при повороті навколо центра на α рад, то побудуємо систему координат. Позначимо на осі Ox відрізок $[0; 2\pi]$, довжина якого наближено дорівнює $2\pi \approx 2 \cdot 3,14 = 6,28$ (мал. 36). Побудуємо також поза цим відрізком коло з центром на осі Ox і радіусом, що дорівнює 1. Довжина кола також наближено дорівнює $2\pi \approx 6,28$. Розіб'ємо відрізок $[0; 2\pi]$ і коло, починаючи від точки P_0, на 16 рівних частин. Через кожну точку поділу кола проведемо прямі, паралельні осі Ox. З кожної точки P_α поділу кола проведемо перпендикуляри до осі Ox, довжини яких дорівнюють ординаті, а значить, синусу кута, утвореного радіусом OP_α і віссю Ox і виміряного у радіанах. Кожна з цих ординат відповідає абсцисам α, позначеним точками поділу відрізка $[0; 2\pi]$ на осі Ox. Провівши прямі, паралельні осі Oy у кожній точці поділу цього відрізка, до перетину з відповідною паралельною прямою, дістанемо у перетині точки графіка функції $y = \sin x$. Проведена через ці точки суцільна крива називається *синусоїдою*.



Мал. 36

Оскільки функція $y = \sin x$ періодична з періодом $2n\pi$, де $n \in Z$, тобто $y = \sin(x + 2n\pi)$, то для продовження графіка за межі відрізка $[0; 2\pi]$ досить виконати побудову графіків функцій виду

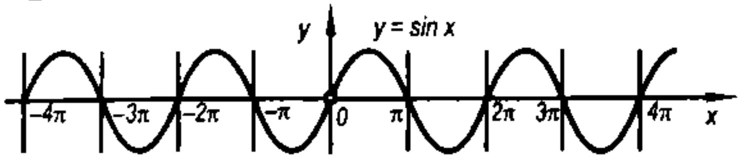
$y = \sin(x + 2\pi)$, $y = \sin(x - 2\pi)$, $y = \sin(x + 4\pi)$,

$y = \sin(x - 4\pi)$, $y = \sin(x + 6\pi)$, $y = \sin(x - 6\pi)$, ...,

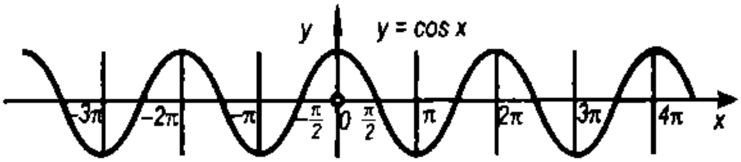
паралельно переносячи графік функції $y = \sin x$ на $2\pi, 4\pi, 6\pi$ ... одиниць вліво і вправо (мал. 37).

Графік функції $y = \cos x$ побудуємо, скориставшись формулою зведення і геометричним перетворенням відомого графіка. Отже, $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, тобто графік функції $y = \cos x$ можна дістати з графіка функції

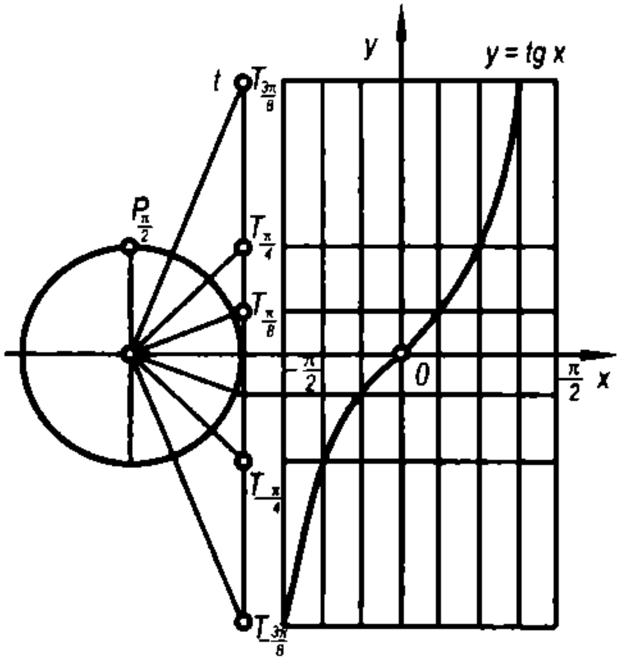
$y = \sin x$ паралельним перенесенням його вліво вздовж осі Ox на $\frac{\pi}{2}$ одиниць (мал. 38).



Мал. 37



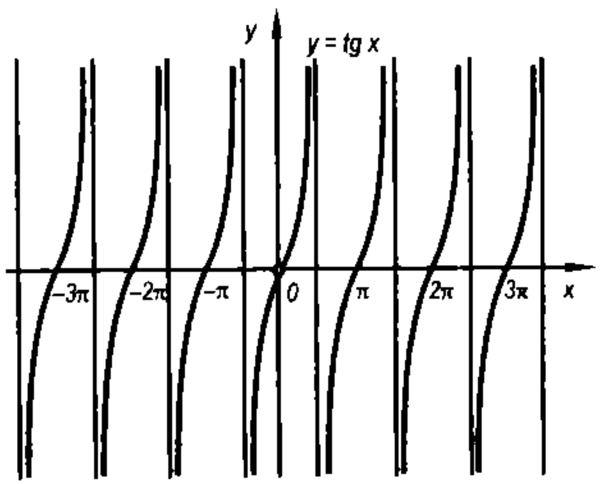
Мал. 38



Мал. 39

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ побудуємо за допомогою лінії тангенсів на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, довжина якого дорівнює періоду π цієї функції.

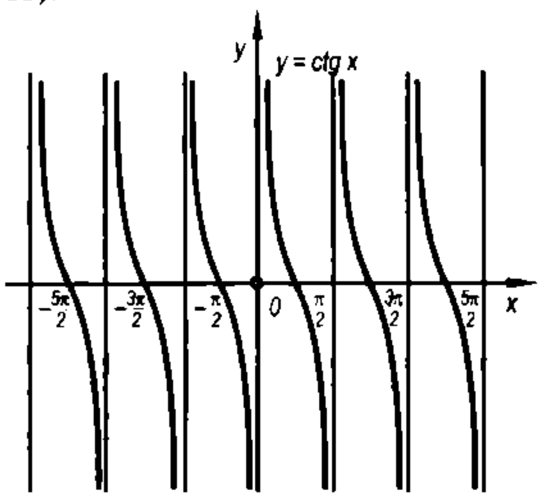
Побудуємо систему координат і виділимо на осі Ox проміжок $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поза ним побудуємо одиничне коло з центром на осі Ox і лінію тангенсів. Поділимо проміжок $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і ліве півколо на 8 рівних частин (мал. 39). Через центр кола і точки поділу його проведемо прямі до перетину з лінією тангенсів. Утворені точки T_α перетину визначають відрізки на лінії тангенсів, довжини яких дорівнюють тангенсу відповідного кута повороту, виміряного у радіанах. Числові значення цих кутів, позначені на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ осі Ox, дорівнюють $-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{8}, 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$.



Мал. 40

Через точки T_α на лінії тангенсів проведемо прямі, паралельні осі Ox, а через точки поділу проміжка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ – паралельні осі Oy. Попарний перетин цих паралельних прямих визначає точки, що належать графіку $y = \operatorname{tg} x$. Провівши плавну криву через ці точки, дістанемо графік функції $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Щоб побудувати графік за його межами, досить скористатися періодичністю функції тангенс, тобто тотожністю $\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x$. Отже, слід виконати побудову функцій виду $y = \operatorname{tg}(x+\pi)$, $y = \operatorname{tg}(x - \pi)$, $y = \operatorname{tg}(x + 2\pi)$, $y = \operatorname{tg}(x - 2\pi)$, $y = \operatorname{tg}(x + 3\pi) \ldots$ паралельним перенесенням графіка функції $y = \mathrm{tg}x$ на $\pi, 2\pi, 3\pi \ldots$ одиниць вліво і вправо (мал. 40). Графік функції $y = \mathrm{tg}x$ називають *тангеносоїдою*.

Графік функції $y = \mathrm{ctg}x$ легко дістати, скориставшись формулою зведення $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}x$, $\mathrm{ctg}x = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ і двома геометричними перетвореннями — паралельним перенесенням тангенсоїди на $\frac{\pi}{2}$ одиниць вліво і перетворенням симетрії утвореного графіка відносно осі Ox (мал. 41).



Мал. 41

Приклад 1. Користуючись одиничним колом і графіком функції $y = \sin x$, відповісти на такі запитання:

1) як змінюється значення функції $y = \sin x$ при зміні аргументу від 0 до 2π у кожній координатній чверті?

2) які знаки мають значення функції $y = \sin x$ у кожній чверті?

3) при яких значеннях аргументу функція дорівнює нулю на проміжку $[0; 2\pi]$?

4) чому дорівнює $y = \sin x$, якщо x дорівнює $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$?

5) назвати відповідні числа з проміжку $[0; 2\pi]$, синус яких дорівнює $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, -1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6) яких найбільших і найменших значень набуває функція $y = \sin x$ на відрізку $[0; 2\pi]$, при яких значеннях аргументу вона набуває цих значень?

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки синус числа α — це ордината точки одиничного кола, то при збільшенні числа α (а значить і кута повороту) від 0 до $\frac{\pi}{2}$ (I чверть) ордината ($\sin \alpha$) збільшується від 0 до 1. При подальшому збільшенні аргументу від $\frac{\pi}{2}$ до π (II чверть) синус зменшується від 1 до 0. При збільшенні аргументу від π до $\frac{3\pi}{2}$ (III чверть) синус продовжує зменшуватися від 0 до -1. При збільшенні аргументу від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π (IV чверть) значення функції синус збільшується від -1 до 0. Аналіз графіка функції $y = \sin x$ підтверджує такий характер зміни значення цієї функції: у I чверті синусоїда піднімається вгору, у II і III чвертях опускається вниз, у IV чверті знову піднімається вгору.

2) Знаки функції синус в координатних чвертях визначає знак ординати точок одиничного кола: у I і II чвертях синус додатний, у III і IV – від'ємний.

3) Значення синуса дорівнює нулю при тих значеннях аргументу, при яких ординати точок одиничного кола дорівнюють нулю, тобто, якщо $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

4) Користуючись означенням синуса та одиничним колом або графіком функції $y = \sin x$, зробимо висновок, що $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\frac{5\pi}{2} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

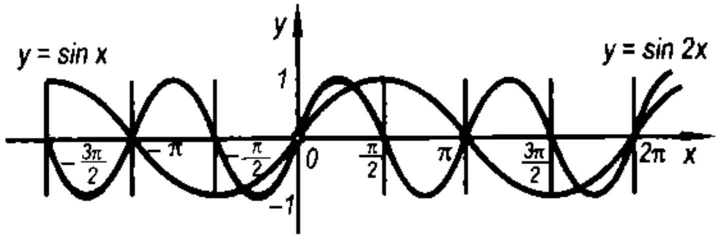
5) Це числа $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.

6) Аналіз зміни значень функції $y = \sin x$ на одиничному колі і за графіком показує, що найбільшого значення 1 функція набуває при значенні аргументу, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$, а найменшого -1 — при значенні аргументу, що дорівнює $\frac{3\pi}{2}$.

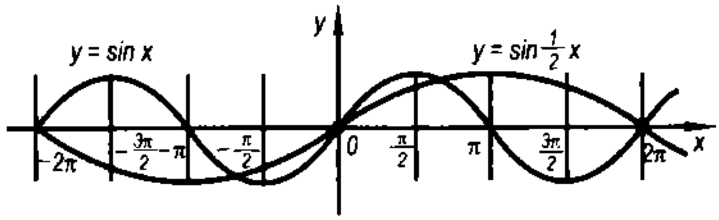
П р и к л а д 2. Побудувати графіки функцій $y = \sin 2x$, $y = \sin\frac{1}{2}x$.

Р о з в' я з а н н я. Використаємо геометричне перетворення відомого графіка функції $y = \sin x$. Якщо $\sin x = f(x)$, то $\sin 2x = f(kx)$. Відомо, що графік функції $y = f(kx)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$, стискуючи його до осі Oy, якщо $k > 1$, і розтягуючи від осі Oy, якщо $0 < k < 1$.

Отже, графік функції $y = \sin 2x$ можна дістати, стискуючи у 2 рази (мал. 42), а графік $y = \sin \frac{1}{2}x$ – розтягуючи у 2 рази відомий графік функції $y = \sin x$ (мал. 43).



Мал. 42



Мал. 43

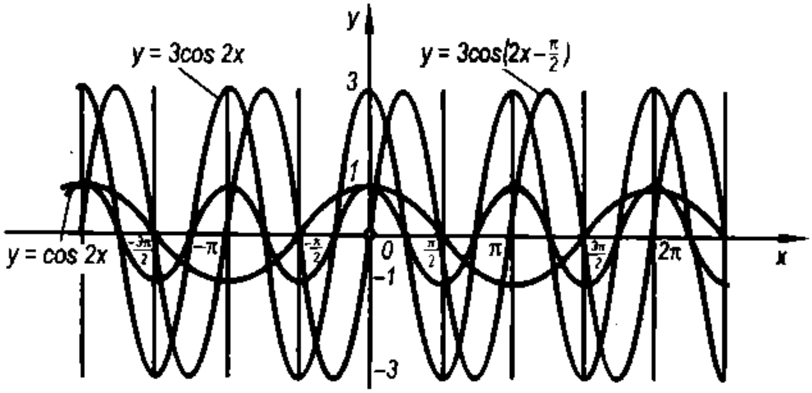
П р и к л а д 3. Побудувати графік функції $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Р о з в' я з а н н я. Перетворимо вираз даної функції так, щоб перед аргументом у дужках залишився коефіцієнт, що дорівнює 1, тобто подамо у вигляді $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Це дасть змогу пізніше використати побудову графіка функції $y = f(x - a)$, де $a > 0$, паралельним перенесенням у напрямі осі Ox вже відомого графіка функції.

Послідовність побудови шуканого графіка може бути такою:

будуємо відомий графік функції $y = \cos x$;

будуємо графік функції $y = \cos 2x$, стискаючи графік функції $y = \cos x$ у 2 рази до осі Oy;



Мал. 44

будуємо графік $y = 3\cos 2x$, розтягуючи у 3 рази від осі Ox графік функції $y = \cos 2x$;

будуємо шуканий графік $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, паралельно переносячи раніше побудований графік $y = 3\cos 2x$ вправо вздовж осі Ox на відстань $\frac{\pi}{4}$ (мал. 44).

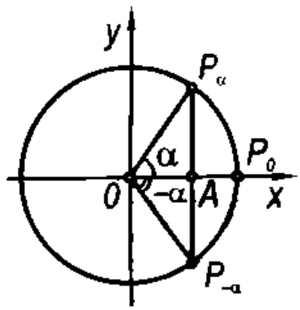
§ 7. Властивості тригонометричних функцій

Функція $y = \sin x$. 1) Оскільки синус існує для будь-якого дійсного числа і як ордината точки одиничного кола (див. мал. 21) змінюється на відрізку від -1 до 1, то областю визначення цієї функції є множина R всіх дійсних чисел, а областю значень – відрізок $[-1; 1]$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат (див. мал. 37), тобто функція $y = \sin x$ — непарна. Доведемо це, користуючись одиничним колом.

Оскільки областю визначення функції $y = \sin x$ є множина R, яка симетрична відносно початку (нуля) відліку, то залишається довести, що $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Позначимо на одиничному колі точки P_α і $P_{-\alpha}$, які відповідають числам α і $-\alpha$ (мал. 45). Оскільки прямокутний трикутник $\Delta P_\alpha OA = \Delta P_{-\alpha}OA$, то катет $P_\alpha A = P_{-\alpha}A$, а катет OA — спільний. Отже, абсциси точок P_α і $P_{-\alpha}$ рівні, а ординати — протилежні числа. Тому $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.



Мал. 45

3) Функція $y = \sin x$ періодична з періодом $2n\pi$, де $n \in Z$, $n \neq 0$. Справді, означення синуса числа як ординати одиничного кола і графік функції свідчать про те, що кожне своє значення функція повторює через повний оберт. Вище вже було доведено, що найменшим додатним періодом цієї функції є число 2π.

4) Функція набуває значення, що дорівнює 0 (нуль функції), якщо $x = k\pi$, де $k \in Z$, оскільки ординати точок одиничного кола перетворюються в нуль на відрізку $[0; 2\pi]$ у двох точках $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = \pi$, а функція періодична. Числа $0 + 2n\pi = 2n\pi$, $\pi + 2n\pi = (2n + 1)\pi$ утворюють множину $k\pi$, де $k \in Z$.

5) Проміжки зростання функції — відрізки $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, де $k \in Z$. Оскільки $y = \sin x$ – функція періодична, достатньо довести зростання на одному з вказаних відрізків, наприклад на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Скористаємось одиничним колом. Точка P_α, рухаючись на одиничному колі в додатному напрямі від точки P до точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, весь час піднімається вгору і переміщується вліво (мал. 45). Це означає, що ордината точки P_α зростає від 0 до 1.

На відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ під час руху точки P_α на одиничному колі в додатному напрямі ордината зростає від -1 до 0.

Аналогічно можна показати, що синус спадає на відрізках $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$, де $k \in Z$. Обґрунтуйте це самостійно.

Пізніше, після вивчення тотожностей додавання однойменних тригонометричних функцій, властивість зростання і спадання синуса за допомогою означень зростаючої і спадної функцій буде доведено аналітично.

6) Проміжками, де синус додатний, є $(2n\pi; \pi + 2n\pi)$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$, довжина якого дорівнює найменшому додатному періоду 2π, функція додатна на проміжку $(0; \pi)$. Синус від'ємний на проміжках $(\pi + 2n\pi; 2\pi + 2n\pi)$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$ він від'ємний на проміжку $(\pi; 2\pi)$.

Враховуючи періодичність функції, дістанемо всі можливі проміжки знакосталості.

7) Синус досягає найбільшого значення, що дорівнює 1, у точках $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, де $n \in Z$, а найменшого значення, що дорівнює -1, – у точках $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, де $n \in Z$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$ ордината точки одиничного кола дорівнює 1, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, і -1, якщо $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Функція $y = \cos x$. 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел R, а областю значень – відрізок $[-1; 1]$, оскільки косинус існує для будь-якого дійсного числа і як абсциса точки одиничного кола (див. мал. 23) змінюється на відрізку $[-1; 1]$.

2) Графік функції симетричний відносно осі Oy (див. мал. 38). Отже, функція парна. Доведемо це для відрізка $[0; 2\pi]$, користуючись одиничним колом.

Оскільки областю визначення функції $y = \cos x$ є множина R, симетрична відносно початку (нуля) відліку, то залишається довести, що $\cos(-x) = \cos x$.

Позначимо на одиничному колі точки P_α і $P_{-\alpha}$, які відповідають числам α і $-\alpha$ (див. мал. 45). Вище було показано, що абсциси цих точок однакові, тому $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

3) Функція $y = \cos x$ періодична з періодом $2n\pi$, де $n \in Z$, оскільки означення косинуса числа як абсциси точки одиничного кола (див. мал. 23) і графік функції (див. мал. 38) свідчать про те, що кожне своє значення функція повторює через повний оберт. Раніше було доведено, що найменшим додатним періодом функції є число 2π.

4) Функція набуває значень, що дорівнюють 0 (нулі функції), якщо $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, де $k \in Z$, оскільки абсциси точок одиничного кола на відрізку $[0; 2\pi]$ дорівнюють

0 у двох точках $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ і $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$. Додавши до цих чисел період $2n\pi$, матимемо дві множини чисел, які разом дають множину $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

5) Проміжки зростання функції — відрізки $[-\pi + +2n\pi; 2n\pi]$, де $n \in Z$. Оскільки функція $y = \cos x$ періодична, то досить довести зростання на одному з вказаних проміжків, наприклад на відрізку $[\pi; 2\pi]$.

Відрізку $[\pi; 2\pi]$ відповідають на одиничному колі третя та четверта чверті. Коли точка P_α рухається на одиничному колі в додатному напрямі по дугах, що відповідають вказаним чвертям, від точки P_π до $P_{2\pi}$, абсциса її зростає від -1 до 1.

Аналогічно можна показати, що косинус спадає на відрізках $[2n\pi; \pi+2n\pi]$, де $n \in Z$. Обгрунтуйте це самостійно.

Пізніше, після вивчення формул віднімання косинусів, властивість зростання і спадання функції $y = \cos x$ буде доведено аналітично.

6) Проміжками, де косинус додатний, є $\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$, а де від'ємний, — є $\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi; \frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)$, де $n \in Z$. Справді, у I і IV чвертях, тобто на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, косинус набуває додатних значень, а у II і III, тобто на проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, — від'ємних. Враховуючи періодичність функції, дістанемо всі можливі проміжки знакосталості.

7) Косинус досягає найбільшого значення, що дорівнює 1, у точках $x = 2n\pi$, де $n \in Z$, а найменшого значення, що дорівнює -1, – у точках $x = \pi + 2n\pi$, де $n \in Z$.

Функція $y = \operatorname{tg} x$. 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім тих, косинус яких дорівнює 0, тобто чисел $\frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n \in Z$; областю значень є множина R.

2) Графік тангенса (див. мал. 40) симетричний відносно початку координат, тобто функція непарна. Довести, це твердження можна, користуючись непарністю синуса і парністю косинуса.

Справді, область визначення тангенса – множина, симетрична відносно нуля початку відліку, і

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg}x.$$

3) Функція $y = \operatorname{tg} x$ періодична, з періодом $n\pi$, де $n \in Z$, оскільки кожне своє значення як довжину відрізка лінії тангенсів вона повторює через половину оберту (див. мал. 25). Вище було доведено, що найменшим додатним періодом тангенса є число π.

4) Функція набуває значень, що дорівнюють 0 (нулі функції), якщо $x = n\pi$, де $n \in Z$, оскільки тангенс дорівнює нулю у тих точках, де синус дорівнює нулю, а косинус не дорівнює нулю. Про це свідчать інтерпретація на одиничному колі та графік функції.

5) Проміжки зростання функції

$$\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right), \quad n \in Z.$$

Враховуючи періодичність функції, досить довести зростання на одному з проміжків, наприклад на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Побудований графік (мал. 41) ілюструє властивість зростання функції $y = \operatorname{tg} x$. Аналітично це буде доведено пізніше, після вивчення тригонометричної тотожності різниці тангенсів.

6) Оскільки тангенс набуває додатних значень у I і III чвертях, а від'ємних – в II і IV чвертях, то $\left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ і $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; n\pi\right)$ є відповідно проміжками, де тангенс додатний і від'ємний. Враховуючи періодичність тангенса, дістали всі можливі проміжки знакосталості.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$. Обгрунтуйте самостійно всі властивості функції котангенс.

1) Областю визначення є множина всіх дійсних чисел, крім $x = n\pi$, де $n \in Z$.

2) Функція непарна.

3) Періодична з періодом $n\pi$, $n \in Z$; найменшим додатним періодом є число π.

4) Функція набуває значень, що дорівнюють 0 (нулі функції), якщо $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n \in Z$.

5) Проміжками спадання є $(n\pi; \pi + n\pi)$, де $n \in Z$.

6) Проміжками, де котангенс додатний, є $\left(n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, а від'ємний – $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; n\pi\right)$ при $n \in Z$.

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

1) $y = \frac{1}{\sin x - 1}$; 2) $y = \sqrt{\cos x}$;

3) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$; 4) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. 1) Дріб $\frac{1}{\sin x - 1}$ існує, якщо знаменник $\sin x - 1 \neq 0$. Звідси $\sin x \neq 1$. Користуючись графіком синусоїди, знаходимо точки, в яких $\sin x = 1$. Відкидаючи їх, дістанемо

$$x \neq -\frac{3\pi}{2};\ x \neq \frac{\pi}{2},\ x \neq \frac{5\pi}{2}\ \ldots$$

Записуючи всі ці числа у вигляді однієї формули, маємо $x \neq (4k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

2) Вираз $\sqrt{\cos x}$ існує, якщо $\cos x \geqslant 0$. Вище було доведено, що $\cos x > 0$ на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ і $\cos x = 0$ у точках $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n \in Z$. Об'єднавши ці множини чисел, маємо $\cos x \geqslant 0$ на відрізках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$. Ці відрізки є областю визначення функції $y = \sqrt{\cos x}$.

3) Вираз $\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ існує при всіх x, для яких існує $\operatorname{ctg} x$ і $\operatorname{ctg} x \neq 0$. Котангенс існує, якщо $x \neq k\pi$, а не дорівнює нулю при всіх $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Якщо записати першу множину чисел $k\pi$ у вигляді $2k\frac{\pi}{2}$, то можна об'єднати обидві множини, враховуючи, що всі парні $(2k)$ і непарні $(2k+1)$ числа утворюють множину цілих чисел. Отже, областю визначення функції $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ є множина всіх чисел x таких, що $x \neq n\frac{\pi}{2}$, де $n \in Z$.

4) Вираз $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ існує, якщо $x-\frac{\pi}{4}\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$, тобто $x\neq 2n\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$. Звідси $x\neq 2n\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}$, або $x\neq\frac{3\pi}{4}+n\pi$, де $n\in Z$.

П р и к л а д 2. Знайти область значень функції:

1) $y=\frac{1}{2}\cos x$; 2) $y=\sin x+1$; 3) $y=\cos^2 x+1$; 4) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+1$; 5) $y=\sin 2x$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки $\cos x$ змінюється від -1 до 1, то областю зміни функції $y=\frac{1}{2}\cos x$ є відрізок $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

2) У виразі $\sin x+1$ найменше значення першого доданка -1, а найбільше 1. Тому найменшим значенням виразу $\sin x+1$ є число 0, а найбільшим – число 2. Отже, областю значень функції $y=\sin x+1$ є відрізок $[0;2]$.

3) У виразі $\cos^2 x+1$ перший доданок змінюється від 0 до 1, а весь вираз – від 1 до 2. Отже, областю значень функції $y=\cos^2 x+1$ є відрізок $[1;2]$.

4) Перший доданок виразу $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+1$ змінюється від 0 до $+\infty$, оскільки $\operatorname{tg}x$ змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, а $\operatorname{tg}^2 x$ – число невід'ємне. Тому областю значень функції $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+1$ є множина $[1;+\infty)$.

5) При будь-яких дійсних значеннях x областю значень функції $y=\sin 2x$ є множина $[-1;1]$.

П р и к л а д 3. Яке число більше:

1) $\sin\frac{\pi}{9}$ чи $\sin\frac{\pi}{4}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ чи $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$;

2) $\cos\frac{\pi}{9}$ чи $\cos\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ чи $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$?

Р о з в' я з а н н я. 1) Числам $\alpha_1=\frac{\pi}{9}$ і $\alpha_2=\frac{\pi}{4}$ відповідають точки одиничного кола P_{α_1} і P_{α_2}, які належать I чверті, де синус зростає. Оскільки $\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{9}$, то $\sin\frac{\pi}{4}>\sin\frac{\pi}{9}$.

2) Косинус у I чверті спадає, тому $\cos\frac{\pi}{4}<\cos\frac{\pi}{9}$.

3) Числу $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ відповідає точка P_{α_1}, яка належить I чверті, а числу $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$ – точка P_{α_2}, яка належить II чверті. Оскільки тангенс у I чверті додатний, а у II від'ємний, то $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} > \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

4) Числам $-\frac{\pi}{8}$ і $-\frac{\pi}{6}$ відповідають точки P_{α_1} і P_{α_2}, які належать IV чверті, тобто проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Оскільки котангенс – функція спадна на кожному з проміжків області визначення, а $-\frac{\pi}{8} > -\frac{\pi}{6}$, то

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) < \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Приклад 4. У яких чвертях може закінчуватися кут α, якщо:

1) $|\sin(-\alpha)| = -\sin\alpha$; 2) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$;

3) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$; 4) $|\operatorname{ctg}(-\alpha)| = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Розв'язання. 1) Оскільки синус – непарна функція, то дану рівність можна записати у вигляді $|-\sin\alpha| = -\sin\alpha$. Модуль будь-якого числа — число невід'ємне, тому невід'ємним має бути вираз $-\sin\alpha$. Це означає, що $\sin\alpha \leqslant 0$. Тому кут α може закінчуватися у III або у IV чверті.

2) За означенням модуля числа, модуль від'ємного числа дорівнює протилежному числу. Тому $\cos\alpha$ за умовою набуває лише від'ємних значень. Це означає, що кут α може закінчуватися у II або у III чверті.

3) За означенням модуля $\operatorname{tg}\alpha$ — число невід'ємне. Тому кут α може закінчуватися або у I, або у III чверті.

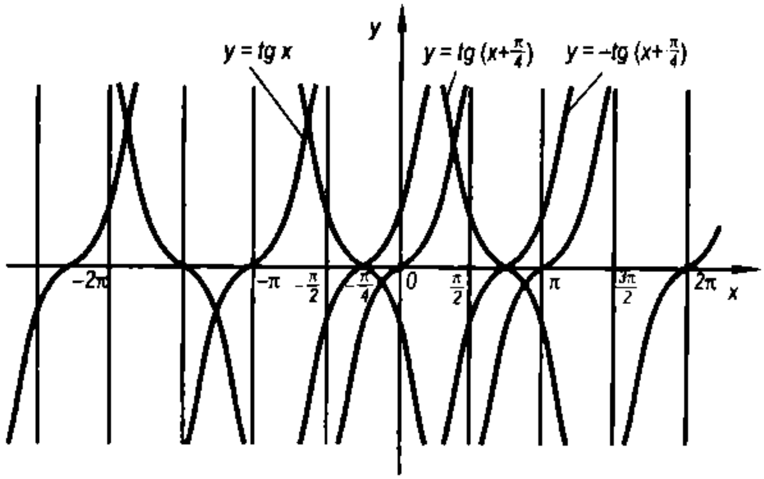
4) Оскільки $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, то згідно з означенням модуля $-\operatorname{ctg}\alpha$ має бути числом невід'ємним. Тому кут α може закінчуватися у II або у IV чверті.

Приклад 5. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

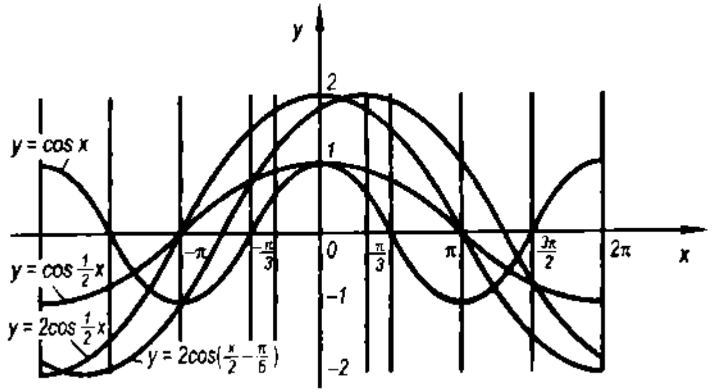
Розв'язання. 1) Графік даної функції побудуємо за допомогою геометричних перетворень відомого графіка функції $y = \operatorname{tg}x$.

Якщо $\operatorname{tg} x = f(x)$, то $-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -f(x+a)$, де $a = \frac{\pi}{4}$. Застосуємо відомі алгоритми побудови графіків за допомогою геометричних перетворень: а) побудуємо графік функції $y = \operatorname{tg} x$; б) побудуємо графік функції $-f(x) = -\operatorname{tg} x$, відобразивши попередньо побудований графік симетрично відносно осі Ox; в) побудуємо шуканий графік, паралельно перенісши здобутий графік на відстань $\frac{\pi}{4}$ вліво уздовж осі Ox (мал. 46).



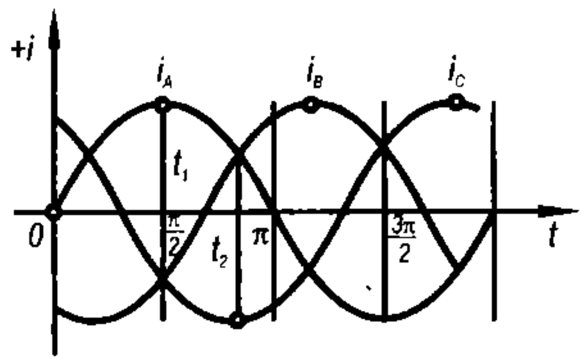
Мал. 46

2) Щоб побудувати графік функції $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ за допомогою геометричних перетворень відомого графіка функції $y = \cos x$, слід перетворити формулу, що задає функцію так, щоб перед аргументом x був коефіцієнт 1. Це дасть змогу використати побудову графіка $y = bf(x-a)$, якщо відомий графік $y = f(x)$. Отже, $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Послідовність побудови така. Будуємо графіки: а) $y = \cos x$; б) $y = \cos\frac{1}{2}x$ (розтяг графіка $y = \cos x$ удвоє від осі Oy); в) $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ (розтяг графіка $y = \cos\frac{1}{2}x$ удвоє від осі Ox); г) $y = 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ (паралельне перенесення графіка $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ уздовж осі Ox на відстань $\frac{\pi}{3}$ вправо) (мал. 47).



Мал. 47

П р и к л а д 6. За графіком синусоїдальних струмів (мал. 48), що проходять в обмотках котушок трифазної системи, визначити параметри, що їх характеризують.



Мал. 48

В і д п о в і д ь. В обмотках проходять синусоїдальні струми з однаковими амплітудами і однаковою кутовою частотою $\omega = 2\pi t$, фази яких зміщено на $\frac{1}{3}$ періоду.

§ 8. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

Під час вивчення тригонометричних функцій гострого кута у 8-му класі за теоремою Піфагора було доведено основну тригонометричну тотожність

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{1}$$

Вона виконується для тригонометричних функцій будь-якого кута і тригонометричних функцій довільного числового аргументу. Доведемо це. Якщо косинус числа α – це абсциса точки P_α одиничного кола, а синус числа α – ордината цієї точки, тобто $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, то точка $P_\alpha(x; y)$ віддалена від центра кола на відстань, що дорівнює 1. Відомо, що відстань точки від початку координат визначається за формулою $x^2 + y^2 = r^2$. Оскільки $r = 1$, то $x^2 + y^2 = 1$, тобто $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Означивши тангенс і котангенс через синус і косинус, ми ввели ще два незалежних співвідношення:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (3)$$

З тотожностей (1)–(3) як наслідок випливають ще кілька співвідношень, які часто використовують при обчисленні значень тригонометричних функцій через дане значення однієї з них та в інших задачах.

Перемноживши почленно рівності (2) і (3), дістанемо $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, звідки

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \qquad (4) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (5)$$

Поділивши обидві частини рівності (1) на $\cos^2\alpha$, дістанемо

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ або } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (6)$$

Тотожність (1) виконується для будь-якого значення аргументу, тотожності (2) і (3) – для всіх значень, крім тих, для яких $\cos\alpha = 0$ і $\sin\alpha = 0$.

Наведемо приклади застосування основних тригонометричних тотожностей для обчислення значень тригонометричних функцій за відомим значенням однієї з них. Вони ілюструють можливість спрощення обчислення значень тригонометричних виразів і показують шляхи доведення інших тригонометричних тотожностей.

Таблиця 3

Функція	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\mathrm{ctg}}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	

П р и к л а д 1. Знайти значення всіх тригонометричних функцій аргументу α, якщо $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. У III чверті, де на одиничному колі розміщено точки, які відповідають числу α, тангенс і котангенс додатні, а синус і косинус від'ємні.

За тотожністю $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ знаходимо $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16}{25}$, а $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

За тотожністю (1) маємо: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$, $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$. За тотожністю (4) знаходимо $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$. У таблиці 3 подано формули, які пов'язують тригонометричні функції одного й того самого аргументу. У наведених формулах перед знаком радикала треба поставити знак «плюс» або «мінус» залежно від того, в якій чверті лежить кут α, і саме так, щоб знак тригонометричної функції, який стоїть у лівій частині, збігався із знаком величини, що стоїть у правій частині рівності.

П р и к л а д 2. Спростити вираз:

1) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; 2) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

3) $1-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$; 4) $(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha(1-\cos\alpha)$;

5) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$; 6) $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha+1$;

7) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;

8) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$

$$=\frac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha.$$

2) $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+$ $+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha$.

3) $1-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha=1-\sin\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha=1-$ $-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$;

4) $(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha(1-\cos\alpha)=(1-\cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha=$ $=\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$;

5) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{-(1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}=-\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-\operatorname{ctg}^2\alpha$;

6) $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha+1=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha+1=$ $=\operatorname{tg}^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

7) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-$ $-(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-1=-2\cos^2\alpha$;

8) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-$ $-\cos^2\alpha)+2\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha=1$.

П р и к л а д 3. Дано $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Знайти $\sin\alpha\cos\alpha$.

Р о з в ' я з а н н я. Піднесемо обидві частини даної рівності до квадрата. Маємо $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=m^2$, або

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=m^2.$$

Звідси $1+2\sin\alpha\cos\alpha=m^2$, отже, $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{m^2-1}{2}$.

П р и к л а д 4. Обчислити $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Даний вираз слід спочатку виразити через $\operatorname{tg}\alpha$, а потім обчислити його значення. Для цього поділимо чисельник і знаменник даного дробу на $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

Якщо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{2}$, то $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{25}{4}-1}=\frac{10}{21}$.

П р и к л а д 5. Довести, що вираз $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ не залежить від α, тобто є величиною сталою.

Р о з в' я з а н н я. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\times$

$$\times\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\times$$

$$\times\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1.$$

П р и к л а д 6. Довести тотожність

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=2\operatorname{ctg}\alpha, \text{ якщо } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Р о з в' я з а н н я. Доведення тригонометричних тотожностей можна здійснювати різними способами:

1) за допомогою тотожних перетворень слід показати, що одну частину рівності (ліву чи праву) можна подати у вигляді другої;

2) кожну частину рівності звести до одного і того самого виразу;

3) скласти різницю лівої і правої частин рівностей і за допомогою тотожних перетворень показати, що ця різниця дорівнює 0.

Дану тотожність доведемо, користуючись першим способом:

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}-$$

$$-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}-$$

$$-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{|1+\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}-\frac{|1-\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\,\mathrm{ctg}\,\alpha,$$

оскільки синус і косинус, якщо $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, додатні, $1-\cos\alpha\geqslant 0$, тому $|\sin\alpha|=\sin\alpha$, $|1+\cos\alpha|=1+\cos\alpha$, $|1-\cos\alpha|=1-\cos\alpha$ (косинус за модулем не перевищує 1).

§ 9. Обчислення значень тригонометричних функцій і тригонометричних виразів за допомогою мікрокалькуляторів

1. Функції $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$. Значення цих функцій обчислюють за програмами: x $\boxed{\text{F}}$ sin; x $\boxed{\text{F}}$ cos; x $\boxed{\text{F}}$ tg [1]. Під час обчислення значень функції $y=\mathrm{ctg}\,x$ використовують тотожність $\mathrm{ctg}\,x=\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$. Тому програма обчислення має вигляд x $\boxed{\text{F}}$ tg $\boxed{\text{F}}$ 1/x.

Мікрокалькулятор дає змогу обчислювати значення тригонометричних функцій у градусній і радіанній мірах, причому перед обчисленням перемикач «Г — Р» треба встановити у відповідне положення.

Зазначимо, що, обчислюючи значення тригонометричних функцій або виразів з ними, аргумент x використовують у межах $0^\circ\leqslant x\leqslant 90^\circ$ (у градусній мірі) або

[1] Тут і далі використано мікрокалькулятор «Електроніка МКШ – 2».

$0 \leqslant x \leqslant 1,57$ (у радіанній мірі); для тангенсів відповідно у межах $0° \leqslant x < 90°$; $0 \leqslant x < 1,57$.

Якщо аргумент x задано цілим числом градусів, то спочатку це число вводять у регістр індикації (на екран), а потім натискують послідовно клавіш $\boxed{F}$ і клавіш відповідної тригонометричної функції.

Приклад 1. Знайти $\sin 75°$.

Програма. 75 $\boxed{F}$ <u>sin</u>.

Відповідь. $\sin 75° \approx 0,9659$.

У розглянутому прикладі восьмирозрядне число на індикаторі округлене до чотирьох правильних десяткових знаків.

Якщо аргумент подано у градусах і мінутах, то мінути попередньо перетворюють у частини градуса, а значення аргументу записують десятковим дробом, що містить цілу і дробову частину градусів. Наприклад, нехай $x = 24°12'$. Оскільки $12'$ становлять $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ частину градуса, то $x = 24\frac{1°}{5}$. Перетворення у десятковий дріб числа $24\frac{1}{5}$ виконують за програмою 1 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{+}$ 24 $\boxed{=}$.

Відповідь. $x = 24,2°$.

Програма обчислення значення $\sin 24°12'$ має вигляд
1 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{+}$ 24 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ <u>sin</u>.

Відповідь. $\sin 24°12' \approx 0,4099$.

Приклад 2. Обчислити $\cos \frac{7\pi}{3}$.

Встановлюємо перемикач на режим роботи у радіанній мірі. Оскільки $\cos \frac{7\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$, то програма має вигляд
$\boxed{F}$ <u>π</u> $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ <u>cos</u>.

Відповідь. $\cos \frac{7\pi}{3} = 0,5$.

Приклад 3. Обчислити $\cos \frac{2\pi}{3}$.

Зазначимо, що мікрокалькулятор обчислює лише модулі значень тригонометричних функцій. Тому знак мінус треба набирати додатково, натискуючи клавіш $\boxed{/-/}$ залежно від координатної чверті для конкретного аргументу. Оскільки $\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$, то можна скласти програму

$\boxed{F}$ $\underline{\pi}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\underline{\cos}$ $\boxed{/-/}$.

В і д п о в і д ь. $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -0,5$.

2. Обчислення значень виразів, що містять тригонометричні функції. Розглянемо два приклади.

П р и к л а д 4. Обчислити $\sin\alpha, \operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha \approx 0,52$ і $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Можна скористатися основними тригонометричними тотожностями і знайти наближені значення функцій за формулами:

1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \sin\alpha \approx \sqrt{1-0,52^2} \approx 0,85;$

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \operatorname{tg}\alpha \approx \dfrac{0,85}{0,52} \approx 1,6;$

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \operatorname{ctg}\alpha \approx \dfrac{1}{1,6} \approx 0,62.$

Усі три значення функцій можна знайти, користуючись неперервною програмою 1 $\boxed{-}$ 0,52 $\boxed{F}$ $\underline{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\underline{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\div}$ 0,52 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\underline{1/x}$.

В і д п о в і д ь. $\sin\alpha \approx 0,85; \operatorname{tg}\alpha \approx 1,6; \operatorname{ctg}\alpha \approx 0,61.$

П р и к л а д 5. Обчислити значення виразів:

1) $\sin 25^\circ + \cos 70^\circ$; 2) $a = \dfrac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$, якщо $b \approx 25, \alpha \approx$ $\approx 28^\circ, \beta \approx 65^\circ$.

П р о г р а м и.

1) 25 $\boxed{F}$ $\underline{\sin}$ $\boxed{+}$ 70 $\boxed{F}$ $\underline{\cos}$ $\boxed{=}$;

2) 25 $\boxed{\times}$ 28 $\boxed{F}$ $\underline{\sin}$ $\boxed{\div}$ 65 $\boxed{F}$ $\underline{\sin}$ $\boxed{=}$.

В і д п о в і д ь. 1) 0,7646; 2) $12,950039 \approx 13$.

Якщо у цих двох прикладах аргумент тригонометричних функцій був би виражений у градусах і мінутах, то довелося б використовувати регістр пам'яті. Адже під час обчислення значень кожної з тригонометричних функцій операційний регістр зайнятий, а його необхідно одночасно використовувати і для виконання дій над тригонометричними функціями (у даних прикладах додавання і ділення).

П р и к л а д 6. Обчислити значення виразів:

1) $\sin 25^\circ 20' + \cos 70^\circ 12'$; 2) $a = \dfrac{25,00\sin 28^\circ 15'}{\sin 65^\circ 42'}$.

П р о г р а м и.

1) 20 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{П}$ 12 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 70 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ cos $\boxed{+}$ $\boxed{ИП}$ $\boxed{=}$;

2) 42 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 65 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{П}$ 15 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 28 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{X}$ 25 $\boxed{\div}$ $\boxed{ИП}$ $\boxed{=}$.

В і д п о в і д ь. 1) 0,7666; 2) $12,983322 \approx 12,98$.

Обчислення двох останніх виразів можна виконувати неперервним ланцюгом, не звертаючись до пам'яті , якщо використати клавіші $\boxed{(}$ і $\boxed{)}$. Відповідні програми мають вигляд:

20 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{+}$ $\boxed{(}$ 12 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 70 $\boxed{)}$ $\boxed{F}$ cos $\boxed{=}$;

25 $\boxed{X}$ $\boxed{(}$ 15 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 28 $\boxed{)}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 42 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 65 $\boxed{)}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{=}$.

Перевірте відповіді, здобуті за цими програмами.

Розглянемо приклади обчислень більш складних виразів.

П р и к л а д 7. Знайти з точністю до 1 сторону в $\triangle ABC$, у якого $a \approx 36$, $c \approx 52$, $\angle B \approx 48°$.

За теоремою косинусів

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B},$$

$$b \approx \sqrt{36^2 + 52^2 - 2 \cdot 36 \cdot 52\cos 48°}.$$

Здобутий вираз можна обчислити кількома способами. Без використання регістра пам'яті послідовність обчислень буде такою:

1) знайти добуток $2 \cdot 36 \cdot 52\cos 48°$ і змінити знак результату за допомогою клавіша $\boxed{/-/}$;

2) додати до здобутого числа квадрати чисел 36 і 52 за допомогою клавіша x^2;

3) із здобутого результату добути квадратний корінь.

П р о г р а м а.

2 $\boxed{X}$ 36 $\boxed{X}$ 52 $\boxed{X}$ 48 $\boxed{F}$ cos $\boxed{+}$ $\boxed{/-/}$ 36 $\boxed{F}$ x^2 $\boxed{+}$ 52 $\boxed{F}$ x^2 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\sqrt{\ }$.

В і д п о в і д ь. $b \approx 38,662349 \approx 39$.

П р и к л а д 8. Обчислити величину заряду q кульки, яка має масу $m = 2,0$ г і обертається навколо нерухомого точкового заряду на нитці завдовжки $l = 1,2$ м, якщо період її обертання $T = 3,2$ с, а кут відхилення від вертикалі $\alpha = 25°$.

Після розв'язання задачі дістанемо відповідь у вигляді формули

$$q = l\sin\alpha\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m\left(g\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{4\pi^2}{T^2}l\sin\alpha\right)},$$

де $\varepsilon_0 = 1,000594$, $g = 9,8$ м/с.

Після підстановки числових значень треба обчислити вираз

$$q = 1,2\sin 25°\times$$
$$\times\sqrt{4\pi\cdot 1,000594\cdot 2,0\left(9,8\,\mathrm{tg}\,25° - \frac{4\pi^2}{3,2^2}\cdot 1,2\sin 25°\right)} =$$
$$= 1,2\sin 25°\times$$
$$\times\sqrt{8\pi\cdot 1,000594\left(9,8\,\mathrm{tg}\,25° - \frac{4\pi^2}{3,2^2}\cdot 1,2\sin 25°\right)}.$$

П р о г р а м а.

4 [X] [F] π [F] x^2 [÷] 3,2 [F] x^2 [X] 1,2 [X] 25 [F] sin

[=] [П] 9,8 [X] [F] tg [-] [ИП] [X] 1,000594 [X] [F] π

[X] 8 [=] [F] $\sqrt{\ }$ [X] 1,2 [X] 25 [F] sin [=].

В і д п о в і д ь. $q \approx 4,1$ Кл.

§ 10. Тригонометричні тотожності додавання

1. Формули тригонометричних функцій суми і різниці двох чисел.

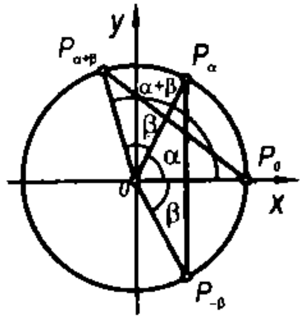
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{1}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (5)$$



Мал. 49

Доведемо формулу (1), з якої неважко дістати решту.

Нехай α і β — будь-які числа. Виберемо на одиничному колі точки $P_\alpha, P_{-\beta}$ і $P_{\alpha+\beta}$, які отримують з точки $P_0(1;0)$, повернувши її відповідно на кути α, $-\beta$, $\alpha+\beta$ (мал. 49). Враховуючи означення синуса і косинуса, можна записати координати вибраних точок: $P_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, $P_{-\beta}(\cos(-\beta);\sin(-\beta))$, $P_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\sin(\alpha+\beta))$.

Хорди $P_0P_{\alpha+\beta}$ і $P_{-\beta}P_\alpha$ рівні, оскільки рівні відповідні їм дуги кола. Знайдемо довжини цих хорд за формулою відстані між двома точками:

$$P_0P^2_{\alpha+\beta}=(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2;$$
$$P_{-\beta}P^2_\alpha=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

Оскільки $P_0P_{\alpha+\beta}=P_{-\beta}P_\alpha$, то $(P_0P_{\alpha+\beta})^2=(P_{-\beta}P_\alpha)^2$.

Тому $(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2$.

Застосовуючи властивість парності косинуса і непарності синуса та формулу квадрата двочлена, дістанемо:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+$$
$$+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha.$$

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, маємо $2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$.

Виразивши з останньої рівності $\cos(\alpha+\beta)$, дістанемо формулу (1) для косинуса суми двох аргументів:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Формулу (2) дістанемо, замінивши у (1) β на $-\beta$ і скориставшись парністю косинуса і непарністю синуса:

$$\cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta);$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Формулу додавання для синуса неважко дістати з формули (1) і формули зведення $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Вказану формулу зведення можна дістати і з формули (1), поклавши $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Справді, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + {}$ $+ \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\beta = 0\cdot\cos\beta + 1\cdot\sin\beta = \sin\beta$. Отже,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin\beta. \tag{6}$$

Замінивши у формулі (6) β на $\frac{\pi}{2}-\alpha$, дістанемо $\cos\left(\frac{\pi}{2} - {}\right.$ $\left.-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, або $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Отже,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha.$$

Виразимо $\sin(\alpha+\beta)$, скориставшись формулою (6) відносно числа $(\alpha+\beta)$ у зворотному порядку:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Отже, дістали формулу (3):

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Формулу (4) дістанемо, замінивши у формулі (3) β на $-\beta$ і скориставшись парністю косинуса і непарністю синуса:

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

звідки

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Формулу додавання для тангенса можна дістати за означенням тангенса і формулами додавання для синуса і косинуса:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Розділивши почленно чисельник і знаменник правої частини на вираз $\cos\alpha\cos\beta$ (поясніть, чому він не дорівнює 0), дістанемо:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}.$$

Отже, дістали формулу (5):

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}.$$

Якщо замінити у формулі (5) β на $-\beta$ і врахувати непарність тангенса, то

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}.$$

Застосуємо формулу (4) для доведення зростання функції $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, користуючись означенням зростаючої функції. Нехай $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $x_2 > x_1$. Доведемо, що різниця $f(x_2) - f(x_1)$ додатна.

Справді, $f(x_2) - f(x_1) = \operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_2 \cos x_1} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2} > 0$, оскільки за умовою $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, $0 < x_2 - x_1 < \pi$.

Тоді $\cos x_2 > 0$, $\cos x_1 > 0$, $\sin(x_2 - x_1) > 0$.

Отже, $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$.

2. Формули зведення. Властивість періодичності тригонометричних функцій будь-якого числового аргументу дає змогу звести обчислення їх значень до обчислення значень функції для аргументу від 0 до 2π (для синуса і косинуса) і від 0 до π (для тангенса і котангенса) за допомогою формул додавання.

Нехай, наприклад, треба обчислити $\cos\beta$, де $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Запишемо β у вигляді $\beta = \pi + \alpha$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. За формулою (1) додавання для косинуса дістанемо: $\cos(\pi + \alpha) = \cos\pi\cos\alpha - \sin\pi\sin\alpha = -\cos\alpha$. Формула $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ виконується при будь-якому α і називається формулою зведення (див. табл. 4)

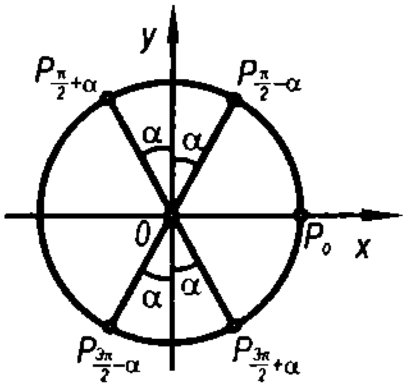
Таблиця 4

Функ-ція	$90°+\alpha$ $\frac{\pi}{2}+\alpha$	$180°+\alpha$ $\pi+\alpha$	$270°+\alpha$ $\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\alpha$	$90°-\alpha$ $\frac{\pi}{2}-\alpha$	$180°-\alpha$ $\pi-\alpha$	$270°-\alpha$ $\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin u$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\cos u$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} u$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} u$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

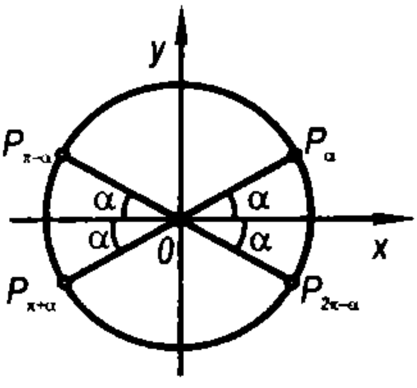
Щоб записати будь-яку формулу зведення, коли $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, корисно знати такі правила:

1) якщо кут α добудовується відносно вертикального діаметра (мал. 50) (це кути, що відповідають числам $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$,

$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$), то назва даної функції змінюється на *кофункцію* (синус на косинус, тангенс на котангенс і навпаки); якщо кут α добудовується відносно горизонтального діаметра (мал. 51) (це кути, що відповідають числам $\pi \pm \alpha$), то назва даної функції не змінюється;



Мал. 50



Мал. 51

2) перед утвореною функцією ставиться той знак, який має функція, що перетворюється за формулою зведення.

3. Тригонометричні функції подвійного аргументу. Це формули, які виражають функції 2α через функції аргументу α. Їх можна здобути з формул додавання.

Поклавши $\beta = \alpha$ у формулі (3), дістанемо формулу синуса подвійного аргументу:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (7)$$

З формули (1), якщо $\beta = \alpha$, дістанемо формулу косинуса подвійного аргументу:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (8)$$

Якщо змінити за допомогою основної тригонометричної тотожності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ функцію $\cos\alpha$ на $\sin\alpha$ або $\sin\alpha$ на $\cos\alpha$, то матимемо ще дві формули для $\cos 2\alpha$:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

З формули (5), якщо $\beta = \alpha$, маємо:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (9)$$

Формули (7) і (8) справджуються для будь-яких значень аргументу, а формула (9) — лише для тих, для яких існують $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $1-\operatorname{tg}^2\alpha \neq 0$.

4. Тригонометричні функції половинного аргументу. Запишемо д в і в і д о м і ф о р м у л и:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Якщо $x = \frac{\alpha}{2}$, ці формули матимуть вигляд:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}; \quad 1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Додаючи почленно ці дві рівності і віднімаючи від другої рівності першу, дістанемо такі дві формули:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Записавши їх відносно квадратів функцій, матимемо формули половинного аргументу для квадратів синуса і косинуса

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Звідси

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Ці формули дають змогу замінити квадрати тригонометричних функцій на перші степені функцій. Тому їх називають також формулами зниження степеня.

Поділимо почленно дві передостанні рівності, дістанемо формули для квадрата тангенса і котангенса половинного аргументу.

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Звідси

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

5. Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій. Ці формули дають змогу виражати суму й різницю однойменних тригонометричних функцій через добуток тригонометричних функцій і навпаки.

Щоб перетворити суму $\sin\alpha + \sin\beta$ у добуток, позначимо $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$ і використаємо формули додавання для синуса $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y$.

Враховуючи введене позначення, розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = \beta \end{cases}$$

відносно x і y. Дістанемо $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Отже,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (10)$$

Замінюючи у формулі (10) β на $-\beta$ і враховуючи непарність синуса, дістанемо $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Так само знаходимо $\cos\alpha + \cos\beta = \cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y + \cos x\cos y + \sin x\sin y = 2\cos x\cos y = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Отже, $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos(x+y) - \cos(x-y) =$$

$$= \cos x + \cos y - \sin x\sin y - \cos x + \cos y - \sin x\sin y =$$

$$= -2\sin x\sin y = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Тобто $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. (11)

Користуючись означенням цієї функції, знайдемо суму й різницю тангенсів:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (13)$$

Застосуємо формули різниці синусів і різниці косинусів для доведення зростання функції $y = \sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $y = \cos x$ на відрізку $[\pi; 2\pi]$.

Нехай $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $x_2 > x_1$. Доведемо, що різниця $f(x_2) - f(x_1)$ додатна. Справді, $f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$, оскільки за умовою $x_2 - x_1 > 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, тому $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2+x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, а значить $\cos\frac{x_2+x_1}{2} > 0$ і $\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$. Отже, $\sin x_2 > \sin x_1$.

Доведіть самостійно, що синус спадає на відрізках $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$, де $n \in Z$.

Нехай $x_1, x_2 \in [\pi; 2\pi]$ і $x_2 > x_1$. Доведемо, що різниця $f(x_2) - f(x_1)$ додатна. Справді, $f(x_2) - f(x_1) = \cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$, оскільки за умовою $\pi \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 2\pi$, тому $\pi < \frac{x_2+x_1}{2} < 2\pi$, $0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, а значить $\sin\frac{x_1+x_2}{2} < 0$, $\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$. Отже, $\cos x_2 > \cos x_1$.

Доведіть самостійно, що косинус спадає на відрізках $[2n\pi; \pi + 2n\pi]$, де $n \in Z$.

6. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму. Вивести формули перетворення добутку двох тригонометричних функцій у суму легко, застосувавши тотожності (1) і (2) та (3) і (4):

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}; \qquad (14)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}; \qquad (15)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (16)$$

7. Формули перетворення синуса і косинуса кута через тангенс половини цього кута. Маємо

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Поділимо чисельник і знаменник утвореного дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ за умови, що $\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$. Звідси $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, де $k \in Z$ і

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (17)$$

Таким же способом виразимо $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (18)$$

Якщо поділити почленно рівності (17) і (18), то дістанемо

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (19)$$

Виведені формули широко використовують для спрощення виразів, доведення тотожностей, розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей та ін.

Приклад 1. Обчислити значення виразів, не застосовуючи таблиці тригонометричних функцій і мікрокалькулятор:

1) $\cos 75°$, 2) $\sin \frac{7\pi}{12}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos 210°$;

5) $\sin 75° + \sin 15°$; 6) $\frac{\operatorname{tg} 13° + \operatorname{tg} 47°}{1 - \operatorname{tg} 13° \operatorname{tg} 47°}$; 7) $\sin 22°30'$;

8) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$, 9) $\sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{\pi}{24}$; 10) $\cos \frac{\alpha}{2}$,

якщо $\cos \alpha = \frac{119}{169}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. 1) Нехай $75° = 45° + 30°$. Тоді $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° = = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

2) $\sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \times$
$\times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$;

3) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$
$= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$;

4) $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = \cos 180° \cos 30° -$
$- \sin 180° \cdot \sin 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\sin 75° + \sin 15° = 2 \sin \frac{75° + 15°}{2} \cos \frac{75° - 15°}{2} =$
$= 2 \sin 45° \cos 30° = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

6) $\frac{\operatorname{tg} 13° + \operatorname{tg} 47°}{1 - \operatorname{tg} 13° \operatorname{tg} 47°} = \operatorname{tg}(13° + 47°) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$;

$$7)\ \sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(знак плюс перед коренем взято тому, що кут $22°30'$ належить I чверті, а синус у I чверті додатний);

$$8)\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1;$$

$$9)\ \sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)-\cos\left(-\frac{5\pi}{24}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\pi}{24}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{2});$$

$$10)\ \cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{119}{169}}{2}} = -\sqrt{\frac{169+119}{169\cdot 2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{288}{169\cdot 2}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

П р и к л а д 2. Спростити вирази:

1) $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\alpha-\pi)-\operatorname{tg}(\alpha-\pi)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}27°+\operatorname{tg}18°}{\operatorname{tg}27°\cdot\operatorname{tg}18°-1}$;

4) $\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$;

5) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$;

6) $\dfrac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha}$.

Розв'язання.

1) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=$

$=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$

$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta;$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\alpha-\pi)-\operatorname{tg}(\alpha-\pi)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=$
$=\cos\alpha-\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=$
$=\cos\alpha+\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=2\cos\alpha;$

3) $\frac{\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}18^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ\cdot\operatorname{tg}18^\circ-1}=-\frac{\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{tg}18^\circ}{1-\operatorname{tg}27^\circ\cdot\operatorname{tg}18^\circ}=$
$=-\operatorname{tg}(27^\circ+18^\circ)=-\operatorname{tg}45^\circ=-1;$

4) $\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha=(\cos^4\alpha-$ $-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)-4\cos^2\alpha\sin^2\alpha=(\cos^2\alpha-$ $-\sin^2\alpha)^2-(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos 4\alpha;$

5) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha=1-\cos\alpha+\cos\alpha=1;$

6) $\frac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha}=$

$=\frac{(\sin 8\alpha+\sin 12\alpha)+(\sin 9\alpha+\sin 11\alpha)+\sin 10\alpha}{(\cos 8\alpha+\cos 12\alpha)+(\cos 9\alpha+\cos 11\alpha)+\cos 10\alpha}=$

$=\frac{2\sin 10\alpha\cos 2\alpha+2\sin 10\alpha\cos\alpha+\sin 10\alpha}{2\cos 10\alpha\cos 2\alpha+2\cos 10\alpha\cos\alpha+\cos 10\alpha}=$

$=\frac{\sin 10\alpha(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}{\cos 10\alpha(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1}=\operatorname{tg}10\alpha.$

Приклад 3. Подати вираз у вигляді добутку або дробу:

1) $1-\cos\frac{5}{2}\alpha$; 2) $1+\sin 3\alpha$; 3) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$;

4) $1+\operatorname{tg}\alpha$; 5) $a\sin\alpha+b\cos\alpha$; 6) $3-\operatorname{tg}^2\alpha$.

Розв'язання.

1) $1-\cos\frac{5}{2}\alpha=2\sin^2\frac{5}{4}\alpha;$

2) $1+\sin 3\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\alpha\right);$

3) $1-\cos\alpha+\sin\alpha=(1-\cos\alpha)+\sin\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+$

$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}+\cos\frac{\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}=$$

$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

4) $1+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha};$$

5) $a\sin\alpha+b\cos\alpha=a\left(\sin\alpha+\frac{b}{a}\cos\alpha\right)=$

$$=a(\sin\alpha+\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha)=a\left(\sin\alpha+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right)=$$

$$=a\frac{\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi},$$

де $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$, оскільки будь-якому числу, в даному випадку $\frac{b}{a}$, $(a\neq 0)$, відповідає тангенс деякого кута φ. Кут φ завжди можна обчислити за відомим значенням тангенса;

6) $3-\operatorname{tg}^2\alpha=(\sqrt{3})^2-\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}^2\alpha=$

$$=\left(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}}\times$$

$$\times\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\alpha}.$$

П р и к л а д 4. Довести тотожності:

1) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta;$

2) $\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1;$

3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha$;

5) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Д о в е д е н н я. 1) Перетворимо ліву частину рівності за формулою (11):

$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta+\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta-\alpha+\beta)}{2} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\beta\cos\beta}{2} =$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta;$$

2) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta +$

$+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} =$

$= \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta + 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1$.

3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} =$

$= \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)} =$

$= \dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha$.

5) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\sin(90^\circ - \alpha) + \sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \sin\alpha} =$

$$= \frac{2\sin\frac{90^\circ-\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{90^\circ-\alpha-\alpha}{2}}{2\cos\frac{90^\circ-\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{90^\circ-\alpha-\alpha}{2}} = \frac{\sin 45^\circ\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos 45^\circ\sin(45^\circ-\alpha)} =$$

$$= \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha) = \operatorname{tg}(90^\circ-45^\circ+\alpha) = \operatorname{tg}(45^\circ+\alpha);$$

6) $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що називається функцією? Як позначають функції? Навести приклади функцій.

2. Що таке область визначення функції?

3. Що таке область значень, або область зміни функції? Навести приклади.

4. Назвати основні способи задання функцій.

5. Чи будь-яка формула задає функцію?

6. Яка функція називається зростаючою? Навести приклади.

7. Яка функція називається спадною? Навести приклади.

8. Як дослідити функцію на зростання або спадання за допомогою означення?

9. Яка функція називається парною? Навести приклади.

10. Яка функція називається непарною? Навести приклади.

11. Як дослідити функцію на парність чи непарність?

12. Яка властивість графіків парної і непарної функцій вам відома?

13. Яка функція називається лінійною? Який її графік?

14. Назвати властивості лінійної функції. Довести одну з них.

15. Навести приклади залежностей, які задаються за допомогою лінійної функції.

16. Яка функція називається оберненою пропорційністю? Прямою пропорційністю? Навести приклади залежностей, які задаються за допомогою цих функцій.

17. Назвати властивості функції $y = \frac{k}{x}$. Довести властивість непарності функції $y = \frac{k}{x}$.

18. Що є графіком функції $y = \frac{k}{x}$?

19. Назвати властивості функції $y = x^2$. Довести властивість спадання цієї функції на множині $(-\infty; 0)$.

20. Назвати властивості функції $y = x^3$ і довести властивість її зростання. Що є графіком цієї функції?

21. Назвати властивості функції $y = \sqrt{x}$. Довести властивість зростання цієї функції.

22. Яка функція називається квадратичною? Навести приклад залежності, яка задається за допомогою квадратичної функції.

23. Що є графіком квадратичної функції?

24. Довести, що вершиною графіка квадратичної функції є точка $M\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

25. Побудувати графік функції $y = [x]$.

26. Побудувати графік функції $y = \{x\}$.

27. Назвати основні види перетворень при побудові графіків функції шляхом геометричних перетворень графіків відомих функцій.

28. Як побудувати графік функцій $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, якщо дано графік функції $y = f(x)$?

29. Як побудувати графік функцій $y = |f(x)|$ і $y = f(|x|)$, якщо дано графік функції $y = f(x)$?

30. Як побудувати графіки функцій $y = f(x) \pm a$, $y = f(x \pm a)$, якщо дано графік функції $y = f(x)$ і $a > 0$?

31. Як побудувати графіки функцій $y = kf(x)$ і $y = f(kx)$, якщо дано графік $y = f(x)$ і $k > 0$?

32. Сформулювати означення тригонометричних функцій гострого кута у прямокутному трикутнику.

33. Сформулювати означення синуса і косинуса довільного кута.

34. Як означаються тангенс і котангенс кута?

35. Які існують системи вимірювання кутових величин?

36. Що покладено в основу введення радіанної системи вимірювання кутових величин?

37. Що таке радіан?

38. Які переваги і особливості радіанної системи вимірювання кутових величин над іншими системами?

39. Яка залежність між градусною і радіанною мірами кута?

40. Сформулювати означення синуса і косинуса довільного числа.

41. Як означаються тангенс і котангенс числового аргументу? Яка геометрична інтерпретація їх на одиничному колі?

42. Назвати числові значення тригонометричних функцій чисел $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

43. Дослідити зміну $\cos\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π.

44. Дослідити зміну $\sin\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π.

45. Як змінюються $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π?

46. Назвати знаки тригонометричних функцій у кожній в координатних чвертей.

47. Яка функція називається періодичною? Навести приклади періодичних функцій.

48. Довести, що найменшим додатним періодом синуса і косинуса є число 2π.

49. Довести, що найменшим додатним періодом тангенса і котангенса є число π.

50. Як побудувати графіки тригонометричних функцій числа? Побудувати графіки функцій $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$.

51. Побудувати графіки функцій $y = \cos x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

52. Назвати властивості функції $y = \sin x$. Довести властивість спадання на певних відрізках.

53. Назвати властивості функції $y = \cos x$. Довести властивість парності цієї функції.

54. Назвати властивості функції $y = \operatorname{tg} x$. Довести, що функція непарна на проміжках області визначення.

55. Назвати властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$. Довести, що вона спадна на всіх проміжках області визначення.

56. Довести основну тригонометричну тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

57. Які ще співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу існують?

58. Довести, що $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

59. Як обчислюються значення тригонометричних функцій за допомогою мікрокалькулятора?

60. Скласти програми для обчислення значень усіх тригонометричних функцій за відомим значенням однієї з них.

61. Скласти програму для обчислення сторони трикутника за теоремою синусів.

62. Скласти програму обчислення сторони трикутника за теоремою косинусів.

63. Довести формулу додавання для косинуса.

64. Довести формулу додавання для синуса.

65. Довести формулу додавання для тангенса.

66. Сформулювати правило користування формулами зведення.

67. Довести формули тригонометричних функцій подвійного аргументу.

68. Записати формули тригонометричних функцій половинного аргументу.

69. Довести формули суми і різниці синусів та косинусів.

70. Довести формули суми і різниці тангенсів.

ВПРАВИ[1]

1. Знайти область визначення функцій:

А

1) $y = \dfrac{6}{x-1}$; 2) $y = \sqrt{x-2}$; 3) $y = \sqrt[3]{\dfrac{3x-5}{x+2}}$;

4) $y = \sqrt{\dfrac{x-5}{2x+3}}$; 5) $y = \dfrac{2x}{x^2-5x+6}$;

6) $y = \sqrt{x^2+x-2}$; 7) $y = \dfrac{3}{x^2-1}$; 8) $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-5}$.

Б

9) $y = \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$; 10) $y = \dfrac{x}{x^2+x+1}$;

11) $y = \sqrt{16-x^2}$; 12) $y = \sqrt{4-|x|}$;

13) $y = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+3}$; 14) $y = \dfrac{4}{\sqrt{25-x^2}}$;

15) $y = \dfrac{2-x}{\sqrt[3]{2x-6}}$; 16) $y = \dfrac{x}{|x|}$.

В

17) $y = \dfrac{3}{4-\sqrt{x^2}}$; 18) $y = \sqrt{4-x} + \sqrt[4]{x-2} + \dfrac{4}{x-3}$;

19) $y = \dfrac{5}{\sqrt{9-|x|}} + \dfrac{1}{x-5}$; 20) $y = \dfrac{2}{|x|-1} + \dfrac{1}{x}$.

2. Дослідити на парність і непарність функції:

А

1) $y = x + x^3$; 2) $y = x^2 - 2$; 3) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

4) $y = x + \dfrac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{1-x^2}$; 6) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Б

7) $y = x^4 - 2x^2 + 3$; 8) $y = \sqrt{x}$; 9) $y = \sqrt[3]{x}$;

---

[1]Тут і далі буквами A, Б і B позначено вправи трьох рівнів складності: обов'язкового, підвищеного і поглибленого.

У вправах на с. 86–88 усі корені – арифметичні.

10) $y = x^3 - 5x + 1$; 11) $y = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$; 12) $y = x^2 - |x|$.

В

13) $y = |x^5|$; 14) $y = \dfrac{\sqrt[4]{4 - x^2}}{x}$; 15) $y = \dfrac{2x}{x - 3}$;
16) $y = \dfrac{2x}{x^2 + |x| + 1}$; 17) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$;
18) $y = \sqrt[3]{1 + x} + \sqrt[3]{1 - x}$.

3. Побудувати графік функцій:

А

1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = \dfrac{1}{x + 2}$; 3) $y = \dfrac{1}{x - 2}$;
4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = -\sqrt{x + 1}$; 6) $y = -\sqrt{x - 1}$;
7) $y = |x|$; 8) $y = |x - 3|$; 9) $y = |x + 3|$;
10) $y = x^3$; 11) $y = |x^3| + 4$; 12) $y = \dfrac{1}{2}|x^3| + 4$;
13) $y = x^2 - 5x + 6$; 14) $y = x^2 - 5|x| + 6$;
15) $y = x^2 - 5|x| + 6$;

Б

16) $y = \dfrac{6}{2 - x}$; 17) $y = \sqrt{1 - x}$; 18) $y = (x + 3)^3 + 1$;
19) $y = |x^2 - 5x + 6|$; 20) $y = 2 - \sqrt{-x}$; 21) $y = |2x + 3|$;
22) $y = \left(|x| - \dfrac{1}{2}\right)^3 + 1$; 23) $y = (2x + 1)^2$;
24) $y = |x^3 - 1| - 3$;

В

25) $y = \dfrac{6}{2 - x} + 3$; 26) $y = \dfrac{2 - x}{3x + 1}$; 27) $y = \dfrac{3}{3x - 2}$;
28) $y = \sqrt{2 - x}$; 29) $y = \sqrt{2x - 1} + 3$;
30) $y = 2\sqrt{1 - 3x}$; 31) $y = |2x - 3|$; 32) $y = -(x - 1)^3$;
33) $y = 2 - \sqrt{1 - |x|}$; 34) $y = \dfrac{|x|}{x}$; 35) $y = |x + 1| - x$;
36) $y = \sqrt{(x + 2)^2} + \sqrt{(x - 2)^2}$.

4. Подати кут β у вигляді $\beta = \alpha + 360°n$, де $n \in Z$, а α — додатний кут, менший від $360°$, якщо: а) $\beta = -180°$; б) $\beta = -780°$; в) $\beta = 1580°$; г) $\beta = 7242°$; д) $\beta = -1690°$.

5. Зобразити на колі у системі координат кут $\beta = \alpha + {}$ $+360°n$ при таких значеннях n і α : а) $n = 3, \alpha = 40°$; б) $n = -2, \alpha = 30°$; в) $n = 5, \alpha = -25°$; г) $n = -3, \alpha = 48°$.

6. Колесо машини за 2 с робить 6 обертів. Записати у градусах кут, на який повернеться колесо за 1 с; 10 с.

7. Через скільки хвилин після того, як годинник покаже 3 год, хвилинна стрілка наздожене годинну?

8. Записати у радіанній мірі кути: $15°$, $22°30'$, $51°$, $157°30'$, $162°$.

9. Подати у градусній мірі кути, що виміряні у радіанах: $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{10\pi}{5}$; $1,5$; $2,50$.

10. Побудувати на одиничному колі точки P_α, на які відображається початкова точка $P_0(1;0)$ при повороті кола навколо центра на α рад, якщо: а) $\alpha = \frac{\pi}{12}$; б) $\alpha = 2,5$; в) $\alpha = 2$; г) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

11. Довести, що $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

12. Знайти $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

13. Обгрунтувати знаки синуса у кожній з чотирьох координатних чвертей.

14. Дослідити характер зміни $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π.

15. На одиничному колі побудувати кути α такі, що:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -2$;

в) $\cos\alpha = -0,5$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = 1,5$.

16. Визначити знаки $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$, якщо:

а) $\alpha = 0,3$; б) $\alpha = \frac{12}{7}\pi$; в) $\alpha = 2$; г) $\alpha = -\frac{13\pi}{6}$.

17. Чи можлива рівність:

а) $\sin x = \frac{1}{5}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{3}$; в) $\cos x = 1,2$;

г) $\operatorname{tg} x = 3$; д) $\dfrac{1}{\sin x} = 0,9$; е) $\dfrac{1}{\cos x} = -1,5$?

18. Що більше:

а) $\sin 1$ чи $\sin 1,5$; б) $\cos 2$ чи $\cos 2,1$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$ чи $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$;

г) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}$ чи $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3,2}$?

19. Обчислити:

1) $3\cos\pi - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{2}$;

2) $2\sin\dfrac{\pi}{3} \doteq \sqrt{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{4}$;

3) $2\sin\dfrac{\pi}{6} - \cos\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$;

4) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{6}$.

20. Знайти найбільше і найменше значення виразів:

1) $2\cos x$;	4) $2\sin x - 3$;	7) $3 - \cos^2 x$;
2) $-5\sin x$;	5) $5\cos t + 1$;	8) $\dfrac{1}{2+\cos x}$;
3) $3 + 2\sin x$;	6) $2 + 3\sin^2 x$;	9) $\dfrac{1}{3-\sin x}$.

21. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайти:

а) $\sin 29°$; б) $\sin 0,48$; в) $\operatorname{tg} 1,5$; г) $-\operatorname{ctg} 2,5$; д) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$;

е) $\sin 48°32'$; є) $-\cos 0,7$; ж) $\operatorname{ctg} 100°42'$.

22. Звести до однойменних функцій гострого кута:

1) $\sin 425°$; 2) $\operatorname{tg}\dfrac{14\pi}{6}$; 3) $\cos(-1750°)$; 4) $\operatorname{ctg}\dfrac{8\pi}{3}$;

5) $\sin\dfrac{43}{3}\pi$; 6) $\cos(-1125°)$; 7) $\operatorname{ctg}(-12,3\pi)$; 8) $\operatorname{tg} 600°$.

23. Довести, що найменшим додатним періодом функції $y = \cos(kx+b)$ є число $T = \dfrac{2\pi}{|k|}$, а функції $y = \operatorname{tg}(kx+b)$ — число $T = \dfrac{\pi}{|k|}$.

24. Які з даних функцій періодичні? Знайти для періодичних функцій найменший додатний період: 1) $\operatorname{tg} 3x$; 2) $y = 5$; 3) $y = \cos\dfrac{x}{3}$; 4) $y = \{3x\}$; 5) $y = [x]$.

25. Обчислити:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)}{\sin\frac{26\pi}{6}}.$$

26. Спростити:

$$1)\ \frac{\sin^2(3\alpha+6\pi)}{\operatorname{tg}^2(2\pi+3\alpha)+\operatorname{tg}(5\pi+3\alpha)\operatorname{ctg}(3\alpha+\pi)};$$

$$2)\ \frac{\sin(\alpha+6\pi)\cdot\operatorname{ctg}(5\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(5\pi+\alpha)}.$$

А

27. Користуючись одиничним колом і графіком функції $y = \cos x$ на відрізку $[0; 2\pi]$, відповісти на шість запитань, які наведені у прикладі щодо функції $y = \sin x$ (с.46, 47).

28. Побудувати графіки функцій:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 2\cos x$; в) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = |\sin x|$.

Б

29. Користуючись одиничним колом і графіком функції $y = \operatorname{tg} x$, дослідити знаки функції, характер зміни її значень та нулі на проміжку $(0; 2\pi)$.

30. Побудувати графіки функцій:

а) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 2\operatorname{tg}\frac{1}{3}x$; в) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = \operatorname{tg}|x|$.

В

31. Знайти період функції $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ і відповісти на запитання, які пропонувались у прикладі щодо $y = \sin x$ (с.46, 47).

32. Побудувати графіки функцій:

а) $y = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$; б) $y = |\cos|x||$; в) $y = \frac{\sin x}{\sin x}$; г) $y = \sin x - \cos x$.

33. Знайти область визначення функцій:

1) $y = \frac{1}{\sin x}$; 2) $y = \frac{1}{\sin x - 1}$; 3) $y = \sin\frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

34. Знайти область значень функцій:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \operatorname{tg} x + 1$; 3) $y = 2\operatorname{ctg}^2 x + 3$; 4) $y = \cos x + 1$.

35. Яке з чисел більше:

1) $\cos\frac{\pi}{5}$ чи $\cos\frac{\pi}{4}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ чи $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$ чи $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$ чи $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$?

36. У яких чвертях може закінчуватися кут α, якщо:

1) $|\cos(-\alpha)| = -\cos\alpha$; 2) $|\operatorname{ctg}\alpha| = \operatorname{ctg}\alpha$;

3) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$; 4) $|\operatorname{tg}(-\alpha)| = -\operatorname{tg}\alpha$?

37. Розставити у порядку зростання числа:

а) $\cos 15°$; $\cos 70°$; $\cos(-25°)$; $\cos 230°$; $\cos(-130°)$;

б) $\cos 1,5$; $\cos(-1,3)$; $\cos\frac{3\pi}{2}$; $\cos(-2)$; $\cos\frac{6\pi}{5}$; $\cos 2$;

в) $\operatorname{ctg} 3$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}(-120°)$; $\operatorname{tg} 2$; $\operatorname{tg}(-3)$; $\operatorname{tg} 120°$.

38. Знайти проміжки знакосталості і нулі функцій:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \frac{1}{\sin x}$; 3) $y = \cos\frac{x}{3}$;

4) $y = \sin^2 x$; 5) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 6) $y = \operatorname{ctg} 2x$.

39. Побудувати графіки функцій:

А

1) $y = \cos\frac{1}{2}x$; 2) $y = |\cos x|$; 3) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

4) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Б

5) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$; 6) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

7) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; 8) $y = \left|2\sin\frac{x}{2}\right|$.

В

9) $y=2\sin|x|$, 10) $y=-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$;

11) $y=|\operatorname{tg}x|$; 12) $y=-\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$.

40. Спростити вирази:

А

1) $\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha$; 4) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$;

5) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; 6) $1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)$.

Б

7) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha+1)$;

8) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1$;

9) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; 10) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}-\cos\alpha$;

11) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$; 12) $\operatorname{tg}\alpha+\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{(1+\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha}$.

В

13) $\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$; 14) $\frac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\operatorname{tg}^2\alpha$;

15) $\left(\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$;

16) $\sqrt{\frac{8}{1+\cos\alpha}+\frac{8}{1-\cos\alpha}}$.

41. Дано: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$. Знайти: 1) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

42. Обчислити: а) $\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$;

б) $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.

43. Довести, що вираз $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ не залежить від α.

44. Обчислити значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них:

1) $\cos\alpha = -\dfrac{7}{25}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\operatorname{tg} x = 2$; $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{7}{24}$, $180° < x < 270°$;

4) $\sin x = -\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

45. Довести тотожності:

А

1) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

2) $(1-\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1+\operatorname{tg}\alpha)^2 = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$;

3) $(\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = \cos^2\alpha$;

4) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$.

Б

5) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

6) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \dfrac{1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$;

7) $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$;

8) $2\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}$.

В

9) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

10) $1 + \dfrac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

11) $1 - (\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

12) $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} + 1 = 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + \sin\alpha$.

46. Обчислити $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha \approx 0,48$ і $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

47. Обчислити з точністю до 10^{-3} значення виразів:

1) $\frac{12,3\sin 28°20'}{\sin 49°40'}$;

2) $a = \sqrt{35,2^2 + 47,6^2 - 2 \cdot 35,2 \cdot 47,6\cos 25°50'}$;

3) $\frac{95,2\sin 43°40'}{\sin 62°30'}$;

4) $c = \sqrt{41,25^2 + 72,73^2 - 2 \cdot 41,25 \cdot 72,73\cos 37°28'}$.

48. Знайти з точністю до $1°$ кут φ, якщо:

1) $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta$, де $\alpha = 28°, \beta = 56°$;

2) кут A в $\triangle ABC$, якщо $a = 42,\ b = 65,\ c = 28$;

3) кут φ, якщо $\sin\varphi = \sin\alpha\sin\beta$, де $\alpha = 42°36',\ \beta = 65°12'$;

4) кут A в $\triangle ABC$, якщо $c = 53,2$, $\angle C = 59°20'$, $a = 32,7$.

49. Знайти радіус кулі, вписаної у правильну трикутну піраміду, за формулою

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}},\ \text{якщо}\ a = 28,6,\ \alpha = 68°40'.$$

50. Обчислити початкову швидкість руху електрона за формулою $v = \sqrt{\frac{2leU}{md\sin\alpha}}$, де $l = 25$ см, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$Кл, $U = 2,1 \cdot 10^3$В, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$кг, $d = 56$ см; $\alpha = 32°$.

Зауваження. У запропонованих вправах значення лінійних елементів і кутів вважають наближеними, хоча і вжито знак точної рівності. Знак «=» можна вживати для наближених даних, коли всі цифри правильні. Результат обчислення слід округлити за правилами наближених обчислень.

51. Обчислити значення виразів, не застосовуючи тригонометричні таблиці і мікрокалькулятор:

1) $\cos 15°$;

2) $\cos(\alpha - \beta)$, якщо $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;   3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, якщо $\sin x = 0,6$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;

5) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $\sin\alpha=-0,8$;

6) $\frac{1+\operatorname{tg}4^\circ\operatorname{tg}49^\circ}{\operatorname{tg}49^\circ-\operatorname{tg}4^\circ}$; 7) $\cos^2 22^\circ 30'-\sin^2 22^\circ 30'$;

8) $\operatorname{tg}\frac{11}{12}\pi-\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi$; 9) $\sin 15^\circ\sin 45^\circ$; 10) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$.

52. Спростити вирази:

А

1) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$;

3) $\frac{\sin 11^\circ\cos 15^\circ+\cos 11^\circ\sin 15^\circ}{\sin 18^\circ\cos 12^\circ+\cos 18^\circ\sin 12^\circ}$; 4) $\frac{\operatorname{tg}7\alpha-\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}7\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha+1}$;

5) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 6) $\sqrt{1+\cos 8\alpha}$;

7) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$; 8) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

Б

9) $\frac{(1-\cos 2\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 10) $\frac{\sin(45^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ-\alpha)\cos(45^\circ+\alpha)}$;

11) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4\alpha}$; 12) $\frac{\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{13}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{13}{2}\pi\right)}$;

13) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$; 14) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$;

15) $\frac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$; 16) $\frac{1-\sin 2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$.

В

17) $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

18) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$;

19) $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}$;

20) $\dfrac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha - 1}$;

21) $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}}$, якщо $\pi < \alpha < 2\pi$;

22) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta} - \operatorname{tg}^2\beta$.

53. Записати вирази у вигляді добутку або дробу:

А

1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$; 2) $1 - \cos\dfrac{3}{2}\alpha$; 3) $1 + \sin 5\alpha$; 4) $1 - \operatorname{tg}\alpha$; 5) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha$; 6) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha$.

Б

7) $\dfrac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)}$; 8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$;

9) $\sqrt{3} - 2\cos 20^\circ$; 10) $\sqrt{1 + \dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}}$;

11) $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 12) $1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha$.

В

13) $\dfrac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}$;

14) $\operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 8\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha$;

15) $2 - \dfrac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}$; 16) $\dfrac{\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}$;

54. Довести тотожності:

А

1) $\cos\alpha\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \sin(\alpha+\beta)$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)} = -\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

4) $2\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha = \cos\alpha$;

Б

7) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}=-\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha;$

8) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$

9) $\dfrac{\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)}{4\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta;$

10) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha;$

11) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha;$

12) $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2};$

13) $4\sin^2\alpha-3=4\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right);$

14) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha.$

В

15) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right);$

16) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\times$
$\times\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right);$

17) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-2\sin 3\alpha\cos 3\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha;$

·18) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha};$

19) $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha};$

20) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta);$

21) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\dfrac{4}{\operatorname{tg}2\alpha\sin 2\alpha};$

22) $\dfrac{\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha.$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

§ 1. Обернені тригонометричні функції

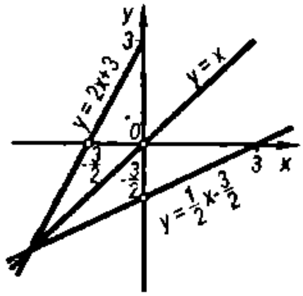
Поняття про обернену функцію. Під час розв'язування різних задач часто доводиться обчислювати значення функції за даним значенням аргументу. Наприклад, обчислювати площу S квадрата за довжиною його сторони за формулою $S = a^2$, яка задає залежність (функцію) площі від довжини a сторони квадрата. Проте часто доводиться розв'язувати обернену задачу: якою має бути сторона квадрата a, щоб площа S мала наперед задане значення $a = \sqrt{S}$, або обчислити час t, який затрачено тілом при рівномірному русі, якщо воно пройшло шлях певної довжини. Якщо $s = s_0 + vt$ (де v — стала) — формула шляху, яка задає лінійну функцію, то $s = f(t)$ – функція аргументу t. Якщо визначити t з формули шляху, то дістанемо іншу функцію $t = \frac{s}{v} - \frac{s_0}{v}$, також лінійну, але відносно аргументу s, яку в загальному вигляді позначимо $t = \varphi(s)$. Функцію $a = \sqrt{s}$ називають оберненою до функції $s = a^2$, а $t = \frac{s}{v} - \frac{s_0}{v}$ – оберненою до $s = s_0 + vt$.

Розглянемо приклади знаходження функцій, обернених до лінійної $y = kx + b$ і квадратичної $y = x^2$ функцій.

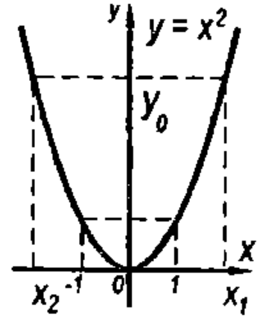
П р и к л а д 1. Нехай $y = 2x + 3$ – задана лінійна функція. Областю визначення і областю значень її є множина всіх дійсних чисел. Кожне своє значення y лінійна функція набуває лише при одному значенні аргументу x.

Вважатимемо змінну y незалежною (аргументом), а змінну x — залежною і розв'яжемо рівняння $y = 2x + 3$ відносно змінної x. Дістанемо теж лінійну функцію $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = \varphi(y)$, яка задає іншу залежність x від y.

Функція $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = \varphi(y)$ називається *оберненою* до функції $y = 2x + 3 = f(x)$.



Мал. 52



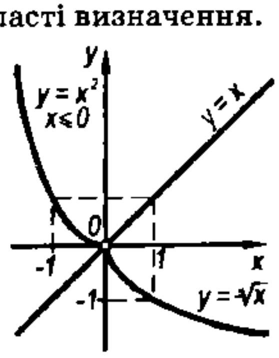
Мал. 53

Поміняємо у рівності $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$ позначення, оскільки прийнято незалежну змінну позначати буквою x, а залежну — буквою y. Дістанемо функцію $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \varphi(x)$, обернену до $y = 2x + 3$.

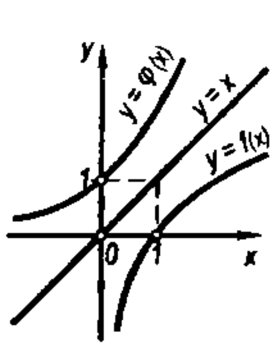
Побудуємо графіки функцій $y = 2x + 3$ і оберненої до неї $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ в одній системі координат (мал. 52).

Помічаємо, що графіки даної функції і оберненої до неї розміщені симетрично відносно прямої $y = x$, тобто симетрично відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Не слід думати, що кожна функція має обернену на своїй області визначення.



Мал. 54



Мал. 55

П р и к л а д 2. Нехай задано функцію $y = x^2$. Областю визначення її є множина всіх дійсних чисел, тобто R, а областю зміни — множина невід'ємних чисел, тобто $y \in [0; +\infty)$. Графік функції (мал. 53) показує, що кожне своє значення (крім $y_0 = 0$) вона набуває при двох значеннях аргументу x_1 і x_2. Якщо розглянути залежність x від y, то вона не буде функцією, оскільки одному значенню y_0 відповідає два значення x. Це означає, що функція $y = x^2$ на всій області визначення не має оберненої. Проте, якщо розглянути підмножини області визначення, наприклад $(-\infty; 0]$ або $[0; +\infty)$, то на цих підмножинах функція $y = x^2$ кожного свого значення набуває лише при одному значенні аргументу.

На першій з цих підмножин функція спадає, а на другій — зростає. На кожній з них існує функція, обернена до $y = x^2$.

Знайдемо, наприклад, функцію, обернену до $y = x^2$, якщо $x \in (-\infty; 0]$, тобто x — недодатне. Тут областю визначення є множина $(-\infty; 0]$, а областю значень — множина невід'ємних значень y, тобто $y \in [0; +\infty)$.

Вважатимемо тепер y незалежною змінною, а x — залежною і розв'яжемо рівняння $y = x^2$ відносно змінної x. Це квадратне рівняння. Воно має два корені $x = \pm\sqrt{y}$. Але за умовою x – недодатне, тому $x = -\sqrt{y} = \varphi(y)$.

Функція $x = -\sqrt{y} = \varphi(y)$ є оберненою до функції $y = x^2$ за умови $x \leqslant 0$.

Поміняємо у рівності $x = -\sqrt{y}$ позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо функцію $y = -\sqrt{x} = \varphi(x)$, обернену до $y = x^2, x \leqslant 0$.

Областю визначення оберненої функції $y = -\sqrt{x}$ є множина $[0; \infty)$, бо x в арифметичному корені невід'ємне, а областю зміни — множина $(-\infty; 0]$.

Помічаємо, що області визначення і зміни взаємно обернених функцій помінялись «своїми» множинами.

Побудуємо графіки функцій $y = x^2, x \leqslant 0$ і $y = -\sqrt{x}$ в одній системі координат (мал. 54). Побудовані графіки теж симетричні відносно прямої $y = x$.

Функція f, яка має обернену, називається *оборотною*.

Необхідною і достатньою умовою існування оборотної функції є така: вона має набувати кожного свого значення лише для одного значення аргументу.

Достатньою умовою існування оберненої функції для даної функції є її монотонність, тобто зростання або спадання на всій області визначення.

Наприклад, будь-яка лінійна функція $y = kx+b$, якщо $k \neq 0$, є оборотною, тобто має обернену. Такою ж є функція $y = x^3$, бо вона зростаюча на всій області визначення.

Оберненою до даної оборотної функції $y = f(x)$ називається така функція $x = \varphi(y)$, яка кожному y із множини значень функції $y = f(x)$ ставить у відповідність єдине число x з її області визначення.

Якщо поміняти позначення незалежної і залежної змінних, то обернену функцію до $y = f(x)$ запишемо у вигляді $y = \varphi(x)$.

Розглянемо алгоритм знаходження формули функції, оберненої до даної.

1) З'ясовуємо, чи є функція $y = f(x)$ оборотною на всій області визначення. Якщо ні, то виділяємо підмножину області визначення, де існує функція, обернена до $y = f(x)$.

2) Розв'язуємо рівняння $y = f(x)$ відносно змінної x, тобто знаходимо функцію $x = \varphi(y)$, яка є оберненою до $y = f(x)$.

3) Міняємо позначення змінних: незалежну змінну позначаємо x, а залежну – y. Дістаємо функцію $y = \varphi(x)$, обернену до $y = f(x)$ у прийнятих позначеннях змінних.

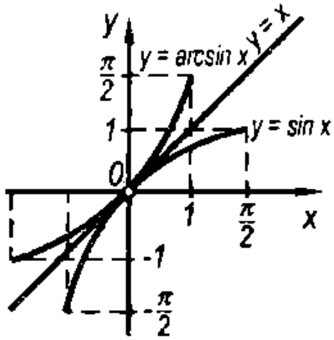
Можна довести загальне твердження: *графік функції φ, оберненої до функції f, симетричний графіку f відносно прямої $y = x$.*

Доведення. Якщо $y = f(x)$ – дана оборотна функція, то $x = \varphi(y)$ – обернена до неї. Це означає, що коли точка $M(x; y)$ належить графіку $y = f(x)$, то точка $N(y; x)$ належить графіку $x = \varphi(y)$ (або $y = \varphi(x)$). Але ці дві точки розміщені у системі координат симетрично відносно прямої $y = x$ (мал. 55).

Сформулюємо без доведення таку властивість оберненої функції: *якщо функція f зростаюча (спадна) на проміжку I, то вона оборотна. Обернена до f функція φ, визначена в області значень f, також є зростаючою (спадною).*

Функція, обернена до $y = \sin x$. Введемо обернену функцію, користуючись загальним алгоритмом знаходження функції, оберненої до даної.

1) Із властивості періодичності і графіка функції $y = \sin x$ (мал. 37) випливає, що кожне своє значення y вона набуває для нескінченної множини значень аргументу $x = x_0 + 2n\pi$. Це означає, що функція не є оборотною на всій області визначення. Разом з тим, на всіх проміжках, де вона зростає або спадає, існує обернена до неї. Виберемо такий із проміжків монотонності, значення x у якому найближчі до 0. Це проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Справді, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус набуває всіх своїх значень $y \in [-1; 1]$ і зростає.



Мал. 56

2) Вважатимемо y незалежною змінною (аргументом), а x — залежною і розв'яжемо рівняння $y = \sin x$ відносно x. Це означає, що треба знайти таке число x (кут або дугу), синус якого дорівнює y. На обраному проміжку таке число буде єдине. Для його позначення використовують символ $x = \arcsin y$. Отже, під знаком arcsin міститься значення синуса, а $x = \arcsin y = \varphi(y)$ — функція, обернена до $y = \sin x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Поміняємо позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо функцію $y = \arcsin x = \varphi(x)$, обернену до $y = \sin x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, записану у прийнятих позначеннях змінних.

Помічаємо, що і для будь-яких взаємно обернених функцій області визначення і значень цих функцій помінялись множинами. Для $y = \arcsin x$, x — значення синуса і $x \in [-1; 1]$ а y — число (кут або дуга), синус якого дорівнює x, і $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Графік функції $y = \arcsin x$ дістанемо з графіка функції $y = \sin x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (мал. 56).

Розглянемо властивості функції $y = \arcsin x$.

1) Областю визначення функції $y = \arcsin x$ є множина $[-1; 1]$, областю значень — множина $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При цьому, якщо $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, а якщо $-1 \leqslant x \leqslant 0$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant 0$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат (функція непарна), тобто $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Довести цю властивість можна так. Область визначення — множина, симетрична відносно 0. Доведемо, що $f(-x) = -f(x)$. Враховуючи область значень арксинуса, маємо $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(-x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Помножимо всі три частини останньої нерівності на -1, матимемо $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Запишемо синуси виразів $\arcsin(-x)$ і $-\arcsin x$: $\sin(\arcsin(-x)) = -x$, $\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$. Але якщо два числа належать одному і тому самому проміжку і синуси їх рівні, то і числа рівні в силу монотонності синуса на цьому проміжку. Отже, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю при $x = 0$.

5) Зростаюча за теоремою про властивість оберненої функції.

6) Додатна при $x \in [0; 1]$ і від'ємна при $x \in [-1; 0]$.

7) Набуває найбільшого значення, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$, якщо $x = 1$, і найменшого $-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = -1$.

Якщо в рівності $x = \arcsin y$ замінити y на $\sin x$, оскільки $y = \sin x$, то $\arcsin(\sin x) = x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Якщо від функції $y = \arcsin x$ перейдемо до оберненої функції $x = \sin y$, а в останній рівності замінимо y на $\arcsin x$, то дістанемо ще одну рівність $\sin(\arcsin x) = x$.

Рівності $\arcsin(\sin x) = x$ і $\sin(\arcsin x) = x$ використовують у різних тригонометричних обчисленнях. Згідно з цими рівностями:

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \arcsin\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Функція, обернена до $y = \cos x$. Із властивості періодичності і графіка функції $y = \cos x$ (мал. 38) випливає, що кожного свого значення y_0 функція набуває для нескінченної множини значень аргументу $x = x_0 + 2n\pi$. Це означає, що функція не є оборотною на всій області визначення. Разом з тим на всіх проміжках, де вона зростає або спадає, вона має обернену функцію. Виберемо один з них, зокрема проміжок $[0; \pi]$. При всіх $x \in [0; \pi]$ косинус набуває всіх своїх значень $[-1; 1]$ з області значень.

Вважатимемо y незалежною змінною (аргументом), а x — залежною і розв'яжемо рівняння $y = \cos x$ відносно змінної x. Це означає, що треба знайти таке число x (кут або дугу), косинус якого дорівнює y. На обраному проміжку таке число єдине і позначається $x = \arccos y$. Очевидно, що $x = \varphi(y)$. Отже, під знаком arccos міститься значення косинуса, а функція $x = \arccos y$ обернена до $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$.

Поміняємо позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо функцію $y = \arccos x$, обернену до $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$, записану у прийнятих позначеннях змінних.

Областю визначення функції $y = \arccos x$ є множина $[-1; 1]$, а областю значень $-[0; \pi]$, тобто $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$.

Графік функції $y = \arccos x$ дістанемо з графіка $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$, перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (мал. 57).

Розглянемо властивості функції $y = \arccos x$, що випливають з її графіка. Їх можна обґрунтувати так само, як і для функції $y = \arcsin x$.

1) Областю визначення функції $y = \arccos x$ є множина $[-1; 1]$, а областю значень — множина $[0; \pi]$. Якщо $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 \leqslant \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}$; при $-1 \leqslant x \leqslant 0$ $\frac{\pi}{2} \leqslant \arccos x \leqslant \pi$.

2) Графік функції не симетричний ні відносно початку координат, ні відносно осі Oy. Це означає, що функція не є ні парною, ні непарною. Для неї використовується рівність $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ (доведіть це самостійно).

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 1$.

5) Функція спадна.

6) Додатна на всій області визначення.

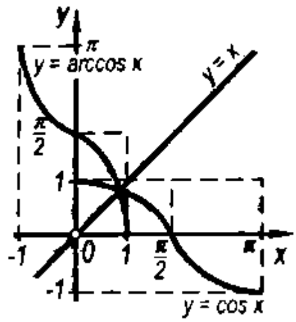
7) Функція набуває найбільшого значення π, якщо $x = -1$ і найменшого 0, якщо $x = 1$.

Для функції $y = \arccos x$ також справджуються рівності $\cos(\arccos x) = x$, $\arccos(\cos x) = x$ для $x \in [0; \pi]$. Обґрунтуйте це.

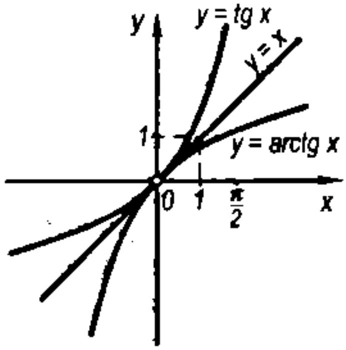
Функція, обернена до $y = \operatorname{tg} x$. Функція $y = \operatorname{tg} x$ набуває значення y_0 для нескінченної множини значень аргументу $x = x_0 + n\pi$, $n \in Z$. Тому вона не є оборотною на всій області визначення. Але на кожному з проміжків $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$ вона зростаюча, а тому має обернену. Виберемо один з таких проміжків, наприклад $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, значення x в якому найближчі до 0. Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то тангенс набуває всіх своїх значень $y \in (-\infty; \infty)$ з області значень.

Вважатимемо y незалежною змінною (аргументом), а x — залежною змінною і розв'яжемо рівняння $y = \operatorname{tg} x$ відносно x. Це означає, що треба знайти таке число (кут або дугу), тангенс якого дорівнює y. На обраному проміжку це число буде єдиним і позначається $x = \operatorname{arctg} y$. Очевидно, що $x = \varphi(y)$.

Отже, під знаком arctg міститься значення тангенса, а функція $x = \operatorname{arctg} y$ обернена до $y = \operatorname{tg} x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



Мал. 57



Мал. 58

Поміняємо позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо функцію $y = \operatorname{arctg} x = \varphi(x)$, обернену до $y = \operatorname{tg} x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, записану в прийнятих позначеннях змінних.

Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ дістанемо з графіка $y = \operatorname{tg} x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (мал. 58).

Розглянемо властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$, що випливають з її графіка.

1) Областю визначення функції $y = \operatorname{arctg} x$ є множина $(-\infty; +\infty)$, областю значень — множина $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо $0 \leqslant x < +\infty$, то $0 \leqslant \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, якщо $-\infty < x \leqslant 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x \leqslant 0$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат, це означає, що функція непарна, тобто $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ (доведіть це самостійно).

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 0$.

5) Функція зростаюча.

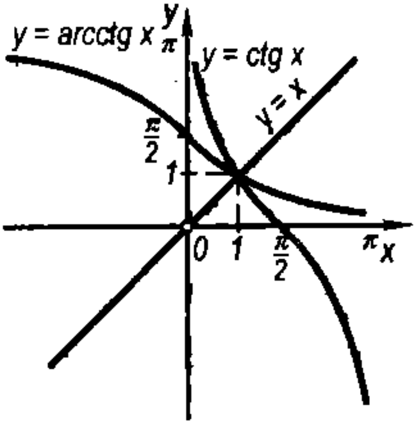
6) Додатна, якщо $0 < x < +\infty$, і від'ємна, якщо $-\infty < x < 0$.

7) Функція не набуває найбільшого і найменшого значень. Для функції $y = \operatorname{arctg} x$ також справджуються дві рівності $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ для $x \in$ $\in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Обґрунтуйте це.

Функція, обернена до $y = \operatorname{ctg} x$. Функція $y = \operatorname{ctg} x$ не є оборотною на області визначення, але має обернену на проміжках спадання. Виберемо один з них, наприклад $(0; \pi)$. Якщо $x \in (0; \pi)$, котангенс набуває всіх своїх значень $y \in (-\infty; +\infty)$.

Розв'яжемо рівняння $y = \operatorname{ctg} x$ відносно змінної x. Дістанемо функцію $x = \operatorname{arcctg} y - \varphi(y)$, обернену до $y = \operatorname{ctg} x$, якщо $x \in (0; \pi)$.

Поміняємо позначення змінних. Матимемо функцію $y = \operatorname{arcctg} x = \varphi(x)$, обернену до $y = \operatorname{ctg} x$, якщо $x \in (0; \pi)$, записану в прийнятих позначеннях.



Мал. 59

Областю визначення функції $y = \operatorname{arcctg} x$ є множина, $(-\infty; +\infty)$, областю значень — проміжок $(0; \pi)$.

Графік функції на проміжку $(0; \pi)$ дістанемо з графіка $y = \operatorname{ctg} x$, симетрично відобразивши його відносно прямої $y = x$ (мал. 59).

Назвіть властивості функції $y = \operatorname{arcctg} x$ за її графіком.

Приклади. Обчислити:

1) $\arcsin\frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; 4) $\operatorname{arcctg} 1$; 5) $\arcsin 0,8192$; 6) $2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$; 7) $\operatorname{arcctg} 0+\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 8) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 9) $\cos(\arccos 1)$; 10) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Р о з в' я з а н н я 1) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, оскільки $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$; оскільки $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; 3) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$; оскільки $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arcctg} 1=\frac{\pi}{4}$, оскільки $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$; 5) $\arcsin 0,8192\approx 0,9599$; оскільки за таблицями значень тригонометричних функцій кутів, виражених у радіанах, або обчислених мікрокалькулятором, синус числа 0,9599 дорівнює 0,8192; 6) $2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)-\arccos\frac{1}{2}=2\pi-2\arccos\frac{1}{2}-\arccos\frac{1}{2}=2\pi-3\arccos\frac{1}{2}=2\pi-3\frac{\pi}{3}=\pi$; 7) $\operatorname{arctg} 0+\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$, оскільки $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$; 8) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6},\right)=\frac{5\pi}{6}$, згідно з рівністю $\arcsin(\sin x)=x$; 9) $\cos(\arccos 1)=1$, згідно з рівністю $\cos(\arccos x)=x$; 10) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{1}{2}$ згідно з рівністю $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$.

Значення обернених тригонометричних функцій на мікрокалькуляторі обчислюють відповідно за такими програмами: x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\sin^{-1}}$; x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\cos^{-1}}$; x $\boxed{\text{F}}$ $\underline{\operatorname{tg}^{-1}}$.

Залежно від того, в якому вимірюванні (градусному чи радіанному) ми обчислюватимемо значення оберненої тригонометричної функції, встановлюється відповідне положення перемикача «Г—Р».

Аргумент x при цьому не може виходити за межі $0 \leqslant x \leqslant 1$ для арксинуса і арккосинуса та $0 \leqslant x \leqslant 500$ для арктангенса.

Приклад 1. Обчислити $\arcsin 0,75$ з точністю до 10^{-2} у градусній мірі.

Попередньо встановлюємо перемикач «Г—Р» на режим роботи у градусній мірі і обчислюємо значення $\arcsin 0,75$.

Програма.

$$0,75 \ \boxed{\mathrm{F}} \ \underline{\sin^{-1}}.$$

Відповідь. $\arcsin 0,75 \approx 0,955$.

Приклад 2. Обчислити з точністю до 10^{-3} у радіанній мірі $\arccos 0,578$.

Встановлюємо перемикач «Г–Р» на режим роботи у радіанній мірі і обчислюємо шукане значення за програмою:

$$0,578 \ \boxed{\mathrm{F}} \ \underline{\cos^{-1}}.$$

Відповідь. $\arccos 0,578 \approx 48,59°$.

§ 2. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Тригонометричними рівняннями називаються рівняння, у яких невідома (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції. Наприклад, $\sin x - \cos x = 0$; $2\sin x + \cos x = \frac{3}{2}\sin^2 2x$; $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$; $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

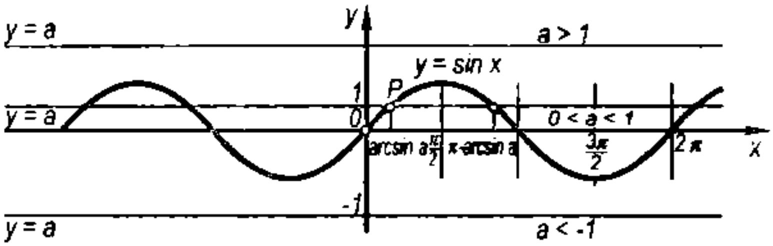
Тригонометричні рівняння, у яких змінна входить лише під знак тригонометричної функції, або зовсім не мають розв'язків, або мають здебільшого безліч їх внаслідок властивості періодичності тригонометричних функцій.

Не існує загального способу розв'язування будь-якого тригонометричного рівняння. Однак деякі способи розв'язування окремих видів тригонометричних рівнянь можна вказати. Як правило, розв'язування будь-якого тригонометричного рівняння зводиться до розв'язування найпростіших рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ рівносильне рівнянню $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$ тому немає потреби розглядати його окремо.

Розглянемо розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Рівняння $\sin x = a$. Розв'яжемо це рівняння спочатку графічно, побудувавши в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = a$.

Якщо $|a| > 1$, тобто при $a > 1$ і $a < -1$, пряма і синусоїда не перетинаються. Тому рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків (мал. 60).



Мал. 60

Знайдемо розв'язки, якщо $|a| \leqslant 1$, тобто коли $-1 \leqslant a \leqslant 1$, на відрізку $[-\pi; \pi]$, а потім скористаємося періодичністю функції синус.

Нехай $0 < a < 1$. Як видно з малюнка, пряма $y = a$ за цієї умови перетинає синусоїду у двох точках P_1 і P_2, абсциси яких належать проміжку $(0; \pi)$.

Оскільки розв'язування рівняння $\sin x = a$ зводиться до знаходження числа (геометрично кута чи дуги), синус якого дорівнює a, то цим числом є $\arcsin a$, якщо воно міститься на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Отже, абсцисою точки P_1 є $\arcsin a$. Абсцису точки P_2 запишемо через $\arcsin a$ як різницю $\pi - \arcsin a$.

Якщо додати до знайдених розв'язків період $2n\pi$, то при $0 < a < 1$ дістанемо всі розв'язки рівняння $\sin x = a$ у вигляді двох множин

$$x = \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z; \qquad (1)$$

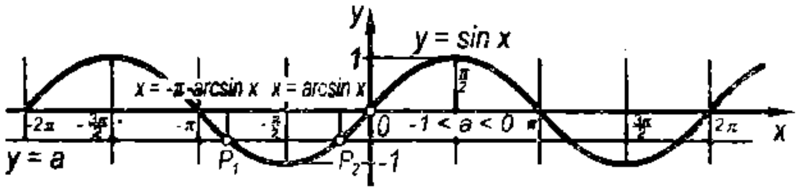
$$x = \pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n+1)\pi,\ n \in Z. \qquad (2)$$

Ці множини можна об'єднати в одну

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z, \qquad (3)$$

діставши загальну формулу розв'язків рівняння $\sin x = a$. Якщо k парне, тобто $k = 2n$, дістанемо множину (1), а якщо непарне, тобто $k = 2n + 1$, дістанемо множину (2).

Нехай $-1 < a < 0$. З малюнка 61 видно, що за цієї умови пряма $y = a$ перетинає синусоїду також у двох точках P_1 і P_2,



Мал. 61

абсциси яких належать проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Абсциса першої точки належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тому є $\arcsin a$. Абсцису другої P_2 можна записати через $\arcsin a$ як різницю $-\pi - \arcsin a$. Якщо до знайдених розв'язків додати період функції синуса, то дістанемо всі розв'язки рівняння $\sin x = a$, якщо $-1 < a < 0$ у вигляді двох множин

$$x = \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z,$$

$$x = -\pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n-1)\pi,\ n \in Z.$$

Об'єднуючи ці дві формули в одну, запишемо

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z.$$

Дістали ту саму загальну формулу розв'язків рівняння.

Якщо $a = 0$, то пряма $y = a$ перетинає синусоїду в точках, абсциси яких дорівнюють $n\pi$. Отже, рінняння $\sin x = 0$ має множину розв'язків $x = n\pi$, де $n \in Z$.

Якщо $a = 1$, то пряма дотикається до синусоїди у точках з абсцисами $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Таким чином, рівняння $\sin x = 1$ має множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$.

Якщо $a = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in Z$.

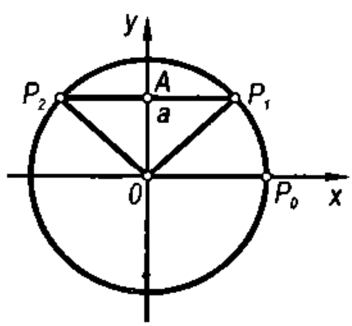
Неважко довести, що коли $a = 0$, $a = 1$ і $a = -1$, ті ж самі множини розв'язків можна знайти і за загальною формулою (3).

Загальну формулу розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $|a| \leqslant 1$ можна знайти і за допомогою одиничного кола.

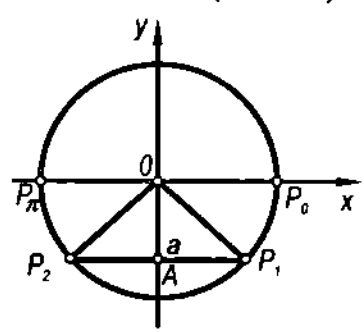
Нехай $0 < a < 1$. Оскільки a як значення синуса є ординатою точки одиничного кола, то відкладемо на осі Oy відрізок, що дорівнює a, і через кінець його A проведемо пряму, паралельну осі Ox (мал. 62). Вона перетне коло у двох точках P_1 і P_2. Оскільки треба знайти таке число (кут або дугу), синус якого дорівнює a, то таких чисел, яким відповідають точки P_1 і P_2 одиничного кола, виявилось два. Перше з них, яке міститься на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є $\arcsin a$, а друге дорівнює $\pi - \arcsin a$. Враховуючи періодичність функції синус, дістанемо дві множини розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $0 < a < 1$:

$$x = \arcsin a + 2n\pi, \ n \in Z,$$

$$a = \pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n + 1)\pi.$$



Мал. 62



Мал. 63

Після їх об'єднання дістанемо загальну формулу розв'язків

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad k \in Z.$$

Нехай $-1 < a < 0$. Відповідні точки P_1 і P_2, що зображують числа на одиничному колі, належать нижньому півколу (мал. 63). Точка P_1 зображує число, яке належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, і є $\arcsin a$. Точка P_2 зображує число, яке дорівнює $-\pi - \arcsin a$.

Враховуючи періодичність синуса, дістанемо дві множини розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $-1 < a < 0$:

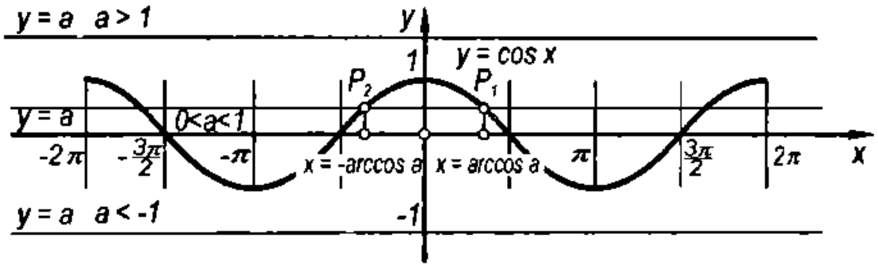
$$x = \arcsin a + 2n\pi, \quad n \in Z,$$

$$x = -\pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n - 1)\pi.$$

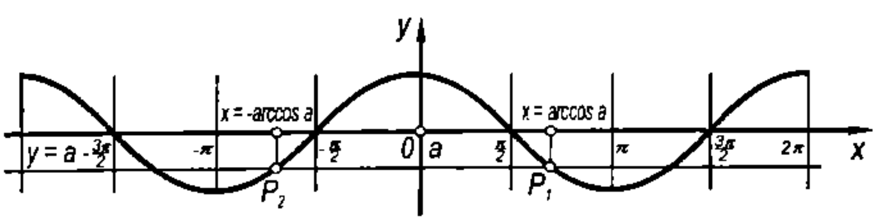
Об'єднуючи їх, дістанемо загальну формулу розв'язків рівняння

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad k \in Z.$$

Рівняння $\cos x = a$. Розв'язування його графічним способом показує (мал. 64), що при $|a| > 1$ рівняння не має розв'язків. Знайдемо розв'язки рівняння на проміжку $[-\pi; \pi]$, довжина якого дорівнює періоду 2π.



Мал. 64



Мал. 65

Нехай $0 < a < 1$. Проведемо пряму $y = a$. Вона перетне графік функції $y = \cos x$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ у двох точках P_1 і P_2. Оскільки треба знайти таке число (кут або дугу), косинус якого дорівнює a, то таких чисел, яким відповідають точки P_1 і P_2, виявилось два. Перше з них належить проміжку $(0; \pi)$ і є $\arccos a$, а друге — протилежне йому і дорівнює $-\arccos a$ внаслідок парності функції косинус. Враховуючи періодичність функції косинус, дістанемо дві множини розв'язків рівняння $\cos x = a$, якщо $0 < a < 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi, \quad n \in Z. \tag{4}$$

Нехай $-1 < a < 0$. З малюнка 65 видно, що пряма $y = a$ перетинає графік косинуса у двох точках P_1 і P_2. Абсциса точки P_1 належить проміжку $(0; \pi)$ і тому дорівнює $\arccos a$, абсциса другої точки P_2 дорівнює $\arccos a$. Додаючи до знайдених розв'язків період $2n\pi$, дістанемо дві множини розв'язків, які можна записати у вигляді однієї формули

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi, \quad n \in Z.$$

Отже, дістали ту саму загальну формулу (4) розв'язків рівняння $\cos x = a$, якщо $-1 < a < 0$.

Якщо $a = 0$, пряма $y = a$ перетинає графік косинуса у точках з абсцисами $\frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z$. Якщо $a = 1$, пряма дотикається до графіка косинуса у точках з абсцисами $2n\pi, \quad n \in Z$, якщо $a = -1$, дотикається у точках з абсцисами $(2n+1)\pi, \quad n \in Z$.

Доцільно запам'ятати «особливу» форму запису розв'язків рівняння $\cos x = a$ для окремих випадків:

якщо $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z$;

якщо $\cos x = 1$, то $x = 2n\pi, \quad n \in Z$.

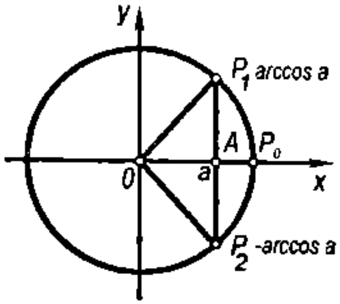
Неважко показати, що ці самі множини розв'язків для окремих значень a можна дістати із загальної формули розв'язків $x = \pm \arccos a + 2n\pi$. Справді, якщо

$$a = 0, \quad \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad \text{а} \quad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi =$$

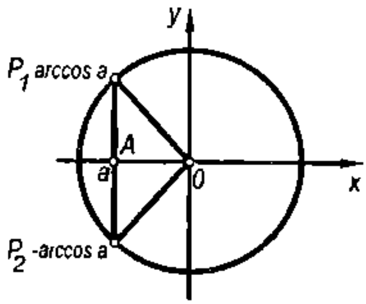
$$= (4n \pm 1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in Z.$$

Проте вираз $4n \pm 1$, якщо $n \in Z$, дає множину всіх непарних чисел, як і вираз $2n+1$, що входить до формули $x = \frac{\pi}{2} + n\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

Загальну формулу розв'язків рівняння $\cos x = a$, якщо $|a| \leqslant 1$, за допомогою одиничного кола можна вивести так само, як і для рівняння $\sin x = a$.



Мал. 66



Мал. 67

Як видно з малюнка 66, якщо $0 < a < 1$, пряма, паралельна осі Oy і проведена у кінці A відрізка осі абсцис завдовжки a, перетинає коло у двох точках P_1 і P_2. Точка P_1 відповідає числу, що належить проміжку $(0; \pi)$, тобто є $\arccos a$, друга точка P_2 відповідає числу $-\arccos a$ внаслідок парності функції косинус. Додаючи період до обох чисел, дістанемо загальну формулу (4) розв'язків рівняння $\cos x = a$, якщо $0 < a < 1$:

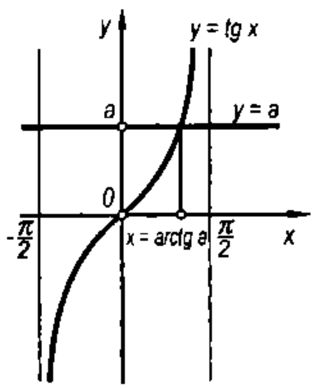
$$x = \pm \arccos a + 2n\pi, \quad n \in Z.$$

Якщо $-1 < a < 0$, пряма, проведена у кінці відрізка OA паралельно осі Oy, теж перетинає коло у двох точках P_1 і P_2 (мал. 67). Точка P_1 відповідає числу, що належить проміжку $(0; \pi)$, і є $\arccos a$, а P_2 відповідає числу $-\arccos a$. Додаючи період до обох чисел, знов дістанемо ту саму загальну формулу розв'язків рівняння $\cos x = a$.

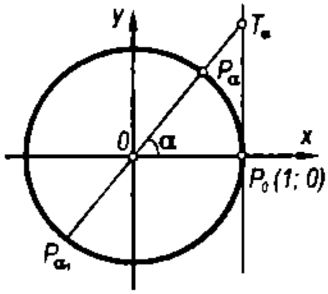
Рівняння $\operatorname{tg} x = a$. Оскільки областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина всіх дійсних чисел, то знайдемо розв'язки рівняння при будь-якому a на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, довжина якого дорівнює періоду π, а потім скористаємося періодичністю функції тангенса.

Графічний спосіб розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ (мал. 68) показує, що на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ пряма $y = a$ перетинає графік тангенса лише в одній точці, абсцисою якої є arctg a. Враховуючи періодичність функції $y = \operatorname{tg} x$, дістанемо загальну формулу розв'язків рівняння $\operatorname{tg} x = a$, тобто множину

$$x = \operatorname{arctg} a + n\pi, \quad n \in Z. \qquad (5)$$



Мал. 68



Мал. 69

Розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ за допомогою одиничного кола на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ приводить до тієї самої множини. Оскільки $\operatorname{tg} \alpha$ — це ордината точки T_α перетину прямої OP_α з лінією тангенсів (мал. 69), а пряма OT_α перетинає одиничне коло у двох точках P_α і P_{α_1}, то в інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ потрапляє лише одна з них P_α, яка відповідає числу arctg a. Всі інші розв'язки дістанемо, додавши до цього числа період $n\pi$, $n \in Z$, тобто $x = \operatorname{arctg} a + n\pi$.

Отже, маємо загальні розв'язки трьох найпростіших тригонометричних рівнянь:

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \quad n \in Z,$$

$$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2n\pi, \quad n \in Z,$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + n\pi, \quad n \in Z.$$

Покажемо застосування здобутих формул.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення синуса за умовою від'ємне, то $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ вибираємо на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$. Тому $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, а за формулою (3) $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + k\pi = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z.$

П р и к л а д 2. 2. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення синуса за умовою додатне, то значення $\arcsin\frac{1}{2}$ вибираємо на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, тому за формулою (3) $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in Z.$

П р и к л а д 3. Розв'язати рівняння $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення косинуса за умовою додатне, то $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ вибираємо з проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, тобто $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Отже, за формулою (4), $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \ n \in Z.$

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення косинуса за умовою від'ємне, то $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ вибираємо з проміжку $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. Отже, за формулою (4), $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, тому $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in Z.$

П р и к л а д 5. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення тангенса за умовою додатне, то $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ вибираємо з проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, тому, за формулою (5), $x = \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in Z.$

П р и к л а д 6. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x = -1$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення тангенса за умовою від'ємне, то $\operatorname{arctg}(-1)$ вибираємо з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Отже, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, тому, за формулою (5), $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in Z$.

П р и к л а д 7. Розв'язати рівняння $\cos x = -0,3257$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення косинуса за умовою від'ємне, то $\arccos(-0,3257)$ вибираємо з проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. За формулою (4), використовуючи таблиці або мікрокалькулятор, маємо

$$x = \pm 1,9044 + 2n\pi, \quad n \in Z.$$

До розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь безпосередньо зводять розв'язування тригонометричних рівнянь виду $\sin(kx + \varphi) = a$, $\cos(kx + \varphi) = a$, $\operatorname{tg}(kx + \varphi) = a$. Формули (3) – (5) застосовують для знаходження виразу $(kx + \varphi)$, а після цього знаходять x із здобутого рівняння.

П р и к л а д 8. Розв'язати рівняння $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. За формулою (3), $2x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi$, $2x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

П р и к л а д 9. Розв'язати рівняння $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. За формулою (4), $\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$; $\frac{2}{3}x = \pm\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $x = \pm\pi + \frac{\pi}{4} + 3n\pi, n \in Z$.

§ 3. Деякі способи розв'язування тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших

Розглянемо окремо способи розв'язування деяких тригонометричних рівнянь на прикладі одного рівняння і спробуємо обґрунтувати доцільність використання кожного з них. Розв'яжемо рівняння

$$\sin x - \cos x = 0. \tag{1}$$

1. Спосіб зведення до однієї тригонометричної функції (алгебраїчний спосіб). Цим способом розв'язують рівняння, до складу яких входять різні тригонометричні функції одного і того самого аргументу. Використовуючи основні тригонометричні тотожності, всі функції виражають через одну функцію, а потім розв'язують алгебраїчне рівняння відносно цієї функції.

Отже, перенесемо $\cos x$ у праву частину рівняння і виразимо його через $\sin x$ за формулою $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$. Дістанемо рівняння

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}. \qquad (2)$$

Піднесемо обидві частини рівняння (2) до квадрата. Дістанемо $\sin^2 x = 1-\sin^2 x$, або $2\sin^2 x = 1$, звідки $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Добудемо квадратний корінь з обох частин рівняння, використовуючи тотожність $\sqrt{a^2} = |a|$. Маємо $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Розглянемо два найпростіших тригонометричних рівняння:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi,$$

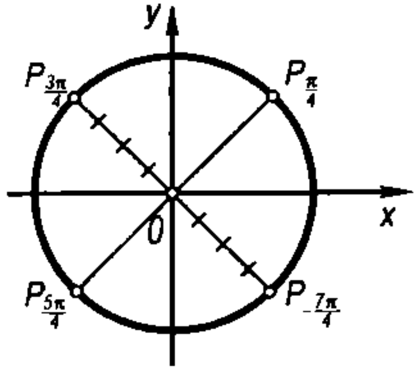
$$\text{або} \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z,$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi,$$

$$\text{або} \quad x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Оскільки ми виконували піднесення обох частин рівняння (2) до квадрата, то можливі порушення рівносильності, тобто рівняння $\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$, а отже, і $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ можуть мати сторонні розв'язки.

Щоб відкинути сторонні розв'язки, зробимо перевірку на відрізку завдовжки 2π, зокрема на $[0; 2\pi]$, враховуючи, що найменшим додатним періодом синуса і косинуса є число 2π. Для цього зручно використати одиничне коло. Позначимо на одиничному колі всі точки, які відповідають числам, що містяться у знайдених серіях розв'язків (мал. 70).



Мал. 70

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{і} \quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Перша формула, якщо $k = 0, \pm 1, \pm 2$, дає точки $P_{\frac{\pi}{4}}, P_{\frac{3\pi}{4}}$.

Друга формула, якщо $k = 0, \pm 1, \pm 2$, дає точки $P_{\frac{7\pi}{4}}, P_{\frac{5\pi}{4}}$.

Підставимо кожне із здобутих чисел у дане рівняння:

якщо $x = \frac{\pi}{4}$, то $\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad 0 = 0;$

якщо $x = \frac{3\pi}{4}$, то $\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \neq 0;$

якщо $x = \frac{7\pi}{4}$, то $\sin \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq 0;$

якщо $x = \frac{5\pi}{4}$, то $\sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \quad 0 = 0.$

Отже, дане рівняння задовольняють лише розв'язки з двох множин:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \quad n \in Z \quad \text{і} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \quad n \in Z.$$

Їх можна записати однією формулою, якщо перетворити другу формулу так:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + \pi + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi.$$

У першій серії до $\frac{\pi}{4}$ додають число $2n\pi$, а у другій — $(2n+1)\pi$. Парні і непарні числа утворюють множину цілих чисел. Тому об'єднана формула розв'язків матиме вигляд

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Способом зведення до однієї функції можна розв'язувати, наприклад, такі рівняння: $6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0$, $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$, $\cos^2 x + 2\sin^2 x - \cos x = 0$ та ін.

2. Спосіб розкладання на множники. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь цим способом усі члени рівняння переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток двох або кількох співмножників дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли принаймні один із співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають смислу.

У даному рівнянні (1) всі члени містяться у лівій частині. Запишемо $\cos x$ через $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ і застосуємо формулу різниці синусів $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$;

$2\cos\dfrac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\sin\dfrac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 0.$

Звідси $2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Оскільки $2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$, то $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Отже, $x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, а $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

Дістали ту саму множину розв'язків, що й під час розв'язування першим способом, але коротшим шляхом. Крім того, під час розв'язування не було порушення рівносильності рівнянь, тому в перевірці немає потреби.

3. Спосіб розв'язування однорідних рівнянь. Цей спосіб застосовують під час розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь, тобто таких, у яких ліва частина є многочленом, у кожному члені якого сума показників степенів синуса і косинуса одного і того самого аргументу однакова, а права — нуль. У загальному випадку однорідне тригонометричне рівняння можна записати так:

$$a\sin^n x + b\sin^{n-1}x\cos x + \ldots + m\sin x\cos^{n-1}x +$$

$$+ l\cos^n x = 0, \quad a \neq 0.$$

Однорідне рівняння n-го степеня відносно синуса і косинуса розв'язують діленням обох частин на $\cos^n x$. Проте попередньо слід довести, що $\cos x \neq 0$. Використаємо для цього метод доведення від супротивного. Припустимо, що $\cos x = 0$. Тоді, підставляючи у дане рівняння замість $\cos x$ число 0, дістанемо $a\sin^n x = 0$, звідки $\sin x = 0$. А це суперечить властивостям синуса і косинуса одного і того самого аргументу, оскільки $\cos x \neq 0$, якщо $\sin x = 1$. Поділивши на $\cos^n x \neq 0$ обидві частини однорідного рівняння, дістанемо алгебраїчне відносно функції тангенса рівняння $a\,\mathrm{tg}^n x + b\,\mathrm{tg}^{n-1} x + \ldots + m\,\mathrm{tg}\, x + l = 0$.

Дане рівняння $\sin x - \cos x = 0$ однорідне. Доведемо, що $\cos x \neq 0$. Це так, бо якщо $\cos x = 0$, мала б виконуватись рівність $\sin x = 0$, а це неможливо для одного і того самого аргументу.

Поділимо обидві частини рівняння на $\cos x \neq 0$. Дістанемо $\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$, або $\mathrm{tg}\, x = 1$, звідки $x = \mathrm{arctg}\, 1 + k\pi$, або $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z$.

Не слід думати, що під час розв'язування однорідних рівнянь завжди можна ділити на $\cos^n x$. Наприклад, якщо у рівнянні $a\cos^2 x + b\sin x\cos x = 0$ поділити обидві частини на $\cos^2 x$, то можна загубити серію розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Причина полягає в тому, що в цьому рівнянні $\cos x$ може дорівнювати нулю, тому його треба розв'язувати способом розкладання на множники $\cos^2 x(a + b\,\mathrm{tg}\, x) = 0$ і т. д.

4. Спосіб введення допоміжного аргументу. Запишемо дане рівняння у вигляді $\sin x - 1 \cdot \cos x = 0$. Замінимо 1 на $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$. Дістанемо $\sin x - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\cos x = 0$, $\sin x - \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos x =$

$= 0$. Помножимо обидві частини рівняння на $\cos\frac{\pi}{4} \neq 0$. Дістанемо $\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = 0$, або $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Звідси $x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $\quad k \in Z$.

Спосіб уведення допоміжного аргументу застосовують під час розв'язування лінійних тригонометричних рівнянь, якими називаються рівняння виду $a\sin x + b\cos x = c$. Дане рівняння є окремим випадком лінійного.

Розглянемо у загальному випадку розв'язування лінійного тригонометричного рівняння способом уведення допоміжного аргументу. Винесемо за дужки з лівої частини рівняння $\sqrt{a^2+b^2}$. Дістанемо

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = c.$$

Очевидно, що $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$ і $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$. Крім того, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Це означає, що коли $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, матимемо $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

Підставимо у попереднє рівняння ці вирази. Дістанемо

$$\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) = c, \quad \text{або}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) = c, \quad \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

За умови, що $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$ або $c^2 \leqslant a^2+b^2$, останнє тригонометричне рівняння має розв'язок

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + k\pi,$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + k\pi,$$

де $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, оскільки $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

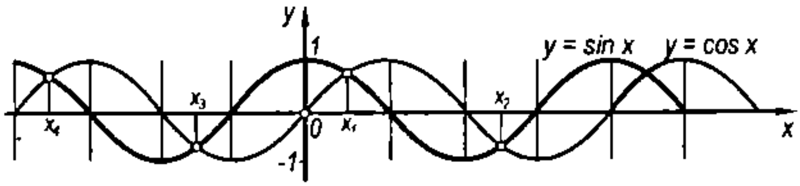
Отже, перед розв'язуванням лінійного тригонометричного рівняння треба перевірити, чи виконується умова

$c^2 \leqslant a^2 + b^2$. Зафіксуємо здобуту формулу при розв'язуванні даного рівняння:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi). \qquad (3)$$

Будемо користуватися нею під час розв'язування інших задач, пов'язаних з тригонометричними функціями.

Застосовуючи цей загальний спосіб розв'язування, зокрема здобуту формулу (3), до даного рівняння $\sin x - \cos x = 0$, дістанемо $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, бо $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Звідси $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$.



Мал. 71

Лінійне тригонометричне рівняння можна розв'язати ще кількома способами. Зокрема, можна звести його до однорідного, ввівши заміну $1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}$ як множник c і замінивши $\sin x$ та $\cos x$ за формулами подвійного аргументу: $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

Можна також замінити $\sin x$ і $\cos x$ на тангенс половинного кута за формулами

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

5. Спосіб піднесення до квадрата. Рівняння (1) можна розв'язати способом піднесення обох частин до квадрата. Отже,

$$(\sin x - \cos x)^2 = 0, \quad \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0,$$

$$1 - \sin 2x = 0, \quad \sin 2x = 1, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

У цьому разі піднесення до квадрата не спричиняє появу сторонніх розв'язків.

6. Графічний спосіб. Запишемо дане рівняння у вигляді $\sin x = \cos x$ і введемо функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$. Побудувавши в одній системі координат графіки цих функцій, знайдемо розв'язки рівняння як абсциси точок перетину графіків (мал. 71).

Порівнюючи розглянуті способи розв'язування рівняння $\sin x - \cos x = 0$, неважко зробити висновок, що найменш раціональним є перший (алгебраїчний) спосіб, який призводить до появи сторонніх розв'язків і потребує перевірки.

§ 4. Приклади розв'язування деяких інших видів тригонометричних рівнянь

Розглянемо приклад рівняння, розв'язування якого вимагає виключення сторонніх розв'язків.

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння

$$\sin 2x \cdot \operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Прирівнявши до нуля кожен із співмножників, розв'яжемо здобуті рівняння, а із знайдених розв'язків виключимо ті, при яких інші співмножники втрачають смисл:

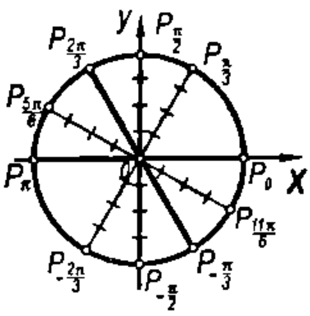
$$\sin 2x = 0, \quad 2x = k\pi, \quad x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z;$$

$$\operatorname{tg} 3x = 0, \quad 3x = n\pi, \quad x = n\frac{\pi}{3}, \quad n \in Z,$$

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3} = m\pi,$$

$$-x + \frac{5\pi}{6} = m\pi, x = \frac{5\pi}{6} + p\pi, \ p \in Z.$$

Оскільки синус існує для будь-яких аргументів, то із знайдених розв'язків слід виключити ті, при яких не існують $\operatorname{tg} 3x$ і $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Для цього розкладемо формули, за допомогою яких записано розв'язки кожного з трьох рівнянь, на елементарні (елементарними називають формули розв'язків виду $x = \alpha + 2n\pi$, де $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ і зобразимо їх на одиничних колах (мал. 72). Це можна зробити, оскільки період 2π є спільним для всіх трьох співмножників.



Мал. 72

Перевірка показала, що із 10 елементарних формул розв'язків, зображених на малюнках, шість виявилися сторонніми для даного рівняння (вони перекреслені), оскільки для таких чисел тангенс і котангенс не існують.

Отже, розв'язки рівняння запишемо у вигляді $x = m\pi$, $x = \frac{2\pi}{3} + m\pi$, $m \in Z$.

Рівняння, що містять тригонометричні функції у знаменнику, як і дробові раціональні рівняння, зводять до виду $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності дробу нулю.

Наприклад, у рівнянні $\frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$ чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$, але при цих значеннях втрачає смисл знаменник, бо $\operatorname{tg} x$ не існує.

П р и к л а д 2. Розв'язати рівняння $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}$.

Р о з в' я з а н н я.

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} - \sin \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{\sin x - \sin \frac{x}{2} \cdot (1 + \cos x)}{1 + \cos x} = 0,$$

$$\sin x - \sin \frac{x}{2}(1 + \cos x) = 0, \ \sin x + 2\cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0,$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0,$$

$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}(1 + \cos \frac{x}{2}) = 0$, $\sin x(1 + \cos \frac{x}{2}) = 0$. Маємо:

1) $\sin x = 0, \quad x = k\pi, \quad k \in Z.$

2) $1 + \cos \frac{x}{2} = 0, \cos \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = 2n\pi, x = 4n\pi, \ n \in Z.$

З множини розв'язків $x = k\pi$ слід виключити ті, при яких знаменник $1 + \cos x$ перетворюється у нуль, тобто коли $\cos x$ перетворюється у -1. Відомо, що $\cos x$ дорівнює -1 при всіх непарних k. Отже, треба залишити лише розв'язки $x = 2n\pi$.

Множина розв'язків $x = 4n\pi$ включається в множину $x = 2n\pi$. Розв'язками даного рівняння є $x = 2n\pi$.

Рівняння, до складу яких входять добутки $\sin\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, зручно розв'язувати за такими формулами:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sin x\sin 3x + \sin 4x\sin 8x = 0$.

Розв'язання.

$$\frac{1}{2}(\cos(x-3x)-\cos(x+3x))+\frac{1}{2}(\cos(4x-8x)-\cos(4x+8x)) = 0,\ \frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)+\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 12x) = 0;$$

$$\cos 2x-\cos 4x+\cos 4x-\cos 12x = 0,\ \cos 2x-\cos 12x=0;$$

$$-2\sin\frac{2x+12x}{2}\sin\frac{2x-12x}{2} = 0,\ \sin 7x\cdot\sin 5x = 0.$$

Звідси маємо два рівняння:

$$\sin 7x = 0,\quad 7x = k\pi,\quad x = k\frac{\pi}{7},\quad k\in Z;$$

$$\sin 5x = 0,\quad 5x = n\pi,\quad x = n\frac{\pi}{5},\quad n\in Z.$$

Тригонометричні рівняння, до складу яких входять алгебраїчні суми виду $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$, $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx$, $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\ldots+\operatorname{tg} nx$ або інші аналогічні комбінації аргументів, часто розв'язують, групуючи члени і застосовуючи формули додавання тригонометричних функцій. Але робити це слід так, щоб після перетворення у добуток кожної пари доданків з'являвся спільний множник. Далі рівняння розв'язують, розкладаючи його на множники.

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Згрупуємо члени так: $(\sin x + \sin 5x) + (\sin 8x - \sin 2x) = 0$. Застосуємо формули суми і різниці синусів і використаємо властивість парності косинуса

$$2\sin 3x\cos 2x + 2\cos 5x \sin 3x = 0,$$

$$2\sin 3x \cdot (\cos 2x + \cos 5x) = 0.$$

Ще раз перетворимо у добуток суму косинусів

$$2\sin 3x \cdot 2\cos \frac{7}{2}x \cdot \cos \frac{3}{2}x = 0.$$

Звідси дістанемо три рівняння:

$$\sin 3x = 0,\ 3x = k\pi,\ x = k \cdot \frac{\pi}{3},\ \ k \in Z;$$

$$\cos \frac{7}{2}x = 0,\ \frac{7}{2}x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ x = \frac{\pi}{7} + 2n\frac{\pi}{7} = (2n+1)\frac{\pi}{7},\ \ n \in Z;$$

$$\cos \frac{3}{2}x = 0,\ \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ x = \frac{\pi}{3} + 2m\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(2m+1),\ \ m \in Z.$$

Остання множина розв'язків входить до множини $x = \frac{k}{3}\pi$. Отже, розв'язками даного рівняння є числа $x = k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in Z, x = \frac{\pi}{7}(2n+1), n \in Z$.

Тригонометричні рівняння, до складу яких входять парні степені функцій $\sin x$ і $\cos x$, доцільно розв'язувати, знижуючи степінь функції за формулами

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

П р и к л а д 5. Розв'язати рівняння $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

Р о з в' я з а н н я. Якщо зробити заміни $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$, то дістанемо рівняння $6 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2(1 - \cos^2 2x) = 5$, або $3 - 3\cos 2x +$

$+2-2\cos^2 2x-5=0$. Звідси $2\cos^2 2x+3\cos 2x=0$. Маємо квадратне рівняння відносно $\cos 2x$. Розв'язуючи його способом розкладання на множники, дістанемо $\cos 2x \times$ $\times(2\cos 2x+3)=0$. Звідси $\cos 2x=0$, $2x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n\in Z$; $2\cos 2x+3=0$, $2\cos 2x=-3$, $\cos 2x=-\frac{3}{2}$ не має розв'язків, оскільки $|\cos 2x|\leqslant 1$.

Отже, розв'язками даного рівняння є числа $x=\frac{\pi}{2}(2n+$ $+1)$. Це рівняння можна було б розв'язати інакше, замінивши $\sin^2 2x$ на $4\sin^2 x\cos^2 x$, а $\cos^2 x$ — на $1-\sin^2 x$. Після цього дістанемо квадратне рівняння відносно $\sin x$. Та цей спосіб більш громіздкий. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь слід пам'ятати про можливі випадки порушення рівносильності рівняння, тобто про втрату і появу сторонніх розв'язків. Зокрема, при піднесенні до квадрата обох частин рівняння можуть з'явитися сторонні розв'язки. Під час розв'язування однорідних рівнянь необгрунтоване ділення на $\cos^2 x$ може призвести до втрати розв'язків. Доводиться включати сторонні розв'язки, розв'язуючи рівняння, що містять добутки і дроби у лівій частині і нуль — у правій.

Наведемо ще два приклади втрати розв'язків.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sin x-\sqrt{7}\cos x=$ $=\sqrt{7}$.

Розв'язання. Це лінійне рівняння. Використаємо підстановки $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. Дістанемо $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\sqrt{7}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\sqrt{7}$. Оскільки $1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\neq$ $\neq 0$, то $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{7}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=\sqrt{7}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$. Звідси

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{7},\quad x=2\operatorname{arctg}\sqrt{7}+2k\pi,\quad k\in Z.$$

Неважко перевірити, що дане рівняння задовольняють і числа $x = (2n+1)\pi$. Втрата розв'язків сталася внаслідок застосування підстановки і переходу до алгебраїчного рівняння відносно тангенса. Його не задовольняють числа, при яких $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не існує, тобто числа $\frac{x}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, або $x = (2n+1)\pi$. Але ці числа задовольняють дане рівняння. Тому, використовуючи підстановку, яка виражає синус і косинус через тангенс половинного кута, необхідно перевіряти числа $x = (2n+1)\pi$. Якщо вони задовольняють дане рівняння, то їх слід приєднати до знайдених розв'язків. Остаточно запишемо розв'язок у вигляді $x = 2\operatorname{arctg}\sqrt{7} + 2k\pi, \quad k \in Z, \quad x = (2n+1)\pi, \quad n \in Z.$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{ctg} x.$

Розв'язання. Застосуємо формули

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Дістанемо

$$\frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x} + \frac{\operatorname{tg}x - 1}{1 + \operatorname{tg}x} = \frac{2}{\operatorname{tg}x},$$

$$\frac{\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x+1)^2 + (\operatorname{tg}x - 1)(1 - \operatorname{tg}x) - 2(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}x} = 0.$$

Після спрощення маємо

$$\frac{3\operatorname{tg}^2 x - 1}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}x} = 0, \quad 3\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0, \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in Z.$$

При цих значеннях x не втрачає смислу і не перетворюється у нуль знаменник дробу. Проте неважко перевірити, що дане рівняння задовольняють також числа виду $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$. Втрата цих розв'язків сталася внаслідок застосування теореми додавання для функції тангенс. Формули тангенса суми і різниці двох чисел α і β виконуються лише за умови, що мають смисл вирази $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Якщо $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$, то $\operatorname{tg} x$ не має смислу, тому ці розв'язки було втрачено. Якщо дане рівняння розв'язати за формулою суми тангенсів двох чисел, то вказані розв'язки не будуть втрачені.

В результаті розв'язування одного і того самого тригонометричного рівняння різними способами можна дістати різні загальні формули розв'язків рівняння. Їх еквівалентність можна довести, перетворивши формули та об'єднавши кілька формул в одну. Можна також довести рівність знайдених множин розв'язків, записавши у розгорнутому вигляді прогресії, n-м членом яких є формула розв'язку тригонометричного рівняння. Проте обидва ці способи громіздкі. Доцільно записати дане тригонометричне рівняння у вигляді $f(x) = 0$, знайти найменший додатний період l функції $y = f(x)$ і показати, що на проміжку $[0; l]$ кожна з утворених формул дає одну і ту саму множину розв'язків. Зручним виявляється також геометричний спосіб доведення рівності множин розв'язків за допомогою одиничного кола. Якщо різні формули на одиничному колі дають однакові множини точок, що зображують окремі розв'язки рівняння, то ці множини рівні. Проте така геометрична інтерпретація можлива тільки тоді, коли періодом функції, що входить до лівої частини рівняння $f(x) = 0$ (не обов'язково найменшим додатним), є число 2π.

§ 5. Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Розв'язування будь-яких тригонометричних нерівностей, як правило, зводиться до розв'язування найпростіших нерівностей:

$$\sin x \geqslant a \quad \text{або} \quad \sin x \leqslant a;$$

$$\cos x \geqslant a \quad \text{або} \quad \cos x \leqslant a;$$

$$\operatorname{tg} x \geqslant a \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} x \leqslant a,$$

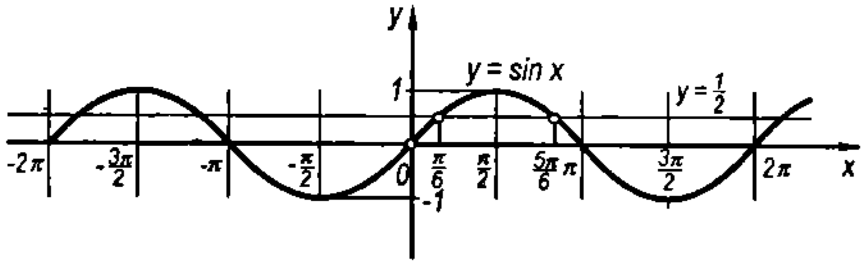
$$\operatorname{ctg} x \geqslant a \quad \text{або} \quad \operatorname{ctg} x \leqslant a.$$

Як і найпростіші тригонометричні рівняння, нерівності природно розв'язувати графічно. Розглянемо приклади.

П р и к л а д 1. Розв'язати нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо функції, які стоять у лівій і правій частинах, через $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ і побудуємо схематично їх графіки (мал. 73). Розв'язками нерівності будуть абсциси всіх точок графіка синусоїди, які містяться вище від прямої $y = \frac{1}{2}$. Враховуючи періодичність функції синус, досить знайти розв'язки на будь-якому відрізку області визначення завдовжки 2π і додати до знайдених чисел період $2n\pi$, $n \in Z$. Виберемо, наприклад, проміжок $[0; 2\pi]$. З малюнка випливає, що множиною значень x з відрізка $[0; 2\pi]$, для яких відповідні точки графіка синусоїди розміщені вище від точок прямої $y = \frac{1}{2}$, буде $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Додавши до цих чисел період $2n\pi$, дістанемо множину всіх розв'язків даної нерівності $\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

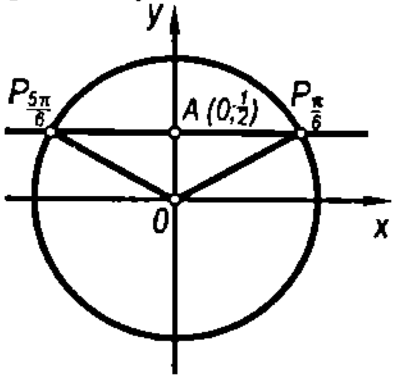
Графічний спосіб є досить наочним, але незручність полягає в тому, що кожного разу (хоч і схематично) треба будувати графіки тригонометричних функцій.



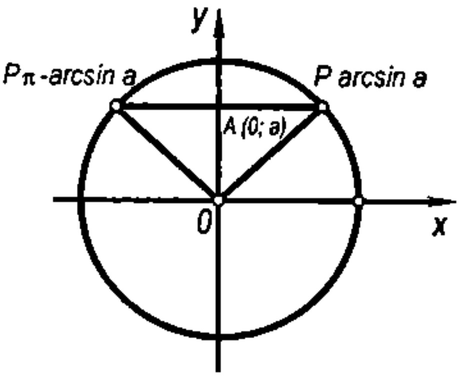
Мал. 73

Дещо зручнішим є спосіб розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей за допомогою одиничного кола. Для даної нерівності розв'язування цим способом проводять аналогічно розв'язуванню найпростішого тригонометричного рівняння.

Побудуємо одиничне коло (мал. 74). Відкладемо на осі Oy ординату $\frac{1}{2}$ і через кінець відрізка проведемо пряму, паралельну осі Ox.



Мал. 74



Мал. 75

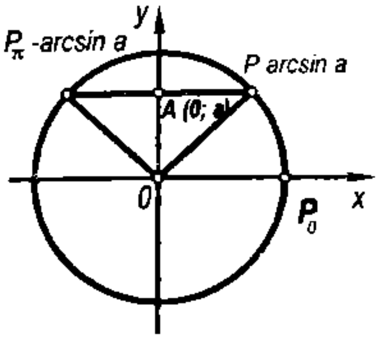
Розв'язання даної нерівності зводиться до знаходження на одиничному колі всіх точок, у яких ординати більші за $\frac{1}{2}$. Ці точки відповідають шуканим числам α, що є розв'язками даної тригонометричної нерівності. З малюнка випливає, що такими точками є точки дуги кола, які розміщені над прямою $y = \frac{1}{2}$ і відповідають числам множини $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ на відрізку $[-\pi, \pi]$, довжина якого дорівнює періоду 2π.

Додаючи до цих чисел період функції $2n\pi$, дістанемо множину всіх розв'язків нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$.

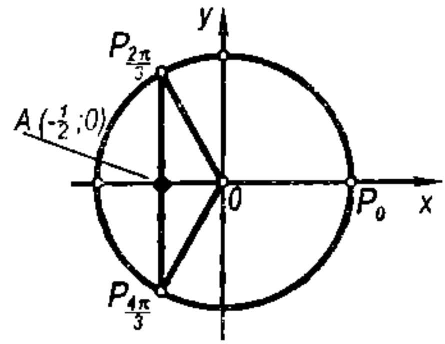
Розглядаючи розв'язання нерівності виду $\sin x > a$ у загальному випадку, необхідно накласти обмеження на число a. Якщо $a \geqslant 1$, то нерівність $\sin x > a$ розв'язків не має, бо при будь-якому x завжди $|\sin x| \leqslant 1$. Якщо ж $a < -1$, то нерівність $\sin x > a$ справджується при будь-якому x, тобто множиною розв'язків такої нерівності є множина R.

У загальному випадку нерівність $\sin x > a$, де $-1 \leqslant a \leqslant 1$, розв'язують аналогічно (мал. 75). Точки $P_{\arcsin a}$ і $P_{\pi - \arcsin a}$ зображують числа $\arcsin a$ і $\pi - \arcsin a$. Розв'язками нерівності на відрізку $[-\pi; \pi]$ є множина $(\arcsin a; \pi - \arcsin a)$,а множиною всіх розв'язків будуть проміжки

$$\arcsin a + 2n\pi < x < \pi - \arcsin a + 2n\pi, \quad n \in Z.$$



Мал. 76



Мал. 77

Аналогічно розв'язують нерівність $\sin x < a$. На малюнку 76 показано дугу, що відповідає розв'язкам цієї нерівності.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$.

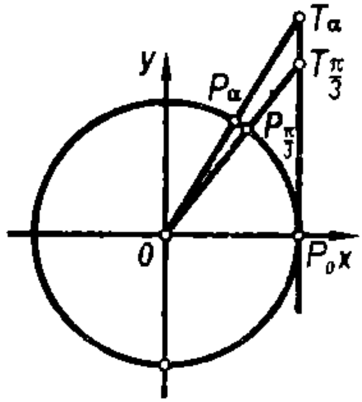
Р о з в' я з а н н я. Знайдемо спочатку розв'язки на відрізку $[-\pi, \pi]$. Розв'язання даної нерівності зводиться до знаходження на одиничному колі всіх точок P_α, що мають абсциси, які менші або дорівнюють $-\frac{1}{2}$ (мал. 77). Всі ці точки відповідають на одиничному колі числам α, які є розв'язками даної нерівності.

Відкладемо на осі Ox відрізок OA, що відповідає абсцисі $-\frac{1}{2}$, і проведемо через його кінець A пряму, паралельну осі Oy.

Шукані точки одиничного кола лежать лівіше від прямої $x = -\frac{1}{2}$ або на самій прямій і належать дузі $P_{\frac{2\pi}{3}} P_{\frac{4\pi}{3}}$. Отже, множиною розв'язків нерівності, що належить відрізку $[-\pi; \pi]$ є $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$. Додаючи до цих чисел період косинуса, дістанемо всі розв'язки нерівності $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in Z$.

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Р о з в' я з а н н я. Враховуючи періодичність тангенса, знайдемо розв'язки даної нерівності спочатку на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо α — розв'язок даної нерівності, то ордината точки T_α лінії тангенсів (мал. 78), що дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$, має бути менша за $\sqrt{3}$. Всі такі точки лежать на дотичній нижче від точки $T_{\frac{\pi}{3}}$. Відповідні точки P_α одиничного кола належать дузі, позначеній на малюнку. Ці точки відповідають числам α, що належать проміжку $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.



Мал. 78

Додаючи до знайдених чисел період тангенса, дістанемо всі розв'язки даної нерівності $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in Z$.

Складніші тригонометричні нерівності розв'язують способами, що аналогічні до способів розв'язування тригонометричних рівнянь такого ж типу.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Яка функція називається оборотною?

2. Сформулювати означення функції, оберненої до даної оборотної функції.

3. Як розташовані графіки двох взаємно обернених функцій?

4. Сформулювати алгоритм знаходження формул функції, оберненої до даної. Знайти функцію, обернену до функції: а) $y = 2x - 1$; б) $y = x^2$, якщо $0 < x < +\infty$; в) $y = x^3$.

5. Сформулювати теорему про властивість оберненої функції.

6. Ввести функцію, обернену до $y = \sin x$. Назвати її властивості.

7. Ввести функцію, обернену до $y = \cos x$. Назвати її властивості.

8. Ввести функцію, обернену до $y = \operatorname{tg} x$. Назвати її властивості.

9. Як побудувати графіки обернених тригонометричних функцій?

10. Довести, що функції $y = \arcsin x$ і $y = \operatorname{arctg} x$ непарні.

11. Як виразити $\arccos(-x)$ через $\arccos x$?

12. Обчислити значення виразів:

1) $\arcsin 1$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 5) $\arccos 0,7986$; 6) $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} -$
$- \arcsin 1$; 7) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin\frac{1}{2}$; 8) $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{4}\right)$;

9) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; 10) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{5}\right)\right)$.

13. Яке рівняння називають тригонометричним?

14. Яка особливість розв'язків тригонометричних рівнянь?

15. Вивести формули розв'язків рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

16. Назвати способи розв'язування окремих видів тригонометричних рівнянь.

17. Які тригонометричні рівняння називають однорідними?

18. Які тригонометричні рівняння називають лінійними? Коли існують розв'язки таких рівнянь?

19. Як розв'язують лінійні тригонометричні рівняння?

20. Як розв'язують тригонометричні рівняння виду

$$f(x)\cdot\varphi(x)\ldots\psi(x) = 0, \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0?$$

21. Коли під час розв'язування тригонометричних рівнянь може порушитись рівносильність?

22. Як розв'язати нерівності виду $\sin x \geqslant a$, $\sin x \leqslant a$ за допомогою одиничного кола?

23. Як розв'язати нерівності виду $\cos x \geqslant a$, $\cos x \leqslant a$ за допомогою одиничного кола?

24. Як розв'язати нерівності виду $\operatorname{tg} x \geqslant a$, $\operatorname{tg} x \leqslant a$ за допомогою одиничного кола?

ВПРАВИ

1. Розв'язати рівняння:

1) $\sin x = 0$; 2) $\cos x = -0,4827$; 3) $\operatorname{tg} x = 0$;
4) $\operatorname{tg} x = -0,5$; 5) $\cos x = 0$; 6) $\sin 2x = -1$;
7) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\sin\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) + 1 = 0$; 9) $\cos x = \frac{1}{2}$;
10) $2\cos 3x - 1 = 0$; 11) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 12) $3\operatorname{tg}(x+1) - \sqrt{3} = 0$; 13) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 14) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 1 = 0$;
15) $\operatorname{tg} x = -0,6009$; 16) $3\operatorname{tg}^2 2x - 1 = 0$;
17) $\sin x = 0,2753$; 18) $2\sin^2 3x - 3 = 0$.

2. Розв'язати рівняння:

А

1) $\cos x + \sin x = 0$; 2) $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x$;
3) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$; 4) $\cos 2x = 2\sin^2 x$;
5) $\sin 2x = \cos x \cos 2x$; 6) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
7) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; 8) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$;
9) $\cos 2x = \cos 6x$; 10) $\frac{1+\cos 2x}{\cos x} = 0$;
11) $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$; 12) $1 + \sin x \sin 2x = \cos x \cos 2x$;
13) $\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x = 6$; 14) $\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = 1$.

Б

15) $3\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 1$; 16) $\sin^4 x + \sin x^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$;
17) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$; 18) $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\frac{x}{2}$;

19) $1-\cos(\pi-x)+\sin x\frac{\pi+x}{2}=0$;

20) $3\sin x-3\cos x=5$; 21) $1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x=0$;

22) $4\sin x+5\cos x=4$; 23) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}-\operatorname{tg}x=1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\operatorname{tg}x$; 24) $5\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=5-6\cos^2 x$;

25) $4\sin^4 x+\sin^2 2x=2$; 26) $(1+\cos x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$;

27) $1-\cos x=\sin x\sin\frac{x}{2}$; 28) $\cos^2 x-3\sin x\cos x+1=0$; 29) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2 x=0$;

30) $\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x=1$;

B

31) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=0$;
32) $(1-\operatorname{tg}x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg}x$;
33) $\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}3x-2\operatorname{tg}2x=0$;
34) $1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{2}\sin 2x$;
35) $1+\cos 10x\cos 6x=2\cos^2 8x+\sin^2 8x$;
36) $\sin 2x-3\cos 2x=3$;
37) $\sin^4 x+\cos^4 x-\sin x\cos x=0$;
38) $\frac{\sin^4 x-1}{\cos^4 x}=1$; 39) $\sqrt{\sin^2 x-1}+\sqrt{1-\sin^2 x}=\sin 2x$;
40) $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}$; 41) $\frac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}=0$;
42) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$.

3. Розв'язати нерівності:

1) $\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}x>-1$; 3) $\sin x>2$;

4) $\operatorname{tg}x\leqslant 2$; 5) $\cos x<\frac{1}{\sqrt{2}}$; 6) $|\sin x|>\frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\cos x>\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\cos^2 x<\frac{1}{4}$.

Розділ III

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

§ 1. Корінь n-го степеня і його властивості

1. Поняття кореня n-го степеня. В курсі алгебри 8-го класу було введено поняття квадратного кореня: квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.

Наприклад, числа 3 і -3 — квадратні корені з 9, бо $3^2 = 9$ і $(-3)^2 = 9$; $\frac{2}{5}$ і $-\frac{2}{5}$ — квадратні корені з $\frac{4}{25}$, бо $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ і $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

Квадратний корінь з 0 дорівнює 0, бо $0^2 = 0$. Цей корінь з 0 єдиний. Квадратний корінь з -25 не існує, бо немає такого числа, квадрат якого дорівнював би -25.

Отже, квадратних коренів з додатного числа існує два: один додатний, а другий від'ємний. Додатний квадратний корінь з додатного числа a називають а р и ф м е т и ч н и м квадратним коренем і позначають $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ називають з н а к о м а р и ф м е т и ч н о г о к о р е н я; вираз, що стоїть під знаком кореня, називається п і д к о р е н е в и м в и р а з о м.

Додатні числа разом з числом нуль називають невід'ємними числами. Надалі поняття арифметичного квадратного кореня будемо вживати для невід'ємних чисел.

Арифметичним квадратним коренем з невід'ємного числа a є невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

З цього означення випливає, що коли $a < 0$, вираз $\sqrt{a}$ не має смислу (наприклад, $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-49}$, $\sqrt{-1,44}$).

Використовуючи введене позначення, запишемо корені рівняння $x^2 = 81$, $x_1 = \sqrt{81}$, $x_2 - \sqrt{81}$.

Якщо треба добути квадратний корінь з алгебраїчної суми, то не можна добувати його з кожного доданка окремо.

Наприклад, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, але $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

Отже, дія добування кореня відносно додавання (і віднімання) не має розподільної властивості. Те саме можна сказати і про дію піднесення до степеня.

Ми нагадали найважливіші відомості про квадратний корінь, або корінь другого степеня.

Розглянемо корінь будь-якого степеня. Рівність $5^3 = 125$ можна прочитати так, число 5 є кубічним коренем (коренем третього степеня) з 125.

Аналогічно з рівності $(-4)^3 = -64$ випливає, що число -4 є кубічним коренем з -64, а з рівності $(-3)^4 = 81$ — число 3 є кубічним коренем четвертого степеня з 81.

Добування кореня — це операція, обернена до операції піднесення до степеня.

Коренем n-го степеня з числа a називається таке число, n-й степінь якого дорівнює a (n — натуральне число).

Нехай n — непарне число. Корінь непарного степеня з числа завжди існує і до того ж тільки один: якщо $a > 0$, цей корінь — додатне число, якщо $a = 0$, він дорівнює нулю, а коли $a < 0$, корінь — від'ємне число.

Для його позначення прийнято знак $\sqrt[n]{a}$ (читається «корінь n-го степеня з a»).

Знак операції добування кореня $\sqrt{}$, а також результат цієї операції (наприклад, $\sqrt[5]{a}$) називають **р а д и к а л о м** (лат. *radix* — корінь).

Число n називають **п о к а з н и к о м к о р е н я**, число a — **п і д к о р е н е в и м в и р а з о м**.

Нехай n — парне число. Якщо $a > 0$, існує два протилежних числа, які є коренями n-го степеня з a.

Додатний корінь n-го степеня з a позначають у цьому випадку знаком $\sqrt[n]{a}$, тоді протилежне йому число $-\sqrt[n]{a}$. Якщо $a = 0$, то існує єдиний корінь n-го степеня з a: $\sqrt[n]{0} = 0$ бо $0^n = 0$. Якщо $a < 0$, то корінь n-го степеня з a не існує. Інакше кажучи, вираз $\sqrt[n]{a}$, де n — парне і $a < 0$ не має смислу

Отже, якщо n — непарне число, то вираз $\sqrt[n]{a}$ має смисл при будь-якому a; якщо n — парне число, то вираз $\sqrt[n]{a}$ має смисл лише коли $a \geqslant 0$.

Очевидно, що при всіх значеннях a, для яких вираз $\sqrt[n]{a}$ має смисл, справджується рівність $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Якщо $a \geqslant 0$, то вираз $\sqrt[n]{a}$ завжди (як при парному, так і при непарному n) має смисл.

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа називається невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Корінь непарного степеня з від'ємного числа можна виразити через арифметичний корінь того самого степеня з протилежного (додатного) числа. Так, $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125}$.

Взагалі, якщо $a < 0$ і k — натуральне число, то $\sqrt[2k-1]{-a} = -\sqrt[2k-1]{a}$.

Справді $\left(\sqrt[2k-1]{a}\right)^{2k-1} = a$; $\left(-\sqrt[2k-1]{-a}\right)^{2k-1} = -(-a) = a$.

Відомо, що для квадратного кореня справджується тотожність $\sqrt{a^2} = |a|$. Аналогічно для кореня n-го степеня з парними показниками має місце тотожність $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Надалі користуватимемося арифметичними коренями.

Найменший з натуральних показників, які розглядають, дорівнює 2, його не пишуть.

2. Властивості коренів. За означенням кореня n-го степеня можна довести такі твердження:

1) *Для будь-яких невід'ємних чисел a і b і будь-якого натурального числа n правильна рівність:*

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad (1)$$

Добуток коренів n-го степеня з чисел a і b дорівнює кореню n-го степеня з їхнього добутку.

Це твердження можна узагальнити для будь-яких натуральних чисел n і r і невід'ємних чисел $a_1, \ldots a_r$:

$$\sqrt[n]{a_1} \cdots \sqrt[n]{a_r} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_r}.$$

Наприклад:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = 2, \quad \text{бо} \quad 2^4 = 16;$$

$$\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{243} = 3, \quad \text{бо} \quad 3^5 = 243;$$

Для коренів непарного степеня числа a і b можуть бути і від'ємними.

$$\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{-1000}=-10,\quad \text{бо}\quad (-10)^3=-1000;$$

$$\sqrt[7]{2}\cdot\sqrt[7]{4}\cdot\sqrt[7]{16}=\sqrt[7]{128}=2,\quad \text{бо}\quad 2^7=128;$$

2) *Для кожного невід'ємного числа a, кожного додатного числа b і натурального числа n правильна рівність:*

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \tag{2}$$

Частка коренів n-го степеня з чисел a і b дорівнює кореню n-го степеня з їх частки. Наприклад:

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=3,\quad \text{бо}\quad 3^3=27;$$

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{128}}=\sqrt[4]{\frac{8}{128}}=\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2},\quad \text{бо}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16};$$

$$\frac{\sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{243}}=\sqrt[3]{-\frac{9}{243}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3},\quad \text{бо}\quad \left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27};$$

$$\frac{\sqrt[5]{-9}}{\sqrt[5]{-288}}=\sqrt[5]{\frac{-9}{-288}}=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2},\quad \text{бо}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}.$$

3) *Для кожного цілого числа k, кожного додатного числа a і натурального числа n справджується рівність:*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}. \tag{3}$$

Якщо k — натуральне число, то рівність правильна і для $a=0$, тобто для будь-якого невід'ємного числа a.

Якщо $k=n$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a$.

Приклади.

а) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4=\sqrt[5]{3^4}=\sqrt[5]{81}$;

б) $\left(-\sqrt[5]{11}\right)^5=-\sqrt[5]{11^5}=-11$;

в) $\left(3\sqrt[5]{-3}\right)^5=3^5\sqrt[5]{(-3)^5}=3^5\cdot(-3)=-3^6=-729$;

г) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^3=-\sqrt[4]{7^3}=-\sqrt[4]{343}$.

4) *Для будь-яких натуральних чисел m і n, кожного невід'ємного числа a правильна рівність:*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \qquad (4)$$

Наприклад: $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[2\cdot3]{5} = \sqrt[6]{5}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[3\cdot5]{6} = \sqrt[15]{6}$; $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2\cdot2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{\sqrt{1024}} = \sqrt[5\cdot2]{1024} = \sqrt[10]{1024} = 2$.

5) *Для будь-яких натуральних чисел m, n і p і кожного невід'ємного числа a правильна рівність:*

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (5)$$

Наприклад: $\sqrt[4]{9^2} = \sqrt{9} = 3$; $\sqrt[4]{25^6} = \sqrt[4]{(5^2)^6} = \sqrt[4]{5^{12}} = 5^3 = 125$ або $\sqrt[4]{25^6} = \sqrt[4]{(25^3)^2} = \sqrt{25^3} = \sqrt{25^2\cdot 25} = 125$.

Доведемо для прикладу рівність (1).

Позначимо $\sqrt[n]{a}$ і $\sqrt[n]{b}$ відповідно через x і y, де $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. За означенням кореня n-го степеня, $a = x^n$, $b = y^n$, звідки $ab = x^n y^n = (xy)^n$.

Числа a, b невід'ємні. Отже, і ab — невід'ємне число, а тому існує єдине невід'ємне число, яке є коренем n-го степеня з ab.

Беручи до уваги, що $xy \geqslant 0$, дістанемо

$\sqrt[n]{ab} = xy$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, що і треба було довести.

Пропонуємо самостійно довести цим самим способом рівності (2) — (5).

Зазначимо, що для практики обчислень важливо вміти читати деякі з наведених вище рівностей справа наліво.

Щоб добути корінь n-го степеня з добутку невід'ємних чисел, слід добути корінь того самого степеня з кожного множника і отримані результати перемножити:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$$

Наприклад: $\sqrt[3]{343\cdot8} = \sqrt[3]{343}\cdot\sqrt[3]{8} = 7\cdot2 = 14$;

$$\sqrt[4]{16\cdot81} = \sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{81} = 2\cdot3 = 6;$$

$$\sqrt[5]{32\cdot243} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{243} = 2\cdot3 = 6;$$

$$\sqrt[5]{32\cdot 0,00001}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{0,00001}=2\cdot 0,1=0,2.$$

Щоб добути корінь n-го степеня з частки від ділення невід'ємного числа a на додатне число b, слід добути корінь того самого степеня з діленого і дільника і перший результат поділити на другий:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad (a\geqslant 0,\ b>0).$$

Наприклад: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$; $\sqrt[3]{\frac{343}{8}}=\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$;

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}}=\frac{2}{3};\quad \sqrt[3]{4\frac{17}{27}}=\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}.$$

На окрему увагу заслуговує рівність (5), яка виражає основну властивість арифметичного кореня: ***при діленні показника кореня і показника степеня підкореневого виразу на одне й те саме число значення кореня з невід'ємного числа не змінюється.***

Доведемо це твердження.

Нехай $a\geqslant 0$, m, n, p — натуральні числа.

Треба довести: $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Позначимо $\sqrt[np]{a^{mp}}=x\ (x\geqslant 0)$, $\sqrt[n]{a^m}=y\ (y\geqslant 0)$.

Тоді, за означенням кореня, $x^{np}=a^{mp}$, $y^n=a^m$, отже, $y^{np}=a^{mp}$. Звідси $x^{np}=y^{np}$. Оскільки $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то $x=y$, що і треба було довести.

Показник кореня і показник степеня підкореневого виразу ділимо на одне й те саме число. В такому разі кажуть, що показники кореня і підкореневого виразу с к о р о ч е н о на одне й те саме число.

З цього твердження дістанемо наслідок: ***щоб добути корінь із степеня, слід показник степеня підкореневого виразу поділити на показник кореня, якщо можливе ділення без остачі.***

Справді, нехай $a\geqslant 0$, m, n, p — натуральні числа і $m=np$. Тоді, за основною властивістю кореня, маємо:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{np}}=a^p$$

Наприклад:

$$\sqrt[18]{36^3} = \sqrt[6\cdot 3]{36^3} = \sqrt[6]{36};$$

$$\sqrt[12]{25^3} = \sqrt[4\cdot 3]{25^3} = \sqrt[4]{25};$$

$$\sqrt[18]{7^{12}} = \sqrt[6\cdot 3]{7^{6\cdot 2}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49};$$

$$\sqrt[8]{16^5} = \sqrt[8]{(2^4)^5} = \sqrt[8]{(2^5)^4} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}.$$

Читаючи рівність $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$, справа наліво, тобто $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, виявимо справедливість такого твердження: *під час множення показника кореня і показника степеня підкореневого виразу на одне й те саме число значення кореня з невід'ємного числа не змінюється.*

За цим твердженням можна зводити радикали з різними показниками до спільного показника. Наприклад: $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{2\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^4}$; $\sqrt{2} = \sqrt[2\cdot 6]{2^6} = \sqrt[12]{64}$.

Звести до спільного показника радикали: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$. Найменше спільне кратне всіх радикалів 12; доповняльні множники: для першого радикала 6, для другого — 4 і для третього — 3. Маємо

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}; \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}; \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}.$$

Перетворення радикалів доводиться виконувати над виразами, які містять від'ємні числа. При цьому треба уважно стежити за знаками.

Наприклад: $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3$. Але $-3 \neq 3$, отже, $\sqrt[3]{-27} \neq \sqrt[6]{(-27)^2}$.

3. Найпростіші перетворення радикалів. Винесення множника за знак радикала. У випадках, коли підкореневий вираз розкладається на множники так, що з одного або з кількох з них можна добути точний корінь, ці множники після добування з них кореня можна записати перед знаком кореня. Таке перетворення називається винесенням спільного множника за знак радикала.

Наприклад: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;

$$\sqrt{98a^3b} = \sqrt{49 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot ab} = 7a\sqrt{2ab};$$

$$\sqrt[3]{375x^7y^2} = \sqrt[3]{125 \cdot 3x^6xy^2} = \sqrt[3]{125x^6} \times \sqrt[3]{3xy^2} =$$
$$= 5x^2\sqrt[3]{3xy^2}.$$

Виносячи буквені множники з-під знака радикала, під всіма буквами слід розуміти лише невід'ємні числа. Зокрема, в розглянутих вище прикладах $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то вираз $\sqrt{98a^3b}$ має смисл, але не дорівнює $7a\sqrt{2ab}$.

Щоб дізнатися, з яким показником степеня можна винести за знак кореня множник, а які множники і з якими показниками степенів залишаються під коренем, досить показник степеня множника, що стоїть під коренем, поділити на показник степеня радикала: частка покаже, в якому степені цей множник стоятиме перед коренем, а остача покаже, в якому степені цей множник залишиться під знаком радикала.

Винесенням множника з-під знака радикала можна звести дробовий підкореневий вираз до цілого вигляду. Для цього досить помножити чисельник і знаменник підкореневого виразу на один і той самий множник так, щоб із знаменника добувався точний корінь. Наприклад:

$$\sqrt{\frac{3x}{5}} = \sqrt{\frac{3x \cdot 5}{5 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{15x}{5^2}} = \frac{1}{5}\sqrt{15x};$$

$$\sqrt[3]{\frac{3a^2x}{5b^2}} = \sqrt[3]{\frac{3a^2x \cdot 25b}{5b^2 \cdot 25b}} = \frac{1}{5b}\sqrt[3]{75a^2bx}.$$

Внесення додатних множників під знак радикала. Перетворення, обернене до винесення множників з-під знака радикала, називається внесенням множників під знак радикала.

Щоб внести множник під знак радикала, слід піднести його до степеня, показник якого дорівнює показнику кореня, і записати результат під знаком кореня.

Так, запис $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$ можна розглядати як перетворення, обернене до винесення множника за знак кореня.

Наприклад: $2\sqrt{3x} = \sqrt{2^2 \cdot 3x} = \sqrt{12x}$;

$$5a\sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{(5a)^3 \cdot 2x} = \sqrt[3]{125a^3 \cdot 2x} = \sqrt[3]{250a^3x};$$

$$\frac{3a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{2b^3}{9a^3}} = \sqrt[4]{\frac{81a^8 \cdot 2b^3}{b^4 \cdot 9a^3}} = \sqrt[4]{\frac{18a^5}{b}};$$

$$2a^2\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{2^n a^{2n} x}.$$

Зауважимо, що внесення множника під знак радикала використовують при порівнянні виразів. Наприклад, що більше $2\sqrt{5}$ чи $5\sqrt{2}$? Внісши множник під знак кореня, дістанемо:

$2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$; $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$.
Отже, $5\sqrt{2} > 2\sqrt{5}$.
Таке перетворення буває також корисним при виконанні наближених обчислень. Некай треба обчислити $5\sqrt{2}$ з точністю до 0,01. З таблиць знайдемо $\sqrt{2} \approx 1,41$ (з точністю до 0,01). Наближене значення $5\sqrt{2} = 5 \cdot 1,41 = 7,05$. Але похибка знайденого добутку в п'ять разів більша за похибку наближеного значення $\sqrt{2}$. Щоб точніше обчислити вираз $5\sqrt{2}$, доцільно внести множник 5 під знак кореня.

Дістанемо $5\sqrt{2} = \sqrt{50} \approx 7,07$. Отже, внаслідок внесення множника 5 під знак кореня ми дістали точніше значення виразу $5\sqrt{2}$.

Під радикал можна вносити як числові, так і буквені множники, тільки мати на увазі, що буквений множник не може бути від'ємним.

Зведення радикалів до найпростішого (нормального) вигляду.

Вважатимемо, що радикал зведений до найпростішого вигляду, коли: підкореневий вираз не містить дробів; раціональні множники винесені за знак радикала; показник кореня і показник степеня підкореневого виразу скорочені на їх найбільший спільний дільник. Якщо підкореневий вираз є добутком кількох множників, показники степенів яких мають спільний дільник, то показник кореня і показники степенів співмножників поділені на цей дільник.

Наведемо приклади зведення радикалів до найпростішого вигляду:

$$3x^2y\sqrt{\frac{12}{xy}} = 3x^2y\sqrt{\frac{4 \cdot 3xy}{x^2y^2}} = \frac{6x^2y}{xy}\sqrt{3xy} = 6x\sqrt{3xy};$$

$$2\sqrt[3]{\frac{3a^2}{4}} = 2\sqrt[3]{\frac{3a^2 \cdot 2}{4 \cdot 2}} = \sqrt[3]{6a^2};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)ab}{ab\cdot ab}}=\frac{1}{ab}\sqrt{ab(a^2+b^2)}.$$

Зведення подібних радикалів. Спрощуючи вирази, які містять суму радикалів, користуються перетворенням, що має назву *зведення подібних радикалів.* Воно аналогічне зведенню подібних членів. Проте означення подібних радикалів відрізняється від означення подібних членів.

Радикали називають **подібними**, якщо після зведення їх до найпростішого (нормального) вигляду вони мають рівні підкореневі вирази і однакові показники. Наприклад, подібними є радикали:

$$3\sqrt{2},\quad -0,7\sqrt{2},\quad ab\sqrt{2},\quad (x-y)\sqrt{2};\quad \frac{1}{2}\sqrt[3]{ab},$$

$$-3\sqrt[3]{ab},\quad \frac{x+2}{3}\sqrt[3]{ab};\quad x^2y\sqrt{x+y},\quad \frac{1}{5}xy\sqrt{x+y}.$$

Раціональний множник, що стоїть перед знаком радикала, називають **коефіцієнтом**.

Якщо радикали не зведені до найпростішого вигляду, то не можна казати про їх подібність. Щоб це з'ясувати, слід їх спростити, тобто: звільнитись під радикалом від дробів; винести за знак радикала ті множники, з яких добувається точний корінь; показник кореня і степеня підкореневого виразу скоротити на найбільший спільний дільник.

Розглянемо приклади на доведення подібності радикалів.

1) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^3y}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$.

Розв'язання.

1) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=\frac{1}{y}\sqrt[3]{xy^2}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y}}=\frac{1}{xy}\sqrt[3]{xy^2}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}=\frac{1}{x}\sqrt[3]{xy^2}$.

Отже, радикали подібні.

4) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ і $\sqrt{a^2-b^2}$; 5) $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[6]{4a^6}$; $\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$.

Розв язання.

4) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}} = \frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$.

Отже, радикали подібні.

5) $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[6]{4a^6} = a\sqrt[6]{4} = a\sqrt[3]{2}$;

$\sqrt[3]{6\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27\cdot 2}{8}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

5. Дії над радикалами. Додавання і віднімання. Додавання і віднімання радикалів виконують так само, як і додавання і віднімання раціональних одночленів: радикали сполучають знаками «+» або «−» і зводять подібні члени, якщо вони є.

У багатьох випадках при додаванні і відніманні радикалів доводиться спочатку виявляти подібні члени, а потім їх зводити. Для виявлення подібних членів слід звести радикали до найпростішого вигляду. Наприклад:

$$4\sqrt{6} + 7\sqrt{54} = 4\sqrt{6} + 7\sqrt{9\cdot 6} = 4\sqrt{6} + 21\sqrt{6} = 25\sqrt{6};$$

$$2a\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}} + 3b\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = 2a\sqrt[3]{\frac{ab}{a^3}} + 3b\sqrt[3]{\frac{ab}{b^3}} =$$

$$= 2\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{ab} = 5\sqrt[3]{ab}.$$

Множення і ділення радикалів. Щоб перемножити кілька радикалів з однаковими показниками, треба перемножити підкореневі вирази і написати добуток під знаком кореня з тим самим показником.

Наприклад: $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{70}$; $2\sqrt{3ax}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3a} = \frac{1}{2}\sqrt{9a^2x} = \frac{3}{2}a\sqrt{x}$.

Щоб поділити радикали з однаковими показниками, треба поділити їх підкореневі вирази і записати частку під знаком кореня з тим самим показником. Якщо перед радикалами є коефіцієнти, то їх також слід поділити. Наприклад: $27\sqrt[6]{115} : 9\sqrt[6]{5} = 3\sqrt[6]{23}$;

$$-9a\sqrt{\frac{2a-2b}{x}} : \frac{3a}{b}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}} = -\frac{9ab}{3a}\sqrt{\frac{2(a-b)\cdot 2bx^2}{x(a-b)}} =$$

$$= -3b\sqrt{4bx} = -6b\sqrt{bx}.$$

Якщо треба помножити або поділити радикали з різними показниками, їх спочатку зводять до одного показника. Наприклад: $\sqrt[3]{4a^2} : \sqrt{2a} = \sqrt[6]{16a^4} : \sqrt[6]{8a^3} = \sqrt[6]{2a}$;

$$a\sqrt{2x} \cdot \frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} \cdot b\sqrt[4]{3x^3} = a\sqrt[12]{2^6x^6} \cdot \frac{b}{a}\sqrt[12]{\frac{1}{x^8}} \cdot b\sqrt[12]{3^3x^9} =$$
$$= b^2\sqrt[12]{\frac{2^6 \cdot 3^3x^6x^9}{x^8}} = b^2\sqrt[12]{1728x^7}.$$

Якщо треба помножити або поділити радикал на раціональний вираз, то достатньо на нього помножити або поділити коефіцієнт радикала. Наприклад:
$5x\sqrt[3]{3ax^2} \cdot (-2,5a) = -12,5ax\sqrt[3]{3ax^2}$; $8a^2b^2\sqrt{xy} : \frac{2}{3}ab =$
$= \frac{8a^2b^2 \cdot 3}{2ab}\sqrt{xy} = 12ab\sqrt{xy}$.

Піднесення радикала до степеня. Піднесення радикала до степеня і добування кореня з кореня ми вже розглядали під час вивчення властивостей коренів. Розглянемо ще деякі приклади.

Щоб піднести радикал до степеня, треба піднести до цього степеня підкореневий вираз, залишивши той самий показник радикала.

Наприклад: $(\sqrt[3]{3x^2y})^2 = \sqrt[3]{(3x^2y)^2} = \sqrt[3]{9x^4y^2}$;
$(\sqrt[m]{2a^3})^n = \sqrt[m]{2^na^{3n}}$.

Добування кореня з радикалів. Щоб добути корінь з кореня, достатньо з підкореневого виразу добути корінь з показником, що дорівнює добутку двох даних показників.
Наприклад: $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{14}}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^7} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$ (перший спосіб); $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = a^2\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2\sqrt[6]{a^2} = a^2\sqrt[3]{a}$ (другий спосіб); $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{(a^2\sqrt[3]{a})^2} = a^2\sqrt[3]{a}$ (третій спосіб).

Зазначимо, що множення і ділення сум, що містять радикали, виконуються за звичайними правилами множення і ділення многочленів. При цьому широко застосовуються формули скороченого множення та ділення: $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) = (\sqrt{x+1})^2 -$

$-(\sqrt{x-1})^2 = x+1-x+1 = 2$, якщо $x > 1$; $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3a}-5\sqrt{0,2b}\right)^2 = \frac{3}{4}a - 5\sqrt{0,6ab}+5b$.

Розкладаючи на множники вирази, що містять радикали, застосовують не тільки розкладання на множники підкореневих виразів, а й подання раціональних виразів у вигляді добутку радикалів.

Наприклад: $a+\sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a}+1)$, тут a подаємо як $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$;

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Зведення до раціонального вигляду членів дробових ірраціональних виразів. Під час обчислення дробових ірраціональних виразів у деяких випадках доцільно звільнятись від ірраціональності (тобто від радикалів) у знаменнику або чисельнику. Це перетворення грунтується на основній властивості дробу: *величина дробу не змінюється від множення його чисельника й знаменника на один й той самий вираз, який не дорівнює нулю.*

Наведемо приклади, коли знаменник — одночленний ірраціональний вираз:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3};$$

$$\frac{5}{2\sqrt[5]{3^2}} = \frac{5\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}} = \frac{5\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^5}} = \frac{5\sqrt[5]{3^3}}{6} = \frac{5\sqrt[5]{27}}{6}.$$

Якщо у знаменнику — двочлен, то можна звільнитись від ірраціональності в знаменнику, використовуючи тотожність $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$.

Наприклад:

$$\frac{5}{4+\sqrt{11}} = \frac{5(4-\sqrt{11})}{(4+\sqrt{11})(4-\sqrt{11})} = \frac{5(4-\sqrt{11})}{16-11} =$$

$$= \frac{5(4-\sqrt{11})}{5} = 4-\sqrt{11};$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3};$$

$$\frac{14}{5\sqrt{2}+2\sqrt{7}}=\frac{14(5\sqrt{2}-2\sqrt{7})}{(5\sqrt{2}+2\sqrt{7})\cdot(5\sqrt{2}-2\sqrt{7})}=$$
$$=\frac{14(5\sqrt{2}-2\sqrt{7})}{(5\sqrt{2})^2-(2\sqrt{7})^2}=\frac{14(5\sqrt{2}-2\sqrt{7})}{50-28}=$$
$$=\frac{14(5\sqrt{2}-2\sqrt{7})}{22}=\frac{7(5\sqrt{2}-2\sqrt{7})}{11}.$$

В окремих випадках виникає потреба звільнитись від ірраціональності в чисельнику. Перетворення виконують аналогічно, тобто чисельник і знаменник множать на такий вираз, щоб добуток став раціональним.

Наприклад: $\frac{3\sqrt{2}}{5}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{6}{5\sqrt{2}}$;

$$\frac{2\sqrt[4]{a^3}}{3a}=\frac{2\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{a}}{3a\sqrt[4]{a}}=\frac{2a}{3a\sqrt[4]{a}}=\frac{2}{3\sqrt[4]{a}};$$

$$\frac{5+\sqrt{3}}{4}=\frac{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}{4(5-\sqrt{3})}=\frac{5^2-(\sqrt{3})^2}{4+(5-\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{25-3}{4(5-\sqrt{3})}=\frac{11}{2(5-\sqrt{3})}.$$

§ 2. Ірраціональні рівняння

Найпростіші ірраціональні рівняння. Рівняння, в яких невідоме міститься під знаком кореня, називають *ірраціональним.* Інакше кажучи, рівняння називають ірраціональним, якщо в ньому, крім дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з натуральним показником, зустрічається також добування кореня з алгебраїчних виразів, які містять невідоме.

Прикладами ірраціональних рівнянь, є: $\sqrt{x}=3$; $\sqrt{8-x}+x=2$; $\sqrt[3]{2x+7}=3$; $3-\sqrt[4]{5x+1}=1$; $\sqrt{x+\sqrt{x^2-5}}=2$ та ін.

Будь-яке ірраціональне рівняння можна перетворити в ціле алгебраїчне рівняння, яке є наслідком вихідного.

Доведення цього твердження в загальному вигляді складне, і ми обмежимося розглядом окремих випадків.

Під час розв'язування ірраціональних рівнянь, які містять вирази з невідомими під знаком квадратного кореня, намагаються позбутися коренів, підносячи до квадрата обидві частини рівняння.

П р и к л а д. Розв'язати рівняння $\sqrt{8-x}+x=2$.

Р о з в ' я з а н н я. Відокремимо радикал (залишимо його в лівій частині), а решту членів рівняння перенесемо в праву частину:

$$\sqrt{8-x}=2-x.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:
$(\sqrt{8-x})^2=(2-x)^2$, звідки $8-x=4-4x+x^2$.

Зведемо одержане рівняння до стандартного вигляду і розв'яжемо його:

$$x^2-3x-4=0, \quad x_1=-1, \quad x_2=4.$$

П е р е в і р к а. $x_1 = -1$. У лівій частині маємо: $\sqrt{8-(-1)}+(-1)=\sqrt{8+1}-1=\sqrt{9}-1=3-1=2$.

Права частина дорівнює 2.

Отже, $x=-1$ є коренем даного ірраціонального рівняння.

$x_2=4$. У лівій частині маємо: $\sqrt{8-4}+4=\sqrt{4}+4=6$. Права частина дорівнює 2; $6 \neq 2$.

Отже, корінь $x=4$ є стороннім для даного ірраціонального рівняння, ми його відкидаємо.

Як виник сторонній корінь? Щоб з'ясувати це, розглянемо питання у загальному вигляді.

Нехай дано рівняння $A=B$, де A і B — деякі вирази, що містять невідоме. Після піднесення до квадрата обох частин рівняння дістанемо: $A^2=B^2$, або $(A+B)(A-B)=0$.

Маємо два рівняння: $A-B=0$, тобто $A=B$ і $A+B=0$, тобто $A=-B$.

Перше з цих рівнянь таке саме, як вихідне, а корені другого (якщо вони існують) можуть відрізнятися від коренів даного. Тоді вони сторонні відносно до рівняння $A=B$.

Тому, якщо під час розв'язування рівняння обидві його частини підносять до квадрата (чи іншого степеня), то після розв'язування утвореного рівняння слід вибрати з його коренів лише ті, які задовольняють початкове рівняння; решта коренів будуть сторонніми.

Повернемось до рівняння $\sqrt{8-x}+x=2$. Із проведеного дослідження випливає, що сторонній корінь $x=4$ має задовольняти рівняння $\sqrt{8-x}=-2(2-x)$. Це справді так, бо

$$\sqrt{8-4}=-(2-4);\quad 2=2.$$

Якщо піднести до квадрата обидві частини рівняння, то сторонніх коренів не буде, якщо рівняння $A=-B$ не має коренів.

В окремих випадках, не розв'язуючи даного ірраціонального рівняння, можна з'ясувати, що воно не має коренів.

Наприклад: $\sqrt{x-5}=-2$ — рівняння не має коренів, бо арифметичний корінь не може бути від'ємним.

$2-\sqrt{x+10}=6$ — рівняння не має коренів: цей випадок стає очевидним, якщо рівняння записати у вигляді $\sqrt{x+10}=-4$.

$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=0$ — рівняння не має коренів, бо $\sqrt{x+2}$ і $\sqrt{x-2}$ не можуть бути рівними ні при яких значеннях x.

$\sqrt{x-5}-\sqrt{4-x}=3$ — перший радикал має смисл, коли $x-5\geqslant 0$, тобто $x\geqslant 5$, а другий, коли $4-x\geqslant 0$, тобто $x\leqslant 4$.

Ці нерівності несумісні, отже, дане ірраціональне рівняння не має коренів.

Розглянемо ще кілька прикладів розв'язування ірраціональних рівнянь.

П р и к л а д 1. $\sqrt{4x+8}+\sqrt{3x-2}=2$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо два радикали, позбутися яких одночасно піднесенням до квадрата неможливо. Тому відокремимо один з радикалів, а потім піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Матимемо:

$$\sqrt{4x+8}=2-\sqrt{3x-2},\ (\sqrt{4x+8})^2=(2-\sqrt{3x-2})^2,$$

$$4x+8=4-4\sqrt{3x-2}+3x-2,\ 4\sqrt{3x-2}=-x-6,$$

$$(4\sqrt{3x-2})^2=\Big(-(x+6)\Big)^2;\ 16(3x-2)=x^2+12x+36,$$

$$x^2 - 36x + 68 = 0, \quad \text{звідки } x_1 = 2; \quad x_2 = 34.$$

Обидва ці корені для даного ірраціонального рівняння є сторонніми (перевірте це).

Чи можна було, не розв'язуючи даного ірраціонального рівняння, встановити, що воно не має коренів?

Зауважимо, що під час розв'язування рівнянь немає потреби заздалегідь з'ясовувати, чи з'являються сторонні корені при піднесенні до квадрата. Підносимо до степеня стільки разів, скільки потрібно для знищення радикалів, і перевіряємо, чи задовольняють корені утвореного рівняння початкове.

Приклад 2. $\sqrt{2x+15} - \sqrt{x-1} = 3.$

Розв'язання. $(\sqrt{2x+15})^2 = (3 + \sqrt{x-1})^2,$

$$2x + 15 = 9 + 6\sqrt{x-1} + x - 1,$$

$$x + 7 = 6\sqrt{x-1}, \quad (x+7)^2 = (6\sqrt{x-1})^2,$$

$$x^2 - 22x + 85 = 0; \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 17.$$

Перевіримо, чи є числа 5 і 17 коренями вихідного рівняння.

$x_1 = 5$, у лівій частині дістанемо $\sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3.$ Права частина дорівнює 3, маємо $3 = 3$.

$x_2 = 17$, у лівій частині дістанемо: $\sqrt{49} - \sqrt{16} = 3;$ $3 = 3.$

Отже, дане ірраціональне рівняння має два корені:

$$x_1 = 5 \text{ і } x_2 = 17.$$

Розглянемо приклад рівняння з трьома радикалами.

Приклад 3. $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{5x-10}.$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$(2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{5x-10})^2,$$

$$4(x-1) - 4\sqrt{(x-1)(x+2)} + x + 2 = 5x - 10.$$

Відокремимо радикал і зведемо подібні:

$$4\sqrt{(x-1)(x+2)} = 8, \quad \sqrt{(x-1)(x+2)} = 2,$$

$$\left(\sqrt{(x-1)(x+2)}\right)^2 = 2^2; \quad (x-1)(x+2) = 4,$$

$$x^2 + x - 6 = 0, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$$

Перевіримо здобуті корені за вихідним рівнянням:

1) $x_1 = -3$, у лівій частині вираз $2\sqrt{-3-1} - \sqrt{-3+2}$ не має смислу, отже, $x_1 = -3$ — сторонній корінь; 2) $x_2 = 2$, ліва частина $2\sqrt{2-1} - \sqrt{2+2} = 0$, права частина $\sqrt{5 \cdot 2 - 10} = \sqrt{10 - 10} = 0$.

Отже, $x_2 = 2$ — корінь даного ірраціонального рівняння.

Приклад 4. $2\sqrt[3]{2x + x^3 + 15} - x = x + 2$.

Розв'язання.

Відокремимо радикал

$2\sqrt[3]{2x + x^3 + 15} = 2x + 2, \quad \sqrt[3]{2x + x^3 + 15} = x + 1$

Звільнимося від радикала

$$(\sqrt[3]{2x + x^3 + 15})^3 = (x+1)^3; \quad 2x + x^3 + 15 =$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

$$3x^2 + x - 14 = 0; \quad x_1 = -2\frac{1}{3}, \quad x_2 = 2.$$

Перевірка. $x_1 = -2\frac{1}{3}$, ліва частина

$$2\sqrt[3]{2 \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right) + \left(-2\frac{1}{3}\right)^3 + 15} + 2\frac{1}{3} =$$

$$= 2\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} + 2\frac{1}{3} = 2\sqrt[3]{-\frac{64}{27}} + 2\frac{1}{3} = -2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Права частина $-2\frac{1}{3} + 2 = -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, тобто $x_1 = -2\frac{1}{3}$ є коренем даного ірраціонального рівняння; $x_2 = 2$, ліва частина $2\sqrt[3]{4 + 8 + 15} - 2 = 2\sqrt[3]{27} - 2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$.

Права частина $2 + 2 = 4$, $4 = 4$, тобто $x_2 = 2$ теж задовольняє дане рівняння.

Отже, $x_1 = -2\frac{1}{3}$; $x_2 = 2$.

П р и к л а д 5. $\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0.$

Р о з в ' я з а н н я. 1-й с п о с і б. Подамо рівняння у вигляді $4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 3$ і піднесемо обидві його частини до куба. При цьому формулу куба різниці візьмемо в такому вигляді:

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

Маємо: $64x - x^2 - 12\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}(4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}) = 27$. Врахуємо, що $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^3}$ і $4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 3$ (це випливає з умови).

Отже, перетворене рівняння має вигляд $64x - x^2 - 12x \cdot 3 = 27$, $x^2 - 28x + 27 = 0$. $x_1 = 1$, $x_2 = 27$ — корені цього рівняння.

Підставляючи в початкове рівняння ці корені, переконуємося, що обидва вони його задовольняють.

Як бачимо, розглянутий спосіб розв'язування дуже громіздкий. 2-й с п о с і б. Беручи до уваги, що $(\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}$, можна ввести нову змінну, поклавши $\sqrt[3]{x} = y$. Тоді $\sqrt[3]{x^2} = y^2$ і відносно нової змінної рівняння перетворюється на таке: $y^2 - 4y + 3 = 0$. Звідси $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Але $x = y^3$, отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 27$.

Розглянемо ще кілька прикладів розв'язування ірраціональних рівнянь способом введення допоміжного невідомого.

П р и к л а д 6. $x^2 + \sqrt{x^2 - 9} = 21.$

Р о з в ' я з а н н я. Віднімемо від обох частин рівняння по 9:

$$x^2 - 9 + \sqrt{x^2 - 9} = 12.$$

Введемо допоміжне невідоме $\sqrt{x^2 - 9} = y$, $y \geqslant 0$.

Маємо $y^2 + y - 12 = 0$: $y_1 = -4$, $y_2 = 3$.

Корінь $y_1 = -4$ відкидаємо як сторонній.

Підставляючи друге значення y в рівність $\sqrt{x^2 - 9} = y$, знайдемо $\sqrt{x^2 - 9} = 3$; $x^2 - 9 = 9$; $x = \pm 3\sqrt{2}$.

П р и к л а д 7. $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} - \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 5.$

Р о з в ' я з а н н я. Введемо нове невідоме

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 11}, \text{ тоді } x^2 - 3x + 11 = y^2$$

$$\text{і } x^2 - 3x + 3 = y^2 - 8.$$

Таким чином, відносно нового невідомого дане рівняння має вигляд $2y-\sqrt{y^2-8}=5$. Звільнившись від радикала, дістанемо $3y^2-20y+33=0$, звідки $y_1=3,\ y_2=\frac{11}{3}$. Обидва корені задовольняють рівняння (перевірте це).

Далі, беручи до уваги, що $x^2-3x+11=y^2$, дістанемо два рівняння відносно x:

$$x^2-3x+11=\left(\frac{11}{3}\right)^2 \text{ і } x^2-3x+11=3^2,$$

або після спрощень $x^2-3x-\frac{22}{9}=0$ і $x^2-3x+2=0$.

Перше рівняння має корені $x_{1,2}=\frac{9\pm13}{6}$, а друге $x_1=$ $=1,\ x_2=2$.

Усі чотири корені задовольняють початкове рівняння. У цьому можна переконатися, підставивши їхні значення.

$$x_{1,2}=\frac{9\pm13}{6};\quad x_3=1;\quad x_4=2.$$

Приклад 8. $\sqrt{1,5-x\sqrt{x^2-5,25}}=2$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і виконаємо перетворення: $1,5-x\sqrt{x^2-5,25}=$ $=4$, $x\sqrt{x^2-5,25}=-2,5$, $x^2(x^2-5,25)=6,25$, x^4- $-5,25x^2-6,25=0$.

Введемо позначення $x^2=y$. Маємо: $y^2-5,25y-$ $-6,25=0$; $y_1=-1$; $y_2=6,25$.

Але $x^2\geqslant0$, тому $y_1=-1$ відкидаємо. Залишається $x^2=6,25$, звідки $x_1=-2,5$; $x_2=2,5$. Якщо $x=-2,5$,

$$\sqrt{1,5-x\sqrt{x^2-5,25}}=\sqrt{1,5+2,5\sqrt{6,25-5,25}}=$$

$$=\sqrt{4}=2.$$

Якщо $x=2,5$, то

$$\sqrt{1,5x\sqrt{x^2-5,25}}=\sqrt{1,5-2,5\sqrt{6,25-5,25}}=\sqrt{-1},$$

але такого числа серед дійсних чисел не існує. Отже, дане ірраціональне рівняння має єдиний корінь $x=-2,5$.

Приклад 9. $x^2 - x - \sqrt{x^2 - x + 13} = 7.$

Розв'язання. Додаючи до обох частин рівняння по 13, маємо:

$$(x^2 - x + 13) - \sqrt{x^2 - x + 13} = 20.$$

Введемо позначення $\sqrt{x^2 - x + 13} = y$, дістанемо квадратне рівняння відносно y : $y^2 - y - 20 = 0$, корені якого $y_1 = -4$ і $y_2 = 5$.

Але $\sqrt{x^2 - x + 13} \geqslant 0$. Отже, $y_1 = -4$ відкидаємо і беремо $\sqrt{x^2 - x + 13} = 5$. Маємо: $x^2 - x + 13 = 25$, $x^2 - x - 12 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Якщо $x = -3$, то $9 + 3 - \sqrt{9 + 3 + 13} = 12 - 5 = 7$.

Якщо $x = 4$, то $16 - 4 - \sqrt{16 - 4 + 13} = 12 - 5 = 7$.

Отже, дане рівняння має два корені: $x_1 = -3$ і $x_2 = 4$.

Приклад 10. $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x - 7} = 5.$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x + 7}$. Дістанемо: $(\sqrt{x + 6} - \sqrt{x - 7})(\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 7}) = 5(\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 7})$, $x + 6 - x + 7 = 5(\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 7})$, звідки $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 7} = \frac{13}{6}$.

Додаючи почленно це рівняння до даного, дістанемо $2\sqrt{x + 6} = \frac{38}{5}$. Звідси $x = \left(\frac{19}{5}\right)^2 - 6 = 8\frac{11}{25}$.

Підставимо значення $x = \left(\frac{19}{5}\right)^2 - 6 = 8\frac{11}{25}$ у дане рівняння і переконаємося, що воно його не задовольняє (зробіть це самостійно).

Отже, дане рівняння не має розв'язків. Як бачимо, крім загальних підходів, під час розв'язування ірраціональних рівнянь можна застосовувати штучні способи.

Системи ірраціональних рівнянь. Якщо серед рівнянь системи є ірраціональні, то для їх розв'язання, як правило, звільняються від ірраціональності. При цьому застосовують методи, які використовували під час розв'язування ірраціональних рівнянь. Наведемо приклади розв'язування систем ірраціональних рівнянь.

Приклад 1. $\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136. \end{cases}$

Розв'язання. Введемо нову змінну $z = \sqrt{x+y}$. Тоді $x + y = z^2$, і перше рівняння системи матиме вигляд: $z^2 + z - 20 = 0$, звідки $z_1 = -5$, $z_2 = 4$.

Вираз $\sqrt{x+y} = -5$ не має смислу. З рівності $\sqrt{x+y} = 4$ знаходимо $x + y = 16$.

Визначимо з цього рівняння x і підставимо в друге рівняння системи

$$x = 16-y,\ (16-y)^2+y^2 = 136,\ 256-32y+y^2+y^2 = 136,$$

$$2y^2 - 32y + 120 = 0,\ y^2 - 16y + 60 = 0.$$

Корені цього рівняння $y_1 = 6$, $y_2 = 10$.

Визначимо x: $x_1 = 16 - y_1$; $x_1 = 10$; $x_2 = 16 - y_2$; $x_2 = 6$.

Відповідь. (10; 6), (6; 10)

Приклад 2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-3} = 5, \\ x + y = 37. \end{cases}$

Розв'язання. Введемо позначення $\sqrt[3]{x+1} = p$, $\sqrt[3]{y-3} = q$, тоді $x + 1 = p^3$, $y - 3 = q^3$.

Додаючи почленно ці рівняння, дістанемо:

$$x + y - 2 = p^3 + q^3, \text{ або } x + y = p^3 + q^3 + 2.$$

З другого рівняння системи маємо:

$$37 = p^3 + q^3 + 2, \text{ або } p^3 + q^3 = 35.$$

Візьмемо до уваги тотожність $(p + q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p+q)$ і підставимо замість p^3+q^3 і $p+q$ їх значення, а саме: $p^3 + q^3 = 35$, $p + q = 5$.

Отже, $5^3 = 35+3pq\cdot 5$; $15pq = 90$; $pq = 6$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} p + q = 5, \\ pq = 6, \text{ звідки } p_1 = 2,\ q_1 = 3,\ p_2 = 3,\ q_2 = 2. \end{cases}$$

Повернемось до невідомих x і y, дістаємо:

$$\sqrt[3]{x+1} = 2,\ x + 1 = 8; \quad \sqrt[3]{y-3} = 3,\ y - 3 = 27;$$

$$\sqrt[3]{x+1} = 3,\ x + 1 = 27; \quad \sqrt[3]{y-3} = 2,\ y - 3 = 8.$$

Маємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} x+1=8, \\ y-3=27; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x+1=27, \\ y-3=8. \end{cases}$$

Розв'язками першої системи є $x = 7$, $y = 30$, а другої $x = 26$, $y = 11$.

Відповідь. (7; 30), (26; 11).

Приклад 3. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x+y=13. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо суму $x+y$ у вигляді $x+y = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy}$.

За першим і другим рівняннями системи маємо:

$$13 = \left(\frac{5}{6}\sqrt{xy}\right)^2 - 2\sqrt{xy}, \quad 13 = \frac{25}{36}xy - 2\sqrt{xy},$$

$$\frac{25}{36}xy - 2\sqrt{xy} - 13 = 0.$$

Позначивши $\sqrt{xy} = z$, дістанемо $25z^2 - 72z - 13\cdot 36 = 0$,

$$z_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 + 36\cdot 13\cdot 25}}{25};$$

$$z_{1,2} = \frac{36 \pm 6\sqrt{36+325}}{25} = \frac{36 \pm 6\cdot 19}{25};$$

$$z_1 = \frac{36 - 6\cdot 19}{36} \text{ не задовольняє, } z_2 = \frac{36+6\cdot 19}{25} =$$

$$= \frac{36+114}{25}, \quad z_2 = \frac{150}{25} = 6.$$

Отже, $\sqrt{xy} = 6$. Підставимо значення $\sqrt{xy}$ у перше рівняння системи. Маємо $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\cdot 6$; $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 5$. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=6, \end{cases}$$

дістанемо $\sqrt{x} = 2$, $\sqrt{y} = 3$, звідси $x_1 = 4$, $y_1 = 9$; $\sqrt{x} = 3$, $\sqrt{y} = 2$, звідси $x_2 = 9$, $y_2 = 4$.

Відповідь. (4; 9), (9; 4).

Приклад 4. $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} + \sqrt[4]{5-y} = 3, \\ 5x - y = 11. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} + \sqrt[4]{5-y} = 3, \\ 5x - y = 11. \end{cases}$$

Нехай $\sqrt[4]{1+5x} = u$, $\sqrt[4]{5-y} = v$, тоді $\begin{cases} u + v = 3. \\ u^4 + v^4 = 17 \end{cases}$

$v = 3 - u$, тоді $u^4 + (3-4)^4 = 17$.

Запишемо друге рівняння таким чином:

$(u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = 17$;

$((u+v)^2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 17$, або

$(9 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 17$; $2u^2v^2 - 36uv + 64 = 0$

$(uv)^2 - 18uv + 32 = 0$; $uv = 2$; $uv = 16$;

1) $\begin{cases} uv = 2, \\ u + v = 3; \end{cases}$ $t^2 - 3t + 2 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2$;

$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 2; \end{cases}$ або $\begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = 1. \end{cases}$

Отже, $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} = 1; & x = 0; \\ \sqrt[4]{5-y} = 2; & y = -11; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} = 2; \\ \sqrt[4]{5-y} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} uv = 16, \\ u + v = 3. \end{cases}$ $t^2 - 3t + 16 = 0$ — немає розв'язків.

Відповідь. (0; −11), (3; 4).

Приклад 5.

$$\begin{cases} (x + y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 65, \\ (x - y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 185. \end{cases}$$

Розв'язання. Ліві частини рівнянь системи запишемо у вигляді:

$$\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y\sqrt{x}}{y^2} + 1\right) \cdot y^2\sqrt{x^2+y^2} = 65,$$

$$\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y\sqrt{x}}{y^2} + 1\right) \cdot y^2\sqrt{x^2+y^2} = 185.$$

Поділимо почленно рівняння системи:

$$\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y\sqrt{x}}{y^2} + 1\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y\sqrt{x}}{y^2} + 1\right) = 65 : 185.$$

Спростивши цю рівність, дістанемо:

$$37\left(\frac{x}{y^2}+\frac{\sqrt{x}}{y}+1\right)=13\left(\frac{x}{y^2}-\frac{\sqrt{x}}{y}+1\right),$$

звідки $24\frac{x}{y^2}+50\frac{\sqrt{x}}{y}+24=0$, або

$$12\frac{x}{y^2}+25\frac{\sqrt{x}}{y}+12=0.$$

Уводимо нове невідоме $\frac{\sqrt{x}}{y}=z$. Дістанемо:

$$12z^2+25z+12=0,$$

$$z_{1,2}=\frac{-25\pm\sqrt{625-4\cdot12\cdot12}}{24}=\frac{-25\pm\sqrt{49}}{24}=\frac{-25\pm7}{24},$$

$$z_1=\frac{-32}{24}=-\frac{4}{3},\ z_2=\frac{-18}{24}=-\frac{3}{4},$$

$$z_1=-\frac{4}{3},\ z_2=-\frac{3}{4}.$$

Візьмемо $z_1=-\frac{4}{3}$ і знайдемо $\frac{x}{y^2}$. Маємо $\frac{x}{y^2}=\frac{16}{9}$, звідки $y^2=\frac{9x}{16}$. Підставимо значення $\frac{x}{y^2}$, $\frac{\sqrt{x}}{y}$ і y^2 у перше рівняння системи $\left(\frac{16}{9}-\frac{4}{3}+1\right)\cdot\frac{9x}{16}\sqrt{x+\frac{9x}{16}}=65$.

$$\frac{13}{9}\cdot\frac{9x}{16}\sqrt{\frac{25x}{16}}=65,\ \text{звідки}\ \frac{13x}{16}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{x}=65,\ \ \frac{x}{64}\sqrt{x}=1,$$

$$\frac{x^2}{64^2}\cdot x=1,\ x^3=64^2,\ x^3=(4^3)^2=(4^2)^3,\ x=4^2,\ x=16.$$

Знайдемо y. Маємо: $\frac{\sqrt{16}}{y}=-\frac{4}{3}$, звідки $y=-3$.

Аналогічно, підставляючи значення $z_2=-\frac{3}{4}$, знайдемо $x=9$, $y=-4$.

Відповідь. $(16;\ -3)$, $(9;\ -4)$.

§ 3. Узагальнення поняття степеня. Степенева функція

Степінь з натуральним і цілим показником. Для узагальнення поняття степеня нагадаємо основні поняття і формули.

$a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ разів}}$, якщо n – натуральне число, $n > 1$, $a^n = a$, якщо $n = 1$; $a^n = 1$, якщо $n = 0$, $a \neq 0$; $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, якщо n – ціле число, $n < 0$, $a \neq 0$.

Нагадаємо властивості степеня з цілим показником.

Перемножуючи степені з однаковою основою $a (a \neq 0)$, їх показники додають: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Ділячи степені з однаковою основою $a (a \neq 0)$, від показника діленого віднімають показник дільника: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Щоб піднести до степеня добуток, достатньо до цього степеня піднести кожний множник і результати перемножити: $(abc)^n = a^n b^n c^n$.

Іноді цю рівність необхідно прочитати справа наліво: щоб помножити степені з однаковими показниками, достатньо перемножити основи і результат піднеети до степеня з тим самим показником.

$$a^n b^n c^n = (abc)^n.$$

Щоб піднести до степеня дріб, слід піднести до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат поділити на другий:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Щоб піднести до степеня степінь, треба показники степенів перемножити, а основу степеня залишити без зміни:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Зазначимо, що в формулюванні цих правил ніде не вказувалося, яким має бути показник степеня: натуральним числом чи цілим. Це тому, що множина цілих чисел включає множину цілих чисел як свою частину. Отже, наведені правила стосуються степенів з натуральним, нульовим і від'ємним показниками. Зрозуміло, що для випадку степеня з нульовим і цілим показниками ставиться додаткова умова, щоб основа степеня не дорівнювала нулю.

Степінь з раціональним показником. Введення степеня з нульовим і від'ємним показниками було першим розширенням поняття про степінь. При цьому нові означення степеня з нульовим і від'ємним показниками було введено так, що властивості степеня з натуральним показником залишилися правильними і для степенів з цілим показником.

Введемо поняття про степінь, показником якого може бути будь-яке дробове (раціональне) число. Наприклад, $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{2}{3}}$, $5^{0,9}$, взагалі $a^{\frac{m}{n}}$, де $a > 0$, m — ціле, а n — натуральне число.

Введення степеня з дробовим показником буде дальшим розширенням поняття про степінь. Означення степеня з дробовим показником $a^{\frac{m}{n}}$ має бути таким, щоб властивості степеня з натуральним показником залишилися справедливими і для степенів з будь-яким дробовим показником.

Означення дробового показника виникло в зв'язку з бажанням узагальнити правило добування кореня на випадок, коли показник підкореневого числа не ділиться на показник кореня.

Правило $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ було виведене з припущення, що m і n — натуральні і m ділиться на n.

Тепер це правило будемо застосовувати і тоді, коли n — будь-яке натуральне число, а m — будь-яке ціле число.

О з н а ч е н н я 1. *Якщо a — додатне, n — натуральне число, m — будь-яке ціле число, то степінь числа a з дробовим показником $\frac{m}{n}$ є радикалом $\sqrt[n]{a^m}$, тобто*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Показником кореня служить знаменник, а показником степеня підкореневого числа — чисельник дробового показника.

Якщо $a = 0$, а $\frac{m}{n}$ — дробове додатне число, то $a^{\frac{m}{n}} = 0$.

Згідно з цим означенням маємо: $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2}$; $0,3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{0,3^5}$; $3^{-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{3^{-1}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{17}}$; $0^{\frac{1}{4}} = 0$.

Вирази $0^{-\frac{2}{5}}$, $(-4)^{\frac{3}{5}}$, $(-8)^{\frac{1}{2}}$ не мають смислу.

Обмеження, що накладається на основу $a (a > 0)$, необхідне при означенні степеня $a^{\frac{m}{n}}$. Справді, якщо $a < 0$, то коли n — парне і m — непарне, вираз $a^{\frac{m}{n}}$ не має смислу. Наприклад, $(-5)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-5)^3} = \sqrt{(-125)}$ не існує.

Отже, введення степеня з дробовим показником дає змогу зберегти правило добування кореня з степеня $\sqrt[n]{a^m}$ для випадку, коли m не ділиться на n.

Проте можна дати означення степеня з дробовим показником, не користуючись поняттям кореня.

Означення 2. *Степенем $a^{\frac{m}{n}}$ невід'ємного числа a називають невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a^m.*

За означенням степеня з дробовим показником справедлива така тотожність:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m.$$

Означення 2 зручно використовувати для доведення основних властивостей степенів виду $a^{\frac{m}{n}}$. Подаємо ці властивості без доведення. Для будь-яких додатних a і раціональних значень p і q

$$a^p a^q = a^{p+q}; \tag{1}$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}; \tag{2}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}. \tag{3}$$

Крім того, якщо $a > 0$, $b > 0$ і p — раціональне, то мають місце тотожності

$$(ab)^p = a^p b^p; \tag{4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \tag{5}$$

З властивості (1) випливає, що для будь-якого додатного a і будь-якого раціонального p $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$.

З властивості (3) випливає, що для будь-якого раціонального p $\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}$ ($a>0$, n — натуральне число, $n\neq1$).

Приклади.

1. Записати у вигляді степеня з раціональним показником такі вирази:

а) $a^{0,3}a^{-1}a^{2,7}=a^{0,3+(-1)+2,7}=a^2$;

б) $(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{8}}$;

в) $b^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{3}}=b^{-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}=b^{-\frac{1}{2}}$;

г) $(a^{-\frac{5}{8}})^{0,4}\cdot a^{0,25}=(a^{-\frac{5}{8}})^{\frac{2}{5}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{-\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=$
$=a^{-\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^0=1$.

2. Обчислити:

а) $5^{\frac{1}{5}}\cdot5^{-0,25}\cdot5^{\frac{4}{5}}\cdot5^{-0,75}=5^{\frac{1}{5}+(-0,25)+\frac{4}{5}+(-0,75)}=$
$=5^0=1$;

б) $4^3\cdot2^2=(2^2)^3\cdot2^2=2^6\cdot2^2=2^8=256$.

3. Спростити:

а) $\left(\frac{a^{-\frac{2}{5}}}{b^{\frac{1}{7}}}\right)^{-3,5}=\frac{a^{(-\frac{2}{5})\cdot(-3,5)}}{\left(b^{\frac{1}{7}}\right)^{-3,5}}=\frac{a^{-\frac{2}{5}\cdot(-\frac{7}{2})}}{b^{\frac{1}{7}\cdot(-\frac{7}{2})}}=\frac{a^{\frac{7}{5}}}{b^{-\frac{1}{2}}}=$
$=\frac{a^{1,4}}{b^{-0,5}}$;

б) $(a^{\frac{5}{12}})^{1,2}:(a^{-\frac{1}{3}})^{-1,5}=a^{\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{5}}:a^{-\frac{1}{3}\cdot(-\frac{3}{2})}=$
$=a^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{2}}=1$;

в) $(c^{-\frac{3}{7}}y^{-0,4})^3\cdot c^{\frac{2}{7}}y^{0,2}=c^{-\frac{9}{7}}y^{-\frac{6}{5}}c^{\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{5}}=$
$=c^{-\frac{9}{7}+\frac{2}{7}}\times y^{-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}}=c^{-1}y^{-1}$.

4. Знайти значення виразу:

а) $(81\cdot16)^{-\frac{1}{4}}=(3^4\cdot2^4)^{-\frac{1}{4}}=3^{4\cdot(-\frac{1}{4})}\cdot2^{4\cdot(-\frac{1}{4})}=$
$=3^{-1}\cdot2^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$;

б) $100000^{0,2}\cdot0,001^{\frac{1}{3}}=(10^5)^{\frac{1}{5}}\cdot(10^{-3})^{\frac{1}{3}}=10\cdot10^{-1}=1$

5. Записати вирази у вигляді квадрата:

а) $a^{30}=(a^{15})^2$; б) $a^3=(a^{\frac{3}{2}})^2$; в) $a^{-18}=(a^{-9})^2$;

г) $a^{-3}=(a^{-\frac{3}{2}})^2$.

6. Записати вирази у вигляді степеня з дробовим показником:

а) $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[15]{x}=x^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{1}{15}}=x^{\frac{1}{5}+\frac{1}{15}}=x^{\frac{4}{15}}$;

б) $\sqrt[7]{y^2}\cdot\sqrt[3]{y^{-2}}=y^{\frac{2}{7}}\cdot y^{-\frac{2}{3}}=y^{\frac{2}{7}-\frac{2}{3}}=y^{-\frac{8}{21}}$;

в) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^4\cdot a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}=\sqrt[6]{a^5}=a^{\frac{5}{6}}$;

г) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^{-3}}}=\sqrt[5]{\sqrt[4]{(x^2)^4\cdot x^{-3}}}=\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^8\cdot x^{-3}}}=$

$=\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^5}}=\sqrt[20]{x^5}=x^{\frac{5}{20}}=x^{0,25}$.

7. Виконати дії:

а) $(1+a^{\frac{1}{2}})(1-a^{\frac{1}{2}})=1^2-(a^{\frac{1}{2}})^2=1-a$;

б) $(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})^2=(x^{\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+(y^{-\frac{1}{2}})^2=$

$=x+2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$;

в) $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3=a+b$.

8. Розв'язати нерівності:

а) $\frac{1}{2}a\geqslant a^3$; б) $x^{-3}>x^{-1}$; в) $a^{-\frac{3}{2}}>a^{\frac{1}{2}}$.

Розв'язання. а) $a^3-\frac{1}{2}a\leqslant 0$, $a\left(a^2-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$,

$a\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\leqslant 0$, звідки $a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $0\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $x^{-3}>x^{-1}$, $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}>0$, $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\cdot\frac{1}{x}>0$. $\frac{1-x^2}{x^2x}>0$, $\frac{x^2-1}{x^2x}<0$. Але $x^2>0$, тоді маємо рівносильну нерівність $(x+1)(x-1)x<0$, розв'язуючи яку, знайдемо $x<-1$, $0<x<1$.

в) $a^{-\frac{3}{2}}>a^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}>0$, $\frac{1-a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{3/2}}>0$, $\frac{1-a^2}{aa^{\frac{1}{2}}}>0$; $\frac{a^2-1}{aa^{1/2}}<0$; за означенням, $a^{\frac{1}{2}}>0$. Маємо: $(a+1)(a-1)<$ $<a$, звідки $0<a<1$.

3. Поняття про степінь з ірраціональним показником. Розглянемо степінь a^{α}, де a — будь-яке додатне число, яке не дорівнює 1, а α — будь-яке ірраціональне число. Тут можуть бути такі три випадки:

а) $a>1$ і α додатне ірраціональне число, наприклад, $5^{\sqrt{2}}$

Позначимо: α_1 — будь-яке раціональне наближене значення α, взяте з недостачею і α_2 — будь-яке наближене раціональне значення числа α, взяте з надлишком. Тоді степінь a^{α} означає таке число, яке більше від усякого степеня a^{α_1}, але менше від усякого степеня a^{α_2}. Наприклад, $5^{\sqrt{2}}$ означає таке число, яке більше від кожного з чисел ряду: $5^{1,4}$, $5^{1,41}$, $5^{1,414}$, $5^{1,4142}$, ..., в якому показники — десяткові наближення $\sqrt{2}$, взяті з недостачею, але менші від кожного з чисел ряду: $5^{1,5}$, $5^{1,42}$, $5^{1,45}$, $5^{1,4143}$, ..., в якому показники — десяткові наближення $\sqrt{2}$, взяті з надлишком.

б) $0 < a < 1$ і α — додатне ірраціональне число, наприклад, $0,5^{\sqrt{2}}$.

Тоді під степенем α^{α} розуміють число, яке менше від будь-якого степеня α^{α_1}, але більше від будь-якого степеня α^{α_2}. Так, $0,5^{\sqrt{2}}$ є число, менше від будь-якого з чисел ряду $0,5^{1,4}$, $0,5^{1,41}$, $0,5^{1,414}$, $0,5^{1,4142}$, ..., але більше від будь-якого з чисел ряду $0,5^{1,5}$, $0,5^{1,42}$, $0,5^{1,415}$, $0,5^{1,4143}$, ...

Таким чином, якщо додатне ірраціональне число α міститься між двома раціональними числами α_1 і α_2, то степінь a^{α} міститься між степенями a^{α_1} і a^{α_2} і тоді, коли $a > 1$, і тоді, коли $a < 1$.

в) $a \geqslant 1$ і α — від'ємне раціональне число, наприклад, $5^{-\sqrt{2}}$, $(\frac{1}{3})^{-\sqrt{2}}$.

Тоді виразу a^{α} надають того самого змісту, який мають степені з від'ємними раціональними показниками.

Так, $5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{5^{\sqrt{2}}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}}$. Можна довести, що дії над степенями з ірраціональними показниками виконуються за тими самими правилами, які встановлено для степенів з раціональними показниками: $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$; $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$; $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$; $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$, де a, b — додатні числа, α, β — ірраціональні числа.

4. Степенева функція. Як ми вже переконалися, для будь-якого дійсного числа p і додатного x визначено число x^p.

Якщо показник степеня p — стале число, а основа x — змінна, то $y = x^p$ є функцією аргументу x, тобто $f(x) = x^p$.

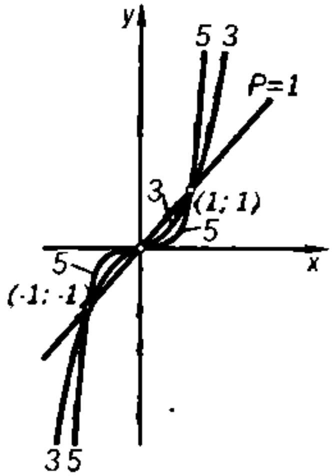
Означення. *Функцію $f(x) = x^p$, де p — стале дійсне число, а x — (основа) змінна, називають степеневою функцією.*

Область визначення і зміни степеневої функції $f(x) = x^p$, а також її властивості залежать від того, яким числом є показник p.

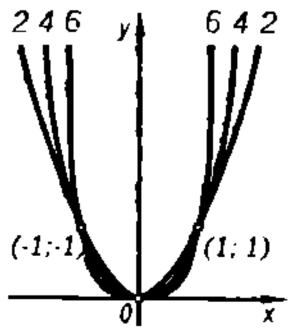
1. Нехай p — натуральне число.

Функція визначена на всій числовій прямій; якщо $x = 0$, $y = 0$ і якщо $x = 1$, $y = 1$; при p непарному ($p = 1, 3, 5, \ldots$) для всіх значень $x < 0$ і $x > 0$ знак функції збігається із знаком аргументу; функція непарна і зростає на всій області визначення.

Графіком є пряма, якщо $p = 1$ і криві, якщо $p = 3, 5, 7 \ldots$, симетричні відносно початку координат, розміщені в I і III координатних чвертях (мал. 79).



Мал. 79



Мал. 80

Якщо p парне ($2, 4, 6, \ldots$), $y > 0$ для всіх значень $x < 0$ і $x > 0$, функція парна. Якщо $x < 0$, функція спадає, якщо $x > 0$ — зростає. Графіки $y = x^p$ ($p = 2, 4, 6, \ldots$) — криві, симетричні відносно осі y, розміщені в I і II чвертях (мал. 80).

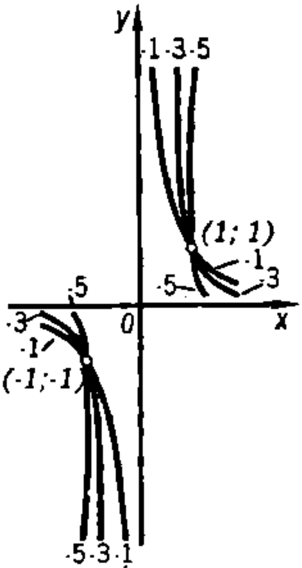
2. Нехай p — ціле від'ємне число: $-1, -2, -3, \ldots$ Тоді функція визначена на всій числовій прямій, крім то-

чки $x = 0$ (немає числа, оберненого до нуля). Графік складається з двох віток.

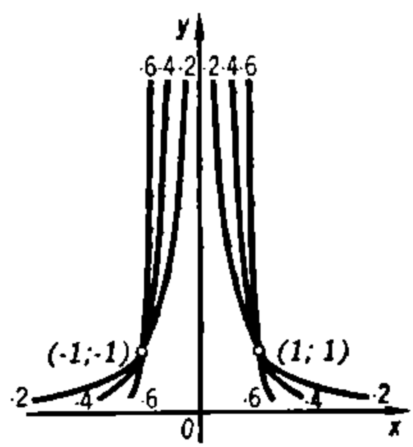
Якщо $x = 1$, то $y = 1$.

Якщо p — непарне $(-1,\ -3,\ -5\ \ldots)$, то для всіх значень $x < 0$ і $x > 0$ знак функції збігається із знаком аргументу. Функція непарна, спадна на всій області визначення. Графіком $y = x^p (p = -1,\ -3,\ -5,\ \ldots)$ є криві, симетричні відносно початку координат, розміщені в I і III чвертях (мал. 81).

Якщо p — парне $(-2,\ -4,\ -6\ \ldots)$, значенням $x < 0$ і $x > 0$ відповідають значення $y > 0$. Функція парна. Якщо $x < 0$, функція зростає, якщо $x > 0$ — спадає. Графіком $y = x^p$ $(p = -2,\ -4,\ -6\ \ldots)$ є криві, симетричні відносно осі y, розміщені в I і III чвертях (мал. 82).



Мал. 81



Мал. 82

3. Нехай $p = \dfrac{1}{k}$, де $k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$.

Функція визначена для всіх значень $x \geqslant 0$, при цьому $y \geqslant 0$, $y = 1$, якщо $x = 1$.

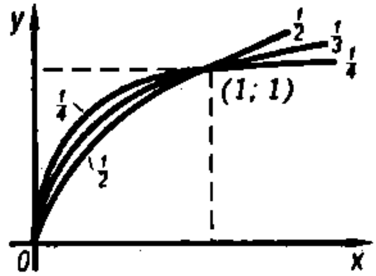
Функція зростає на всій області визначення. Графіки $y = x^{\frac{1}{k}}$ $(k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$ розміщені в I чверті (мал. 83).

Степенева функція $y = x^p$, якщо $p > 0$ визначена і коли $x = 0$, бо $0^p = 0$. Вираз 0^0 не має смислу.

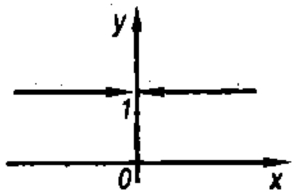
Якщо p — цілі, то степенева функція визначена і для $x < 0$. Якщо p — парні, то функція парна, а коли p непарні — непарна.

Якщо $p' = 0$, за означенням степеня з нульовим показником, то $y = 1$ при будь-якому $x \neq 0$.

Графіком такої функції є пряма, паралельна осі x і віддалена від неї на відстань, що дорівнює 1. З цієї прямої необхідно виключити точку, яка відповідає абсцисі, що дорівнює 0 (мал. 84).



Мал. 83



Мал. 84

На практиці часто доводиться розглядати функцію виду $y = Cx^p$, де C — стала. Це функції $y = kx$, $y = kx^2$, $y = kx^3$. Наприклад: функція $s = 4,9t^2$ виражає залежність між пройденим шляхом s і часом t під час вільного падіння. Функція $K = \pi R^2$ виражає залежність між площею круга K і його радіусом R.

У фізиці потужність у колі постійного струму на ділянці з опором R визначається за формулою: $P = RI^2$, де I — сила струму.

Енергію магнітного поля визначають за формулою: $W_m = \frac{Li^2}{2}$, де L — індуктивність котушки; i — сила змінного струму.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Як називається дія, за допомогою якої, знаючи показник степеня і степінь, можна знайти основу степеня?
2. Для якої дії добування кореня є оберненою дією.
3. Що називається коренем n-го степеня з числа a?
4. Що називається коренем п'ятого степеня з числа a?

5. Який знак має корінь непарного степеня з додатного числа; з від'ємного числа?

6. Яким правилом треба скористатися під час визначення знака кореня непарного степеня?

7. Чи правильні рівності: $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[3]{-125} = -5$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{25} = -5$; $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$?

8. Що називається арифметичним значенням кореня (або арифметичним коренем)?

9. Чи можна стверджувати, що a — арифметичний корінь з a^2?

10. Чи правильно, що кубічний корінь з 125 має два знаки?

11. Вказати, яке з двох означень арифметичного кореня правильне:

1) арифметичним коренем називають корінь з невід'ємного числа;

2) арифметичним коренем називають невід'ємне значення кореня з невід'ємного числа.

12. Чому дорівнює $(\sqrt[9]{17})^9$?

13. Що більше: $\sqrt[9]{90}$ чи $\sqrt[9]{85}$?

14. Що більше: $\sqrt[6]{11^2}$ чи $\sqrt[3]{11}$?

15. Що менше: $\sqrt[9]{6}$ чи $\sqrt[18]{36}$?

16. Спростіть вираз $\sqrt[8]{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}$, використовуючи основну властивість кореня.

17. Як добути корінь: з добутку? з дробу?

18. Як перемножити корені одного й того самого степеня?

19. Записати правило множення коренів з однаковими показниками аналітично (у вигляді формули).

20. Записати аналітично правило добування кореня з дробу.

21. Як виконати ділення коренів однакового степеня? Записати це правило аналітично.

22. Як добути корінь із степеня? Записати це правило аналітично і проілюструвати його прикладами.

23. Як добути корінь із кореня? Записати це правило аналітично і проілюструвати його прикладами.

24. Перелічити властивості коренів. Кожну з них записати аналітично.

25. Як винести множник за знак радикала (кореня)?

26. З яким показником степеня можна винести за знак кореня множник?

27. Які вирази називаються ірраціональними відносно якої-небудь букви?

28. Які властивості коренів використовують при винесенні множника за знак кореня, якщо підкореневий вираз дробовий?

29. Як називається перетворення, обернене до винесення множника за знак кореня?

30. На якій властивості кореня ґрунтується перетворення, що призводить до зниження степеня кореня?

31. Яке з двох тверджень правильне:

1) степінь будь-якого кореня може бути знижений;

2) степінь не будь-якого кореня може бути знижений?

32. На якій властивості коренів ґрунтується зведення їх до спільного показника?

33. Чи треба знижувати степені коренів (якщо це можливо) перед зведенням їх до спільного показника?

34. Сформулювати правило зведення коренів до найменшого спільного показника.

35. Що означає вираз «звести радикал до найпростішого вигляду»?

36. Дано корені $\sqrt[12]{a^{10}b^6}$, $\sqrt[5]{a^6}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[10]{32a^5}$. Які з них зведені до найпростішого вигляду, а які ні?

37. Які радикали називаються подібними?

38. Як додати (відняти) радикали? Проілюструйте на прикладах.

39. Як перемножити кілька коренів з однаковими показниками? Проілюструйте на прикладах.

40. Як поділити корені з однаковими показниками степенів? Проілюструйте на прикладах.

41. Як перемножити (поділити) радикали з різними показниками?

42. Яка різниця між ірраціональним виразом та ірраціональним числом?

43. Як звільнити знаменник дробу від ірраціональності, якщо цей знаменник — одночлен?

44. Як звільнити знаменник дробу від ірраціонально сті, якщо цей знаменник — двочлен з квадратними коренями? з кубічними коренями?

45. Як звільнитися від квадратної ірраціональності в тричленному знаменнику дробу?

46. Як звільнитися від ірраціональності в чисельнику дробу? Пояснити на прикладі.

47. Порівняйте числа (не виконуючи наближених обчислень):

а) $\sqrt{3}$ і $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[4]{2}$ і $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ і $\sqrt[3]{\sqrt{19}}$.

48. При яких значеннях букв правильні такі рівності:

а) $\sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7x^2} = -x\sqrt{7}$;

в) $\sqrt{2b^2 - 24b + 72} = (b - 6)\sqrt{2}$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{2b^2 - 24b + 72}} = \dfrac{1}{(6 - b)\sqrt{2}}$?

49. Яке рівняння називають ірраціональним? Навести приклад.

50. Який смисл мають корені, що входять в ірраціональне рівняння?

51. Чому ірраціональне рівняння $\sqrt{x - 3} = -2$ не має розв'язків?

52. Як ірраціональне рівняння замінити раціональним?

53. Які перетворення ірраціональних рівнянь можуть призвести до появи сторонніх коренів?

54. У чому полягає **метод введення нової змінної під час розв'язування ірраціональних рівнянь?**

55. Які нерівності називаються ірраціональними?

56. Який смисл мають корені, що входять в ірраціональну нерівність?

57. Чи завжди нерівність $f(x) < \varphi(x)$ рівносильна нерівності $(f(x))^n < (\varphi(x))^n$?

58. Записати аналітичне (у вигляді **формули**) означення степеня з дробовим показником.

59. Що більше: $3^{\frac{1}{2}}$ чи $9^{\frac{1}{4}}$?

60. Чи можна під час виконання дій **над степенями з дробовими показниками користуватися правилами дій над степенями з цілими показниками?**

61. Яке обмеження накладають на основу a у виразі $a^{\frac{m}{n}}$, де n — парне число, і чим зумовлене таке обмеження?

62. Сформулювати властивості степеня з дробовим показником.

63. Сформулювати означення степеня з від'ємним раціональним показником і записати його аналітично.

64. Чи можна степінь з дробовим показником замінити радикалом?

65. Записати за допомогою степенів з дробовим показником і обчислити за допомогою мікрокалькулятора (з трьома знаками після коми): $\sqrt[3]{110}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{15}}$; $\frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[6]{6}}$; $\frac{8}{\sqrt[5]{120}}$.

66. Записати основні властивості степеня з раціональним показником (множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня).

67. Як означається степінь з ірраціональним показником?

68. Дати означення степеневої функції з натуральним показником.

69. Які обмеження накладають на аргумент x функції $y = x^n$, якщо $n \leqslant 0$?

70. Які види степеневої функції вам відомі? Записати їх аналітично.

71. Пригадати, які функції називаються непарними. Побудувати ескізи графіків кількох непарних степеневих функцій з натуральним показником.

72. Як розміщено на координатній площині графік функції $y = x^n$, якщо n — непарне; n — парне?

73. Назвати загальні властивості степеневих функцій.

74. Які властивості має степенева функція $y = x^{-1}$? Відповісти за ескізом її графіка.

75. Назвати властивості степеневої функції $y = x^{-2}$ за ескізом її графіка.

76. Накреслити ескізи графіків функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$ і $y = x^{\frac{1}{3}}$. Користуючись графіками, сформулювати властивості цих функцій.

77. Систематизувати властивості степеневих функцій за показником n: а) n — натуральне число $(1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$;

б) n — ціле від'ємне число $(-1,\ -2,\ -3,\ \ldots)$; в) $n = \frac{1}{k}$, де $k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$.

78. Чим відрізняються між собою графіки функцій $y = x^2$ і $y = 3x^3$?

79. Порівняйте властивості функцій: а) $y = x^3$ і $y = x^5$; б) $y = x^4$ і $y = x^6$; в) $y = x^{-2}$ і $y = x^3$.

80. Дано функції $f(x) = x^5$ і $\varphi(x) = x^6$. Не виконуючи обчислень, порівняти з нулем: а) $f(25) - f(10)$; б) $f(-20) - f(-15)$; в) $f(0) \times f(50)$; г) $\varphi(11) - \varphi(7)$; д) $\varphi(-5) \cdot \varphi(-9)$; е) $\varphi(15) \cdot \varphi(0)$.

81. Чи знайдеться таке натуральне значення p, при якому графік функції $y = x^p$ проходить через точку: а) $A(1;\ 4)$; б) $B(\sqrt{3};\ 81)$; в) $C(-5;\ 6,25)$; г) $D(-7;\ 343)$?

82. При яких значеннях x існує функція $y = x^{\frac{m}{n}}$, де m і n — цілі числа і n — парне число.

83. Побудувати графік функції $y = x^{-\frac{3}{2}}$ і описати її властивості.

84. Побудувати графік функції $y = x^{-\frac{1}{3}} - 1$.

85. Чи належить функція $y = \sqrt[5]{x^3}$ до непарних? Обґрунтувати свою відповідь.

ВПРАВИ

А

1. Довести, що:

1) число 10 є арифметичний квадратний корінь із 100;

2) число -2 не є арифметичним квадратним коренем з 4;

3) число $0,3$ не є арифметичним квадратним коренем з $0,9$;

4) правильна рівність: $\sqrt{2,89} = 1,7$.

2. Знайти значення кореня:

1) $\sqrt{16}$; 2) $\sqrt{0,16}$; 3) $\sqrt{0,0016}$; 4) $\sqrt{0,000016}$; 5) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; 6) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 7) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 8) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; 9) $\sqrt{\frac{25}{16}}$; 10) $\sqrt{0,0121}$; 11) $\sqrt{2,25}$; 12) $\sqrt{1,96}$.

В

3. Знайти значення виразу:

1) $0,2\sqrt{144}+0,3\sqrt{169}$ 2) $-9\sqrt{0,0001}+\frac{1}{15}\sqrt{900}$

3) $\sqrt{36}+\sqrt{\frac{9}{25}}$; 4) $\sqrt{2\frac{14}{25}}\cdot\sqrt{\frac{16}{25}}$.

4. Записати за допомогою знака $\sqrt{\ }$ корені рівняння і обчислити їх значення:

1) $x^2=0,25$; 2) $y^2=2,25$; 3) $z^2=0,49$; 4) $x^2=1\frac{7}{9}$.

В

5. Чи має смисл вираз: а) $\sqrt{196}$; б) $\sqrt{-196}$; в) $-\sqrt{196}$; г) $\sqrt{(-49)\cdot(-4)}$; д) $\sqrt{-49\cdot 4}$?

6. При яких значеннях a і x мають смисл вирази:
1) $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{-a}$; 3) $\sqrt{x^2}$; 4) $\sqrt{-36x}$; 5) $\sqrt{x-5}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{3x-12}}$?

А

7. Знайти значення кореня:

1) $\sqrt{1000}$; 2) $\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[5]{32}$; 4) $\sqrt[6]{1}$; 5) $\sqrt[7]{-1}$; 6) $\sqrt[8]{0}$;

7) $\sqrt[3]{0,001}$; 8) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$.

8. Які з поданих нижче коренів можна назвати арифметичними:

1) $\sqrt[3]{216}=6$; 2) $\sqrt[3]{-64}=-4$; 3) $\sqrt[4]{625}=5$; 4) $\sqrt[9]{-512}=-2$; 5) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$; 6) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{2}$?

Б

9. Знайти значення виразів:

1) $7\sqrt[3]{64}$; 2) $0,2\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{-0,008}$; 3) $17-5\sqrt[3]{0,000216}$; 4) $10\sqrt[3]{(-2)^3}$.

10. Подати корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь:

а) $\sqrt[3]{-7}$; б) $\sqrt[3]{-8}$; в) $\sqrt[5]{-2a}$, де $a>0$.

В

11. Пояснити рівності:

1) $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$; 2) $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$.

12. Знайти арифметичне значення кореня $\sqrt{a^2-12a+36}$.

13. Яких значень набуває вираз $\frac{\sqrt[n]{a^n}}{n}$, якщо $a>0, a<0$?

А

14. Знайти значення виразів:

1) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{100}$; 2) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$; 3) $\sqrt[5]{x^8} \cdot \sqrt[5]{x^2}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$;

5) $\frac{\sqrt[5]{-2}}{\sqrt[5]{-64}}$; 6) $\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{32}}$.

15. Обчислити:

1) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$ 2) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$; 3) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{2}}$; 4) $\sqrt[5]{12 : \frac{4}{81}}$.

16. Перетворити вирази:

1) $(\sqrt[10]{a^3})^3$; 2) $(\sqrt[11]{5})^2$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$.

17. Спростити вирази (знизити степінь радикалів):

1) $\sqrt[4]{7^2}$; 2) $\sqrt[18]{36^2}$; 3) $\sqrt[9]{5^6}$; 4) $\sqrt[40]{a^{16}b^{24}c^{32}}$.

18. Звести радикали до спільного показника:

1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt[3]{4a^2}$ і $\sqrt{2a}$.

Б

19. Знайти значення виразів:

1) $\sqrt[3]{0,196} \cdot \sqrt[3]{1,4} \cdot \sqrt[3]{10\,000}$; 2) $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{500\,000}}$;

3) $\sqrt[5]{\frac{52 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 243}{81 \cdot 39}}$; 4) $(\sqrt[6]{4})^3$; 5) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.

20. Спростити вираз $\sqrt{x^8+2x^4y^4+y^8}$.

21. Обчислити: 1) $(5\sqrt[3]{40}-10\sqrt[3]{5}) \cdot 0,5\sqrt[3]{25}$;

2) $\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{6})+\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})-\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

22. Розмістити у порядку зростання числа: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$.

В

23. Спростити вирази:

1) $\sqrt[m+n]{a^{m^2-n^2}}$; 2) $\sqrt[a-b]{c^{a^2-2ab+b^2}}$;

3) $a+2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}-4\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a^2}-3\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{a^3}$.

24. Виконати дії:

1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$;

3) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})\cdot(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$;

4) $\sqrt{(5-a)^2}$, якщо $a \geqslant 5$;

5) $\sqrt{1-2x+x^2}$, якщо $x = 4$ і $x = \frac{1}{2}$.

25. Довести, що

$$2a - \sqrt{(a-3)^2} = \begin{cases} 3a-3, \text{ якщо } a < 3; \\ a+3, \text{ якщо } a > 3. \end{cases}$$

26. Визначити знак виразу: 1) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[5]{5}-\sqrt[6]{6}$.

27. Спростити і обчислити результат з точністю до 0,001: $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot(-\sqrt[3]{-2-\sqrt{3}})$.

A

28. Винести множник за знак радикалів:

1) $\sqrt[3]{m^8n^2}$; 2) $\sqrt[4]{16a^3b^{11}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{32a^2b^6}{243c^7}}$.

29. 1) $\sqrt[3]{24(m^2-n^2)^2\cdot(m+n)}$; 2) $\sqrt[n]{a^{2n+3}}$;

3) $\sqrt[n+1]{a^{2n^3-2}}$; 4) $\sqrt[n]{a^{nx+2}b^{3n}z^3}$

B

30. Перетворити вираз, якщо $x > 0$ і $c > 0$:

$$\frac{2x^3}{c^2}\sqrt[4]{\frac{0,25c^9}{2x}}.$$

Який результат дістанемо, якщо $x < 0$ і $c < 0$? Чи можуть x і c мати різні знаки?

31. Спростити вираз $\sqrt[n]{a^{n+1}b^n - a^nb^{n+1}}$.

32. При яких значеннях x справедлива тотожність

$$\sqrt{x^2-x^4} = -x\sqrt{1-x^2}?$$

A

33. Внести множник під знак радикалів:

1) $2\sqrt[3]{3}$, 2) $3\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$; 3) $2\sqrt[5]{\frac{1}{8}}$; 4) $a\sqrt[3]{2}$, де $a > 0$;

5) $b\sqrt[4]{5}$, де $b > 0$; 6) $(a+b)\sqrt{a+b}$.

34. Спростити вирази: 1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$, якщо $a \geqslant 0$;

2) $2\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$; 3) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$, де $x \geqslant 0$; 4) $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$, де $a \geqslant 0$.

35. Позбутися дробу під коренем: 1) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c^6}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{m}{a^2+b^2}}$.

Б

36. Внести множник під знак радикалів:

1) $2a^3\sqrt[4]{0,25b}$; 2) $(a+b)\sqrt[3]{\frac{3a^2}{a^2-b^2}}$.

37. Спростити вирази:

1) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b}}$, де $b \geqslant 0$; 2) $(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}$, де $a > 2$.

38. Порівняти числа: 1) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; 2) $\sqrt[3]{7}$ і $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$.

В

39. Внести множник під знак радикалів:

1) $\frac{2}{x-y}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{2}}$, де $0 < x < y$;

2) $2(x-y)\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3(x-y)}$.

40. Знайти значення виразу: $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

41. Довести, що коли $a > 0$, справджується рівність:

$$\sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}.$$

42. Довести, що коли $a > 0$ справджується рівність:

$$\sqrt[2n+2]{a^3\sqrt[n]{a^3}} = \sqrt[2n]{a^3}.$$

А

43. Чи можна стверджувати, що вирази $\sqrt[10]{a^5}$, $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$, $\sqrt[4]{a^6b^5}$ є радикалами найпростішого вигляду?

44. Звести до найпростішого вигляду корені:

1) $x\sqrt{\frac{x}{y}}$; 2) $y\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{40a^4}{bc^2}}$

Б

45. Спростити корені:

1) $\sqrt[3]{\frac{a}{a^2+b^2+2ab}}$; 2) $\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{ab}}$.

В

46. Звести до найпростішого вигляду вирази:

1) $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{y^{3n+2}}{x^{n-2}}}$;

2) $(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2+(\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3})^2$ $(a>0,\ x>0)$.

47. Спростити $\frac{x^2}{2-x}\sqrt{\frac{4(1-x)}{x^3}}+\frac{1}{x}$, якщо $x<2$. Перевірити, що коли $0<x<2$, даний вираз перетворюється в $\sqrt{x}$. Довести, що коли $x\leqslant 0$ і $x=2$, він втрачає смисл.

А

48. Чи подібні радикали:

1) $5\sqrt[3]{4}$ і $0,7\sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[6]{7}$ і $\sqrt[6]{15}$; 4) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$ і $\sqrt[3]{72}$?

49. Довести подібність радикалів:

1) $\sqrt[3]{250}$ і $\sqrt[6]{4\,000\,000}$; 2) $2\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}$ і $\sqrt[5]{a^2b^3}$.

50. Довести подібність радикалів: $2\sqrt[3]{\frac{a+b}{a^2}}$ і $\sqrt[3]{a^2+ab}$.

51. Чи подібні радикали: $3b\sqrt[4]{\frac{a+b}{b^2}}$ і $5\sqrt[4]{ab^2+1}$?

В

52. Довести подібність радикалів:

$$\sqrt{\frac{1}{m}-n};\quad \sqrt{\frac{n^6-mn^7}{mn^2}};\quad \sqrt{m^3-m^4n},$$

де $m>0$, $n>0$, $mn<1$.

53. Чи подібні радикали:

1) $\sqrt[4]{4^{2n+1}}$ і $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt[n]{x^{3+n}y^{3+n}}$ і $\sqrt[n]{\frac{y^2}{x^{2n-3}}}$?

Виконати дії:

А

54. 1) $3\sqrt[5]{2a^2}\cdot 5\sqrt[5]{10a}\cdot 7\sqrt[5]{24a}$; 2) $8\sqrt[7]{14a^6} : 10\sqrt[7]{ab^3}$;
3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2ab}\right)^3$.

Б

55. 1) $15\sqrt[13]{a^9} : 5\sqrt[13]{a^4} + 12\sqrt[13]{a^2} \cdot 0,25\sqrt[13]{a^3}$;
2) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{a^5b} : \sqrt[8]{a^7b^3}$;
3) $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a})^2$.

В

56. 1) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[5]{5a^2}}$; 2) $\sqrt{\frac{5\sqrt[3]{0,001m^2}}{4\sqrt[4]{m}} + \frac{7}{8}\sqrt[12]{m^5}}$;
3) $\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a^2-b}$.

Звільнити від радикалів знаменники дробів:

А

57. 1) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a^2}{b\sqrt{a}}$; 3) $\frac{3a^2}{\sqrt[3]{a}}$; 4) $\frac{m\sqrt{n}}{2n\sqrt{m}}$;
5) $\frac{9}{5-\sqrt{7}}$; 6) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Б

58. 1) $\frac{13}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; 2) $\frac{5a}{a\sqrt{7}-2\sqrt{a}}$; 3) $\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}}$;
4) $\frac{7\sqrt{a}-2\sqrt{b}}{7\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$; 5) $\frac{7}{\sqrt[3]{2}-1}$; 6) $\frac{a^3-x^3}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$.

В

59. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2}}$.

60. Звільнити від радикалів чисельники дробів:

А

1) $\frac{3\sqrt[7]{a^4}}{2a^2b}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+1}{5}$; 3) $\frac{3\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}+2}$.

Б

4) $\frac{3\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{11}$; 5) $\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}$.

В

6) $\frac{4\sqrt{6}+\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3}$; 7) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язати рівняння:

А

61. 1) $\sqrt{x}=2$; 2) $\sqrt{x-3}=5$; 3) $\sqrt{x}-4=0$;
4) $\sqrt{2x-7}=5$; 5) $\sqrt{2-x}=\sqrt{3-2x}$; 6) $\sqrt{x-a}=b$.

62. 1) $x+\sqrt{x+5}=7$; 2) $3\sqrt{x+2}=2x-5$.

63. 1) $\sqrt{x-7}+\sqrt{17-x}=4$; 2) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+3}=1$.

64. 1) $\sqrt{8x-5}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{6x+1}$;
2) $3\sqrt{x^2-4}+1=3x+7$.

Б

65. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{6x-11}$

66. 1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+3}=1$; 2) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{2-x}=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}$

67. 1) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$;
2) $\sqrt{8x+1}-\sqrt{2x-2}=\sqrt{7x+4}-\sqrt{3x-5}$;
3) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}$;
4) $x^2-x+\sqrt{x^2-2x+6}=x+6$.

В

68. 1) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$;
2) $\sqrt{\frac{5x+2}{2x-4}}=\sqrt{\frac{7x-2}{3x-8}}$.

69. 1) $\sqrt{8-x}+\sqrt{5+x}=\sqrt{9+5x}+\sqrt{4-5x}$;
2) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{2}$.

70. 1) $\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{9+24x}}=\sqrt{3}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{3x+10}}+\frac{6}{\sqrt{(x+2)(3x+10)}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

71. 1) $x-\sqrt[3]{x^3-4x-7}=1$; 2) $\sqrt{4-x\sqrt{x^2+8}}=2-x$;
3) $x^2-9x+12=4\sqrt{x^2-9x+9}$;
4) $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$.

Пояснити, чому дані ірраціональні рівняння не можуть мати дійсних коренів:

А

72. 1) $\sqrt{2x^2-3x+5}=-4$; 2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}+1=0$.

Б

73. 1) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+5}=1$; 2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{2x-1}=2$.

В

74. 1) $\sqrt{x-3}=\sqrt{2x-3}+1$;

2) $\sqrt{3x-7}-\sqrt{15x-11}=2$

Розв'язати рівняння:

75. 1) $2x+1=3\sqrt{x}$; 2) $1-\sqrt{x}=2+x$ (для цих рівнянь побудувати графіки лівої і правої частин).

76. 1) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$;

2) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$;

3) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$;

4) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

77. 1) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$;

2) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}$, $\quad x\neq 0$;

3) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

4) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$;

78. 1) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$;

2) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$;

3) $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}$.

Розв'язати системи рівнянь:

А

79. 1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ \sqrt{xy}=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ xy=4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2},\\ x+y=10;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{x^2+6y^2}=2+x,\\ 3x+4y=23.\end{cases}$

Б

80. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3}, \\ xy = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = 25; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12, \\ xy = 64; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3, \\ x - y = 63. \end{cases}$

В

81. 1) $\begin{cases} x + y = 130, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1,5\sqrt[6]{xy}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \dfrac{a}{b}, \\ xy = (a^2 - b^2)^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt[3]{x - y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x + y)^3(x - y)^2} = 8 \quad (x > y). \end{cases}$

82. 1) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 0, \\ x^2y + y^2x = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 8a^2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0,5\sqrt{xy}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

83. 1) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} = 3, \\ \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x} = 5, \\ \sqrt{z + x} + \sqrt{x + y} = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ x + y = 17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$

84. 1) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy} + \sqrt{xy - y^2} = 3(x - y), \\ x^2 - y^2 = 41; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12, \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x - 4} + \sqrt{y} + \sqrt{z + 4} = 6, \\ 2\sqrt{x - 4} - \sqrt{y} - 4\sqrt{z + 4} = -12, \\ x + y + z = 14. \end{cases}$

Виконати дії:

А

85. 1) $a^2a^6a^8$; 2) $x^nx^{2n}x^{4n}$; 3) $b^{13} : b^{10}$;
4) $c^{6n} : c^{5n}$; 5) $a^n : a^{n-2}$; 6) $b^{n+1} : b^{n-1}$.

86. 1) $(2x^3y^3z)^4$; 2) $(-3a^2b^4c^5)^3$; 3) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{a}{2b}\right)^4$.

87. 1) $(a^4)^2$; 2) $\left(-\frac{4xy^2}{5z^3}\right)^3$; 3) $(a^{n-1})^4$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2n-1}$

88. 1) $(3a^3b^4)^0$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$; 3) $\frac{3^{-1}ab^{-2}}{2^{-2}x}$; 4) $2^{10} : 2^{15}$.

89. 1) $a^{-m} : a^0$; 2) $(10^4)^{-3}$; 3) $(2a^2b^{-3})^4$; 4) $2x^{-4} : x^{-7}$.

Б

90. 1) $(a^{12}a^3 : a^4a^7)^3$; 2) $(-5ab^2c^3)^4$; 3) $(p^{2n-1})^m$;
4) $\frac{(64m^2n^4)^5}{(16mn^3)^5}$; 5) $7^{-3} \cdot (343 + 0,723^0)^3$;
6) $3a^7a^{-5} + 2,51^0a^{-7}a^5$.

91. Спростити вирази: 1) $\left(\frac{2}{3}a^{-2}(b^3)^{-3}\right)^4$;
2) $3x^{n-1} \cdot 5x^{n+1}$; 3) $\frac{6a^5x^{-7}y^{-8}}{4^{-1}a^{-3}b^{-4}}$;
4) $(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2})$.

92. Піднести до квадрата $\left(2a^{3x} + \frac{x}{4a^{2x-1}}\right)^2$.

В

93. Виконати дії:
1) $\left(\left(-\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{ac^4}{b^2d^3}\right)^2\right) : \left(\left(\frac{a^2b^2}{cd^3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{c^2}{b^3d}\right)^3\right)$;
2) $\left(\frac{a+b}{c-x}\right)^m \cdot \left(\frac{c+x}{a+b}\right)^m \cdot \left(\frac{c-x}{a-b}\right)^m$.

94. Обчислити значення виразу $25x^2(y^2 - z^2)$, якщо $x \approx 2,24$; $y \approx 27,3$; $z \approx 12,8$, за допомогою мікрокалькулятора.

95. Записати дріб $\frac{2b^2 + a}{a^2b^4}$ за допомогою степеня з від'ємним показником.

А

96. Подати вираз у вигляді степеня з раціональним показником: 1) $x^3x^{0,2}x^{0,8}$; 2) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}}$; 3) $b^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{3}{4}}$;

4) $(a^{-\frac{2}{5}})^{10}$; 5) $(c^{\frac{5}{3}})^{1\frac{1}{5}}$; 6) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$.

97. Спростити вирази: 1) $(x^{\frac{2}{3}})^{0,5} : x^{-\frac{2}{5}}$;

2) $p^{-1}q^{\frac{5}{4}}p^{-\frac{2}{7}}q^{\frac{1}{14}}$; 3) $(b^{-6})^{-\frac{1}{3}}$.

98. Обчислити: 1) $3^3 \cdot 3^{-\frac{3}{8}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$; 2) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{1}{3}}$.

99. Виконати дії: 1) $a^{-\frac{7}{15}} : a^{\frac{11}{20}}$; 2) $\frac{2a^{-\frac{7}{8}}}{a^{1,25}b^{-\frac{2}{3}}}$.

Б

100. Спростити вирази: 1) $(a^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}} \cdot (a^{-\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}}$;

2) $(a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{2}{3}})a^{0,7} \cdot x^{0,8}$.

101. Обчислити: 1) $9^{-\frac{4}{3}} \cdot 27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$; 2) $64^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{6}{3}}$;

3) $\left(\frac{1}{27} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 4) $((\sqrt[3]{a})^{\sqrt{3}})^{-2\sqrt{3}}$.

102. Подати у вигляді куба: y^9; y^{-33}; y^5; y; $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{-1,5}$; $y^{-\frac{1}{4}}$; $y^{0,1}$; $y^{-\frac{5}{6}}$.

103. Скоротити дроби: 1) $\frac{2 - 2^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 3}{x - 9}$;

3) $\frac{a}{a - a^{\frac{1}{2}}}$; 4) $\frac{(ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}$.

104. Подати вирази у вигляді суми: 1) $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})$; 2) $(2 - y^{1,5})(2 + y^{1,5})$.

105. Спростити вирази: 1) $(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}) : (b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}})$;

2) $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)$.

106. Користуючись тотожністю $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, розкласти на множники вирази: 1) $a^2 - 3$; 2) $b^{\frac{2}{3}} - 25$; 3) $(x^{\frac{1}{3}})^2 - 4$; 4) $a - b^{\frac{1}{2}}$, де $a \geqslant 0$.

В

107. Спростити вирази: 1) $\left(\frac{4}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{3}{4}}}{8}\right)^{\frac{1}{6}}$;

2) $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})\cdot(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})\cdot(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$.

108. Довести, що при будь-якому $a>0$ справджується рівність: 1) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}}=1$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{a^5\sqrt{a}}}=1$.

109. Подати у вигляді суми: 1) $((x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}))^2$; 2) $((x^{-\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}}))^2$.

110. Розкласти на множники: 1) $a+a^{\frac{1}{2}}$; 2) $125-b$, де $b\geqslant 0$; 3) $18^{\frac{2}{3}}-6^{\frac{4}{3}}$; 4) $(2a)^{\frac{1}{2}}-(5a)^{\frac{1}{2}}$.

111. Знайти значення виразу: 1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-9a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{6}}}$, якщо $a=64$; 2) $\dfrac{8}{y^{\frac{1}{4}}-2}+\dfrac{y-8y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{2}}-4}$, якщо $y=25$.

112. Обчислити: $0,027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0,75}-3^{-1}+5,5^0$.

113. Спростити вирази, виконавши дії:

1) $\dfrac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$;

2) $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$;

3) $\left(\left(\dfrac{2^{\frac{3}{2}}+27^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2-2}\right)\cdot 3^{-2}\right)^5$;

4) $\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$;

5) $\dfrac{\left(\sqrt[6]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{(\sqrt[4]{a\sqrt{b}})^6}$;

6) $\dfrac{1+2a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{2}}}{1-a+4a^{\frac{3}{4}}-4a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-2}{(a^{\frac{1}{4}}-1)^2}$.

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ

§ 1. Поняття показникової функції

Означення і графік показникової функції. Ви вже знаєте, що коли a — додатне, то для будь-якого числа x степінь a^x має цілком певне додатне значення. Тому a^x є функцією змінної x, яка визначена на всій числовій осі.

Функція $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається показниковою (з основою a).

Так, функції $y = 3^x$, $y = 0,72^x$, $y = \left(\frac{3}{13}\right)^x$ – показникові. З'ясуємо суть обмежень $a > 0$ і $a \neq 1$. 1) Вимога $a > 0$. Якщо $a = 0$ і $x \leqslant 0$, то вираз a^x не має смислу. Наприклад, вирази 0^{-1}, $0^{-\frac{1}{8}}$, 0^0 позбавлені смислу.

Якщо $a < 0$ і x — нескоротний дріб, знаменник якого парний, то вираз a^x не має смислу. Наприклад, степінь $(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8}$ не може бути виражений дійсним числом.

2) Вимога $a \neq 1$. Якщо $a = 1$, то кожне значення 1^x дорівнює 1, тобто функція зводиться до сталої.

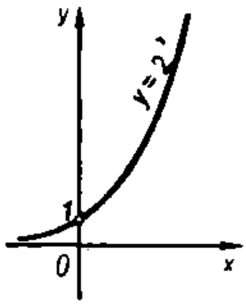
Цей випадок нічого нового не додає до означення показникової функції, а тому його виключають.

Почнемо вивчення показникових функцій з функції $y = 2^x$. Складемо таблицю деяких значень аргументу і відповідних їм значень цієї функції (табл. 5)

Побудуємо на координатній площині точки за координатами, взятими з цієї таблиці, і сполучимо ці точки плавною лінією (мал. 85). Дістанемо графік функції.

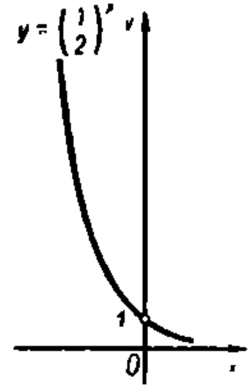
Розглянемо тепер функцію 3^x. Складемо аналогічну таблицю (табл. 6).

Побудуємо в тій самій системі координат точки за координатами, взятими з таблиць 5 і 6, і сполучимо їх плавною лінією (мал. 86). З малюнка видно, що обидві функції зростають, але функція $y = 3^x$ зростає швидше (її графік зростає «крутіше»).



Мал. 85

Мал. 86



Мал. 87

Розглянемо функцію $\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Складемо таблицю (табл. 7) і побудуємо графік (мал. 87).

Таблиця 5

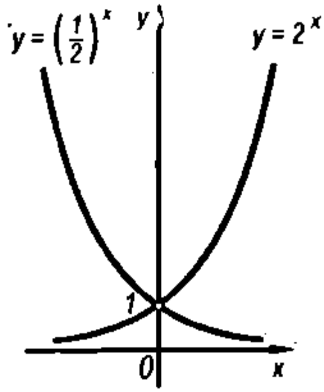
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Таблиця 6

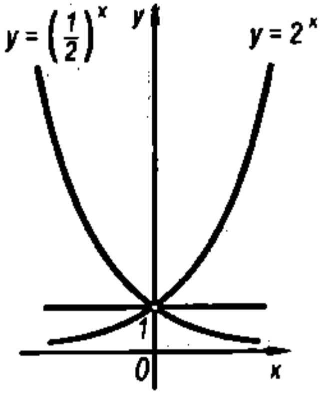
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Таблиця 7

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



Мал. 88



Мал. 89

Що є спільного у графіків функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

1) Областю визначення обох функцій є множина дійсних чисел.

2) Обидві функції додатні при будь-якому значенні аргументу (графіки розміщені у верхній півплощині).

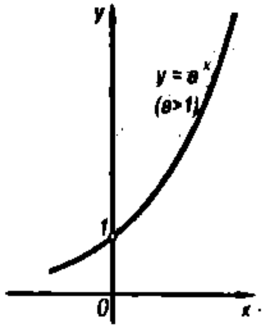
3) Якщо $x = 0$, обидві функції набувають значення, що дорівнює 1.

Ці три властивості спільні для будь-яких показникових функцій $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

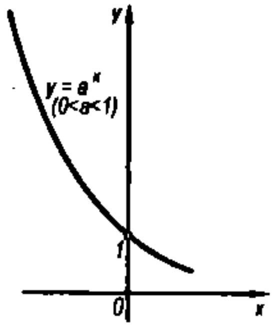
Побудуємо тепер графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ в одній і тій самій системі координат (мал. 88) і порівняємо їх властивості. З малюнка видно, що ці графіки розміщені симетрично відносно осі ординат. Функція $y = 2^x$ — зростаюча, а функція $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — спадна.

Проведемо через точку перетину графіків функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ пряму, паралельну осі абсцис (мал. 89) і порівняємо частини кривих, що лежать під цією прямою і над нею. Які частини кривих відповідають значенням функцій, меншим за 1? більшим за 1? Якщо $x < 0$ (ліва півплощина), функція $y = 2^x$ набуває значень, менших за 1, а якщо $x > 0$ (права півплощина) — значень, більших за 1.

Функція $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, якщо $x < 0$, набуває значень, більших за 1, а якщо $x > 0$ — менших за 1.



Мал. 90



Мал. 91

Для більшої наочності подамо властивості функції $y = a^x$, якщо $a > 0$ і $0 < a < 1$, у вигляді таблиці (табл. 8) та малюнків (мал. 90, 91).

Таблиця 8

$y = a^x$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
1. Зростає 2. Якщо $x < 0$, набуває значень, менших за 1 3. Якщо $x > 0$, набуває значень, більших за 1	1. Спадає 2. Якщо $x < 0$, набуває значень, більших за 1 3. Якщо $x > 0$, набуває значень, менших за 1

Для подальшого вивчення властивостей показникової функції важливо знати такі властивості степеня (які ми подаємо тут без доведення):

а) При піднесенні неправильного дробу до степеня з додатним показником дістаємо результат, більший за 1, а при піднесенні неправильного дробу до степеня з від'ємним показником — результат, менший за 1, наприклад:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27} = 4\frac{17}{27}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1,50} \approx 1,15;$$

$$\left(\frac{9}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{9}{7}\right)^2} = \frac{1}{\frac{81}{49}} = \frac{49}{81};$$

$$\left(\frac{10}{7}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{10}{7}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{1,43}} \approx \frac{1}{1,13} \approx 0,885.$$

б) При піднесенні правильного дробу до степеня з додатним показником дістаємо результат, менший за 1, а при піднесенні правильного дробу до степеня з від'ємним показником — результат, більший за 1, наприклад:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}; \quad \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,70} \approx 0,84;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{25}} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9};$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,6^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,36}} \approx \frac{1}{0,71} \approx 1,4.$$

Властивості функції $y = a^x$, якщо $a > 1$ і $0 < a < 1$ істотно відрізняються між собою. Тому ми спочатку розглянемо загальні властивості показникової функції, а потім окремо її властивості, якщо $a > 1$ і якщо $0 < a < 1$.

Загальні властивості показникової функції.

1. **Областю визначення** показникової функції $y = a^x$ є множина всіх дійсних чисел. Справді, якщо $a > 0$, $a \neq 1$ вираз a^x визначений для будь-якого x, $-\infty < x < +\infty$

2. Показникова функція $y = a^x$ додатна при будь-якому значенні аргументу, тобто $a^x > 0$.

Неважко переконатися в тому, що показникова функція не може ні дорівнювати нулю, ні бути від'ємною тобто областю її значень є множина всіх додатних чисел $(0; +\infty)$. Справді, a^x може дорівнювати нулю лише тоді коли $a = 0$, але ми умовилися, що $a \neq 0$. Функція a^x може бути від'ємною лише коли $a < 0$ (і то не для всіх значень x), але ми умовилися розглядати показникову функцію лише коли $a > 0$. А при піднесенні додатного числа a до степеня x з будь-яким дійсним показником завжди матимемо додатне число.

Щоб переконатися в цьому, розглянемо всі можливі випадки:

а) Нехай $x = n$, де n — натуральне число Тоді $a^x = a^n = aa\ldots a > 0$ як добуток додатних чисел б) Якщо x є дробове додатне число, тобто $x = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Але $a^m > 0$ (умова існування кореня n-го степеня).

в) Нехай x — додатне ірраціональне число. Позначимо α_1 і α_2 — наближені раціональні (додатні) значення з недостачею і з надлишком. Тоді значення a^x міститься між двома додатними числами a^{α_1} і a^{α_2} і є додатним числом.

г) Нарешті, якщо x — деяке від'ємне число, наприклад, $x = -p$, то $a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. Але раніше було показано, що для будь-яких додатних p $a^p > 0$ і, отже, $\frac{1}{a^p} > 0$. Звідси випливає, що сформульована властивість справедлива для будь-якого x.

Отже, графік показникової функції завжди лежить над віссю абсцис (ординати всіх точок графіка додатні) і не перетинає її ($y \neq 0$).

3. Якщо $x = 0$, показникова функція $a^x = 1$.

Це випливає з того, що будь-яке число, крім нуля, в нульовому степені дорівнює одиниці, а ми умовились розглядати показникову функцію, якщо $a \neq 0$.

З цієї властивості робимо висновок, що графік функції $y = a^x$ завжди проходить через точку з координатами $x = 0$; $y = 1$, тобто перетинає вісь ординат на відстані 1 від початку координат.

Розглянемо властивості показникової функції $y = a^x$ якщо $a > 1$ і $0 < a < 1$

Крім розглянутих трьох загальних властивостей показникової функції доведемо її властивості для випадків, коли основа більша і відповідно менша від одиниці.

Нехай $a > 1$ (мал. 90).

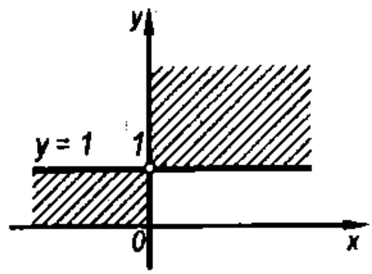
Якщо $a > 1$, функція a^x при зростанні x монотонно зростає. Самостійно доведіть, що коли $a > 1$, то для будь-якого $x_2 > x_1$ справджується нерівність $a^{x_2} > a^{x_1}$, тобто $a^{x_2 - x_1} > 0$.

Якщо $a > 1$, то при необмеженому зростанні показника x функція $y = a^x$ необмежено зростає, а при необмеженому спаданні показника x функція набуває значень як завгодно близьких до нуля.

Якщо $a > 1$, то показникова функція $y = a^x$ більша від 1 для всіх додатних значень x і менша від 1 для всіх від'ємних значень x, тобто $a^x > 1$ для $x > 0$ і $a^x < 1$ для $x < 0$.

Розглянемо можливі випадки для значень x.

а) Нехай $x = n$ — натуральне число. Тоді $a^n > 1$, бо добуток чисел, більших від 1, є число, також більше від 1.



Мал. 92

б) Якщо $x = \frac{m}{n}$ де m і n — взаємно прості натуральні числа, то

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} > 1,$$

бо корінь будь-якого степеня з числа, більшого за 1 ($a^m > 1$), є також число, більше за 1.

в) Якщо x — додатне ірраціональне число і α_1 — наближене раціональне значення x з недостачею, то $a^{\alpha_1} > 1$; тому і $a^x > 1$.

г) Якщо x — будь-яке від'ємне число, наприклад, $x = -p$, то $a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, але за попереднім $a^p > 1$.

Отже, $\frac{1}{a^p} < 1$, тобто $a^x < 1$.

Таким чином, ми довели, що коли $a > 1$, функція $a^x < 1$, якщо $x < 0$ і $a^x > 1$, якщо $x > 0$. Ця властивість дає змогу встановити, в яких частинах координатної площини буде розміщений графік функції $y = a^x$, якщо $a > 1$ (на мал. 92 ці частини заштриховано).

Нехай $0 < a < 1$ (мал. 91).

1. Якщо $0 < a < 1$, функція a^x при зростанні x монотонно спадає.

2. Якщо $0 < a < 1$, функція $y = a^x$ при необмеженому зростанні показника x набуває значень як завгодно

близьких до нуля, а при необмеженому спаданні показника x функція необмежено зростає.

3. Якщо $0 < a < 1$, то показникова функція a^x більша за 1 для всіх від'ємних значень x і менша за 1 для всіх додатних значень x, тобто $a^x > 1$ для $x < 0$ і $a^x < 1$ для $x > 0$. Справедливість цих тверджень випливає з того, що значення показникової функції з основою, меншою від 1, обернені до відповідних значень показникової функції з основою, більшою від 1:

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}.$$

Якщо $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$.

Зауваження. Для застосувань показникової функції дуже важливими є такі її властивості (подамо їх без доведення).

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$, тобто якщо степені однієї й тієї самої додатної, відмінної від одиниці основи рівні, то рівні й показники степенів.

Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то яке б не було додатне число N, існує, і до того ж єдине, таке значення x, що $a^x = N$.

Іншими словами, за цих умов має розв'язок і до того ж тільки один рівняння $a^x = N$.

Властивості графіка показникової функції. Графік показникової функції називається е к с п о н е н т о ю.

Складемо таблицю значень показникової функції для деяких значень x ($x = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$) і побудуємо відповідний графік (див. мал. 85).

Він має такі властивості.

1) Графік розміщений у верхній півплощині, тобто там, де ординати додатні.

2) Будь-яка пряма, паралельна осі Oy, перетинає графік і до того ж тільки в одній точці.

3) Крива проходить через точку $(0; 1)$, тобто коли $x = 0$, функція чисельно дорівнює 1.

4) З двох точок графіка вище розміщена та, яка лежить правіше, тобто в міру просування зліва направо графік піднімається вгору.

5) На графіку є точки, які лежать вище будь-якої прямої, паралельної осі Ox. На графіку є точки, що лежать нижче будь-якої прямої, проведеної у верхній півплощині паралельно осі Ox.

Лівою своєю частиною графік, якщо рухатися за ним справа наліво, все ближче підходить до осі Ox, але не дотикається до неї.

6) Будь-яка пряма, що паралельна осі Ox і лежить у верхній півплощині, перетинає графік, і причому в одній точці.

Ми розглянули властивості графіка показникової функції $y = a^x$, якщо $a > 1$ на прикладі функції $y = 2^x$.

Самостійно проведіть аналогічні міркування для функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Які з розглянутих вище властивостей функції $y = a^x$, коли $a > 1$ і $0 < a < 1$, можна проілюструвати за допомогою цих графіків?

Приклади застосування властивостей показникової функції.

1. Що можна сказати про числа m і n, якщо $5^m < 5^n$?

Міркуємо так: оскільки основа степеня більша за 1, то показникова функція $y = 5^x$ із зростанням аргументу зростає. Отже, дана нерівність справджується при $m < n$.

2. Що можна сказати про числа p і q, якщо $(0,3)^p < (0,3)^q$?

Тут основа степеня менша за 1, а тому із зростанням аргументу показникова функція $0,3^x$ спадає. Нерівність $(0,3)^p < (0,3)^q$ справджується, коли $p > q$.

3. Що можна сказати про додатну основу a, якщо $a^7 > a^{10}$?

З даної нерівності випливає, що значення степеневої функції a^x із зростанням аргументу спадають. Це можливо, якщо $a < 1$.

4. Який висновок можна зробити відносно додатної основи a, якщо $a^{-7} > a^{-3}$?

Тут функція $y = a^x$ із зростанням аргументу спадає, отже, $a < 1$.

5. Який висновок можна зробити про додатну основу a, якщо $a^{-3} < a^{-1,5}$?

Через те, що із збільшенням показника степінь збільшується, основа степеня $a > 1$.

6. Що можна сказати про число m, якщо $5^m < 4$?

Тут основа $a > 1$. Отже, функція $y = 5x^x$ є монотонно зростаючою, причому $5^m < 4 < 5$, $m < 1$.

7. На основі властивостей показникової функції замінити знак $\vee$ в кожному з наступних випадків знаком $>, <, =$.

а) $2,17^{-0,875} \vee 1$. Функція $y = 2,17^{-0,875}$ при від'ємних значеннях аргументу ($x = -0,875$) набуває значень, менших за 1. Отже, $2,17^{-0,875} < 1$.

б) $\left(\frac{16}{15}\right)^{0,123} \vee 1$. Функція $y = \left(\frac{16}{15}\right)^{0,123}$ зростає і якщо $x > 0$, то $\left(\frac{16}{15}\right)^{x} > 1$, тому $\left(\frac{16}{15}\right)^{0,123} > 1$.

в) $0,017^{-0,23} \vee 1$. Функція $y = 0,017^x$ для $x < 0$ набуває значень, більших за 1. Отже, $0,017^{-0,23} > 1$.

г) $0,91^{0,43} \vee 3,6^{5,34}$; $0,91^{0,43} < 1$, а $3,6^{5,34} > 1$, тому $0,91^{0,43} < 3,6^{5,34}$.

8. Вказати, які з показникових функцій

$$y = 3^x;\ y = (\sqrt[3]{10})^x;\ y = \left(\frac{5}{7}\right)^x;\ y = \left(\frac{7}{5}\right)^x;\ y = 0,018^x$$

зростають. Тут слід взяти до уваги, що функція $y = a^x$ зростає, якщо $a > 1$.

9. Які з функцій $y = (\sqrt{3})^x$; $y = \left(\frac{9}{5}\right)^x$; $y = \left(\frac{3}{19}\right)^x$; $y = 0,24^x$ спадають?

Беручи до уваги властивості функції $y = a^x$ для $a < 0$, доходимо висновку, що це функції $y = \left(\frac{3}{19}\right)^x$ і $y = 0,24^x$.

10. Дано кілька зростаючих функцій: $y = 2^x$; $y = 1,4^x$; $y = 4,1^x$; $y = 7^{\frac{1}{2}x}$; $y = 5^x$; $y = 1,11^x$. Записати їх у порядку зменшення швидкості зростання для $x > 0$.

Маємо: $y = 5^x$; $y = 4,1^x$; $y = 7^{\frac{1}{2}x}$; $y = 2^x$; $y = 1,4^x$; $y = 1,11^x$.

Використання показникової функції під час вивчення явищ навколишнього середовища. Багато процесів у природі і техніці математично виражаються за допомогою показникової функції.

Задача про радіоактивний розпад. Нехай T — інтервал часу, протягом якого кількість даної радіоактивної речовини зменшиться вдвоє внаслідок розпаду. T називається періодом напіврозпаду речовини (для різних речовин T має різні значення). Наприклад, $T = 4,56$ млрд років для урану-238; $T = 1590$ років для радію-226; $T = 3,81$ дні для радону-222.

Позначимо відношення будь-якого інтервалу часу t до періоду напіврозпаду даної речовини через x: $x = \frac{t}{T}$ (t і T вимірюють в одних і тих самих одиницях). Тоді x є мірою кількості періодів, що минула за умови, що за одиницю часу береться період напіврозпаду. Відношення маси m даної речовини після проходження цього часу до початкової маси M позначимо через y: $y = \frac{m}{M}$.

Можна стверджувати, що y є частиною речовини, яка залишається внаслідок розпаду після x періодів напіврозпаду.

Встановлено, що y є показниковою функцією від x такого вигляду:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Коли в цій формулі x змінюється в арифметичній прогресії ($x = 2, 3, 4, 5, \ldots$), то y зменшується в геометричній прогресії $\left(y = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots\right)$.

Більш загальною формулою, яка характеризує радіоактивний розпад, є $m = m_0 a^{kt}$, де m — маса речовини, яка розпалася; m_0 — маса речовини в початковий момент; t — час; a і k — деякі сталі.

Задача про зміну атмосферного тиску. Атмосферний тиск змінюється залежно від висоти h над рівнем моря за законом $p = p_0 a^h$, де p_0 — атмосферний тиск на рівні моря; a — деяка стала.

Задача (про розмноження бактерій). Розмноження бактерій у певному середовищі відбувається так, що їх кількість N змінюється в часі за законом $N = N_0 a^{kt}$, де N_0 — початкова кількість бактерій при $t = 0$; a і k — деякі сталі.

Задача про вакуумування. Під час вакуумування кінцевий тиск пов'язаний з початковим тиском співвідношенням

$$p_2 = \left(\frac{R}{R+Q}\right)^{\frac{nt}{3}} p_1,$$

де p_2 — кінцевий тиск, мм рт. ст.; p_1 — початковий тиск, мм рт. ст.; R — об'єм, що підлягає відкачуванню, см^3; Q — об'єм газу, що відкачується насосом за один оберт, см^3; n — кількість обертів насоса, об/хв; t — час вакуумування, хв.

Задача про приріст деревини. Дерево росте так, що кількість деревини збільшується з часом за законом $M = M_0 a^{kt}$, де M — кількість деревини у даний момент, м^3; M_0 — початкова кількість деревини; t — час (у роках), який відраховують з моменту, коли об'єм деревини був M_0; k — деяка стала.

Обчислимо, наприклад, за скільки років об'єм деревини збільшиться в a разів.

Розв'язання. Якщо в деякий момент часу t $\frac{M}{M_0} = a$, то поділивши обидві частини рівняння $M = M_0 a^{kt}$ на M_0, дістанемо $\frac{M}{M_0} = a^{kt}$, тобто $a^{kt} = a = a^1$. Тоді $kt = 1$ і $t = \frac{1}{k}$.

Отже, об'єм деревини збільшиться в a разів за $\frac{1}{k}$ років.

У практичному застосуванні показникові функції зустрічаються здебільшого у вигляді $y = Ca^{kx}$. Покажемо, що функцію виду $y = a^{kx+b}$ можна перетворити до виду $y = Ca^{kx}$.

Справді $a^{kx+b} = a^{kx} \cdot a^b$. Позначаючи $a^b = C$, дістанемо: $a^{kx}a^b = Ca^{kx}$.

Приклади.

1. Функцію $y = 3^{5x+3}$ можна подати у вигляді $y = 3^{5x} \cdot 3^3$, або $27 \cdot 3^{5x}$;

2. Функцію $y = 25^{4x+\frac{1}{2}}$ можна подати у вигляді $y = 25^{4x} \cdot 25^{\frac{1}{2}}$, або $y = 5 \cdot 25^{4x}$.

Розглянемо деякі вправи з використанням функції $y = Ca^{kx}$

1) В якій точці перетинає вісь ординат графік функції $y = Ca^{kx}$?

Відповідь. $(0; C)$.

2) Яке значення коефіцієнта C функції $y = Ca^{kx}$ якщо її графік перетинає вісь ординат у точці $(0; -3)$?

Відповідь. $C = -3$.

3) Яких значень (від'ємних чи додатних) набувають функції: а) $y = -5a^{kx}$; б) $y = 0,7a^{kx}$?

Відповідь: а) від'ємних; б) додатних.

4) При яких значеннях C графік функції $y = Ca^{kx}$ розміститься над віссю абсцис?

Відповідь. Якщо $C > 0$.

5) При яких значеннях C графік функції $y = Ca^{kx}$ розміститься під віссю абсцис?

Відповідь. Коли $C < 0$.

6) Чи пройдуть через одну точку графіки функцій $y_1 = Ca^{k_1x}$, $y_2 = Ca^{k_2x}$, $y_3 = Ca^{k_3x}$?

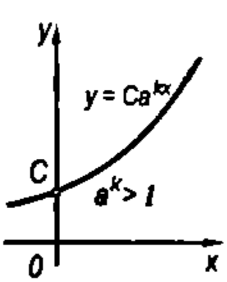
Відповідь. Так, всі вони пройдуть через точку $(0; C)$.

Розглянемо ще деякі властивості функції $y = Ca^{kx}$.

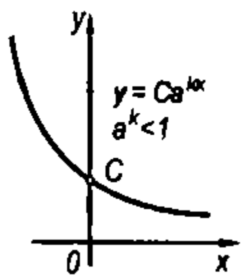
Нехай $y = Ca^{kx}$, де $C > 0$. Якщо $a^k > 1$, то графік має вигляд, зображений на малюнку 93. Це можливо у двох випадках:

1) $a > 1$, $k > 0$; 2) $0 < a < 1$, $k < 0$.

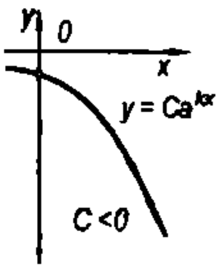
Розглянемо функцію $y = Ca^{kx}$ $(C > 0)$, графік якої зображено на малюнку 94. Це можливо, коли $a^k < 1$, тобто у двох випадках: або $0 < a < 1$, $k > 0$, або $a > 1$, $k < 0$.



Мал. 93



Мал. 94



Мал. 95

Якщо $C < 0$, графік функції $y = Ca^{kx}$ має вигляд, зображений на малюнку 95.

Основні показникові тотожності.

Для будь-яких дійсних значень x і y справедливі рівності:

$$a^x a^y = a^{x+y};\ \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(ab)^x = a^x b^x;\ \ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Ці формули називають основними властивостями степенів. Вони означають, що для функції a^x, яка визначена на всій числовій прямій, залишаються правильними властивості функції a^x, яка спочатку була визначена лише для раціональних x.

Нагадаємо, що раціональні числа разом з ірраціональними утворюють множину дійсних чисел (числову пряму).

§ 2. Розв'язування показникових рівнянь і нерівностей

Показникові рівняння. *Показниковими називають рівняння, в яких невідоме входить лише до показників степенів при сталих основах.*

Найпростішим показниковим рівнянням є

$$a^x = b,\ a > 0,\quad b > 0,\ a \neq 1. \tag{1}$$

Якщо замість x у показнику степеня стоїть деяка функція $f(x)$, то

$$a^{f(x)} = b,\ a > 0,\quad b > 0,\ a \neq 1. \tag{2}$$

Загального методу розв'язування показникових рівнянь немає. Можна виділити кілька типів показникових рівнянь і навести способи їх розв'язування.

Деякі показникові рівняння можна звести до виду (1) або (2) за допомогою основних показникових тотожностей.

Найпоширенішим є спосіб зведення обох частин показникового рівняння до спільної основи. Розглянемо приклади розв'язування рівнянь.

Приклади.

1. $5^x = 5^3$. Тут $x = 3$, бо з рівності степенів при рівних основах випливає рівність їх показників.

2. $4^x = \frac{1}{16}$. Подамо праву частину рівняння як степінь 4; $4^x = 4^{-2}$. Звідси $x = -2$.

3. $17^x = 1$, $17^x = 17^0$. Звідси $x = 0$.

4. $5^x = 5\sqrt[3]{25}$; $5^x = 5 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$; $5^x = 5^{1\frac{2}{3}}$.
Звідси $x = 1\frac{2}{3}$.

5. $3^x = \frac{9}{\sqrt[3]{9}}$; $3^x = \frac{9}{9^{\frac{1}{3}}}$; $3^x = 9^{1-\frac{1}{3}}$; $3^x = 9^{\frac{2}{3}}$; $3^x = 3^{2\cdot\frac{2}{3}}$; $3^x = 3^{\frac{4}{3}}$; $x = \frac{4}{3}$.

6. $(0,1)^x = 1000$; $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^3$; $(10^{-1})^x = 10^3$; $-x = = 3$; $x = -3$.

Спосіб зведення до спільної основи застосовується і під час розв'язування рівнянь виду $a^{f(x)} = b$.

7. $3^{x^2-x-2} = 81$. Подамо праву частину рівняння як степінь 3: $3^{x^2-x-2} = 3^4$. Порівняємо показники степенів у лівій і правій частинах: $x^2 - x - 2 = 4$, $x^2 - x - 6 = 0$. Звідси $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Перевірка. $x_1 = -2$, то ліва частина $3^{4+2-2} = 3^4$, а права $81 = 3^4$. Якщо $x_2 = 3$, то $3^{9-3-2} = 3^4$.

Отже, $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

8. $3^{x^2-5x+6} = 1$.

$3^{x^2-5x+6} = 3^0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

9. $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{1}{\sqrt{7}}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Звідси $2x^2 + x - 0,5 = \frac{1}{2}$; $2x^2 + x - 1 = 0$; $x_{1,2} = = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$; $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Обидва значення x є коренями даного рівняння.

Для розв'язування окремих видів рівнянь застосовуються спеціальні способи. Таким є, наприклад, спосіб, який називають зведенням до спільного показника.

10. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

Зведемо добуток у лівій частині рівняння до спільного показника x.

Маємо: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3$.

Звідси $x = 3$.

11. $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$. Перепишемо це рівняння у вигляді $3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$; $\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}} = \frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}}$; $3^{2x+4-3x} = 2^{x+8-2x+4}$; $3^{4-x} = 2^{4-x}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = 1$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^0$; $4 - x = 0$; $x = 4$.

В окремих випадках дане показникове рівняння перетворюють відомими методами: заміни, зведення до квадратного рівняння, а потім вже використовують відомий спосіб.

12. $3^{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}-3\frac{1}{3}} = 1$; $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - 3\frac{1}{3} = 0$.

Зробимо заміну $\frac{x+1}{x-1} = y$, тоді $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{y}$.

Маємо: $y + \frac{1}{y} - \frac{10}{3} = 0$; $3y^2 + 3 - 10y = 0$; $3y^2 - 10y + 3 = 0$; $y_1 = \frac{1}{3}$; $y_2 = 3$; $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{3}$; $x_1 = -2$; $\frac{x+1}{x-1} = 3$; $x_2 = 2$.

13. $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 6$.

Маємо суму двох показникових функцій. Знайдемо їх добуток. Маємо:

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \left(\sqrt{3^2-(\sqrt{8})^2}\right)^x = 1.$$

Зробимо заміну $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = t$; тоді $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Маємо: $t + \frac{1}{t} = 6$, звідси $t^2 - 6t + 1 = 0$, $t = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Отже, $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 + 2\sqrt{2}$, звідси $x = 2$;

$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 - 2\sqrt{2}$, звідси $x = -2$.

Розв'язування нерівностей, які містять показникову функцію. Найпростішими є показникові нерівності виду

$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$. Під час їх розв'язування використовують властивість монотонності показникової функції.

Функція $y = a^x$, якщо $a > 1$ — зростає, а якщо $0 < a < 1$ — спадає.

Для $a > 1$ більшому значенню функції відповідає більший показник. Отже, для $a > 1$ розв'язування даної нерівності зводиться до розв'язування нерівності $f(x) > \varphi(x)$. Якщо $0 < a < 1$, показникова функція спадає, тобто більшому значенню функції відповідає менший показник, і для $0 < a < 1$ розв'язування нерівності $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ зводиться до розв'язування нерівності $f(x) < \varphi(x)$.

Розглянемо приклади розв'язування нерівностей.

Приклади.

1. $3^{2-x} > 27$. Перепишемо дану нерівність у вигляді $3^{2-x} > 3^3$.

Оскільки тут $a = 3$ і $3 > 1$, то $2-x > 3$. Звідси $-x > 1$; $x < -1$.

2. $0,5^{5-2x} < 8$. Враховуючи, що $8 = 0,5^{-3}$, перепишемо дану нерівність у вигляді $0,5^{5-2x} < 0,5^{-3}$. Показникова функція спадає, бо $0,5 < 1$. Тому дана нерівність рівносильна нерівності $5 - 2x > -3$. Звідси $x < 4$.

3. $2^{5x+6} > 2^{x^2}$. Оскільки тут $a = 2$ $(2 > 1)$, то $5x + 6 > x^2$. Залишається розв'язати квадратну нерівність $x^2 - 5x - 6 < 0$. Маємо $(x+1)(x-6) < 0$. Звідси $-1 < x < 6$.

4. $\dfrac{5^{4x}}{10^{3x}} < 20^x \cdot \dfrac{1}{16^{x-1}}$. Зведемо дану нерівність до спільної основи:

$$\frac{5^{4x}}{2^{3x} \cdot 5^{3x}} < 5^x \cdot 4^x \cdot \frac{1}{2^{4(x-1)}}; \quad \frac{5^x}{2^{3x}} < \frac{5^x \cdot 2^{2x}}{2^{4(x-1)}};$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$$

Оскільки $a < 1$ $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$, то $3x > 2x - 4$, $x > -4$.

5. $5^{x^2+2x} > 5^3$. $a > 1$ $(5 > 1)$, тому показникова функція зростає, і дана нерівність рівносильна нерівності $x^2 + 2x > 3$. $x^2 + 2x - 3 > 0$. Розв'язком цієї нерівності, а значить і початкової, є об'єднання інтервалів $(-\infty; -3)$ і $(1; +\infty)$.

6. $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$. Введемо нову змінну $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

тоді $\left(\frac{1}{9}\right)^x = y^2$ і нерівність матиме вигляд $y^2 - \frac{28}{3}y + 3 <$

< 0; $3y^2 - 28y + 9 < 0$.

Розв'язком цієї квадратної нерівності є інтервал $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$, тобто $\frac{1}{3} < y < 9$.

Повертаючись до початкової змінної x, маємо:

$$\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9, \text{ або } \frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}.$$

Функція $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ спадає. Отже, розв'язком останньої нерівності будуть числа, які задовольняють нерівність $-2 <$ $< x < 1$.

7. $5 \cdot 3^{3x^2} > 3 \cdot 5^{3x^2}$. Поділимо почленно цю нерівність послідовно на добуток $5 \cdot 3$ і на 5^{3x^2-1}.
Дістанемо $3^{3x^2-1} > 5^{3x^2-1}$;

$$\frac{3^{3x^2-1}}{5^{3x^2-1}} > \frac{5^{3x^2-1}}{5^{3x^2-1}};$$

$$\frac{3^{3x^2-1}}{5^{3x^2-1}} > 1; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{3x^2-1} > \left(\frac{3}{5}\right)^0.$$

Основа $\frac{3}{5} < 1$. Отже, дана функція спадає і $3x^2 - 1 < 0$, $x^2 < \frac{1}{3}$; $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x < 5 \cdot 6^x$. Перетворимо нерівність до виду $3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x < 0$. Поділимо обидві частини останньої нерівності на $3^{2x} > 0$. Дістанемо

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x < 0.$$

Зробимо заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, тоді $3y^2 - 5y + 2 < 0$; $3y^2 -$ $-5y + 2 = 0$; $y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6}$; $y_1 = \frac{2}{3}$; $y_2 = 1$; $\frac{2}{3} < y < 1$; $\frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1$; $0 < x < 1$.

9. $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0,5} < 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$.

Зведемо цю нерівність до виду $5 \cdot 3^{2x-1} - 3^{2x-1} < 3^{2x} + 4 \cdot 3^{2x-2}$. Винесемо спільні множники за дужки:

$3^{2x-1}(5-1) < 3^{2x-2}(9+4)$; $4 \cdot 3^{2x-1} < 13 \cdot 3^{2x-2}$;

$\frac{3^{2x-1}}{3^{2x-2}} < \frac{13}{4}$; $3 < \frac{13}{4}$.

Отже, розв'язком є вся числова пряма.

10. $2^{\sqrt{1-x}} \geqslant x$. Зважимо на те, що вираз $2^{\sqrt{1-x}}$ має смисл, якщо $x \leqslant 1$. Тоді $2^{\sqrt{1-x}} > 2^0 = 1$, звідси можна зробити висновок, що $2^{\sqrt{1-x}} \geqslant x$, бо $x \leqslant 1$.

11. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2 - x$. Розв'яжемо дану нерівність графічно, побудувавши графіки функцій $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ і $y = 2 - x$ в одній системі координат. Графіки перетнуться в двох точках з абсцисами $x_1 = -2$ і $x_2 \approx 1,7$. Множиною розв'язків даної нерівності є два проміжки $(-\infty; -2)$ і $(1,7; +\infty)$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Дайте означення показникової функції $y = a^x$. Чому в її означенні сказано, що $a > 0$ і $a \neq 1$?

2. Назвати область визначення показникової функції a^x.

3. Які з функцій $y = x^{1,3}$; $y = 2,75^x$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = x^{-3}$; $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ є показниковими?

4. Які властивості має функція $y = a^x$, якщо $a > 1$? Для відповіді побудувати ескіз графіка цієї функції.

5. Які властивості має функція $y = a^x$, якщо $0 < a < 1$? Пояснити, користуючись ескізом відповідного графіка.

6. Яка особливість розміщення графіків функцій $y = 10^x$ і $y = 0,1^x$?

7. За яких умов $3^{x_1} > 3^{x_2}$ і $0,7^{x_1} > 0,7^{x_2}$?

8. Відомо, що $a^\alpha > a^\beta$. Що більше: α чи β, якщо $0 < a < 1$?

9. Відомо, що $a^\alpha < a^\beta$. Що більше: α чи β, якщо $a > 1$?

10. Чи правильною є нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ для $x_1 > x_2$?

11. Які з показникових функцій $y = \left(\frac{7}{11}\right)^x$; $y = 3^x$; $y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$; $y = 0,027^x$ зростають?

12. Які з функцій $y = 0,26^x$; $y = (\sqrt{3})^x$; $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$; $y = \left(\frac{4}{19}\right)^x$ спадають?

13. Порівняти показники k і m, якщо правильна нерівність

а) $\pi^k > \pi^m$; б) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^k < \left(\frac{\pi}{3}\right)^m$;

в) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^k > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^m$; г) $(\sqrt{7}-1)^k < (\sqrt{7}-1)^m$.

14. Чи можна, знаючи графік функції $y = a^x$, побудувати графік функції $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$? Як це зробити?

15. Порівняйте число a з одиницею в кожній з таких нерівностей:

а) $a^{1,27} > a^{0,419}$; б) $a^{\frac{5}{13}} > a^{\frac{2}{7}}$;

в) $a^{-0,83} > a^{0,14}$; г) $a^{-4,2} > a^{-2,5}$;

д) $a^{0,173} < a^{-\frac{11}{4}}$; е) $a^{-3} < a^{-3,01}$.

16. Що можна сказати про знак числа k, якщо:

а) $5^k = 10$; б) $7^k = 1,003$;

в) $0,3^k = 100$; г) $0,4^k = 18$?

17. Побудувати на одному малюнку графіки функцій $y = 2^x$, $y = 2^{x-1}$, $y = 2^{x+1}$. Чому графіки цих функцій не перетинаються? Які вони мають спільні властивості?

18. Якщо графіки функцій $y = a^x$ і $y = b^x$ симетричні відносно осі ординат, то яке співвідношення існує між a і b?

19. Чи мають спільну точку графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{5}{27}\right)^x$?

20. Як розміщені графіки функцій $y = a^x$ і $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ один відносно іншого?

21. В якій точці перетинається графік функції $y = 7,3^{-0,3x}$ з віссю ординат?

22. На прикладах $y = x^2$ і $y = 2^x$ пояснити, чим відрізняється показникова функція від степеневої?

23. Які процеси в галузі техніки та природознавства виражаються за допомогою показникової функції?

24. Довести: якщо показникова функція $y = a^x$ така що x змінюється в арифметичній прогресії, то відповідні значення y утворюють геометричну прогресію. Знайти її знаменник.

25. У якій точці перетинають графіки функцій: а) $y = 12^x$; б) $y = 0.07^x$; в) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ вісь ординат?

26. У якій точці графік функції $y = 3 \cdot 2^{7x}$ перетинається з віссю абсцис?

27. Побудувати ескізи графіків функцій: а) $y = 5 \cdot 3^{-0.2x}$, якщо $0 < a < 1$; б) $y = -3a^{4x}$, якщо $a > 1$.

28. Чи правильне твердження: «Якщо одне із значень функції $y = Ca^{kx}$ додатне, то функція набуває лише додатних значень, а якщо від'ємне, — то лише від'ємних»?

29. Яке рівняння називається показниковим? Навести приклади.

30. Чи має розв'язок показникове рівняння $a^x = y$ якщо $y < 0$?

31. У чому полягає спосіб зведення до спільної основи під час розв'язування показникових рівнянь?

32. У чому полягає спосіб винесення спільного множника за дужки під час розв'язування показникових рівнянь?

33. Як розв'язують показникові рівняння виду $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$?

34. Як розв'язати графічно рівняння: а) $2^x = x + 3$ б) $2^x = x^3$; в) $2^x = \frac{8}{x}$?

35. Записати в аналітичній формі показникову нерівність найпростішого виду.

36. Якою властивістю показникової функції $y = a^x$ користуються під час розв'язування показникових нерівностей? Розглянути випадки $a > 1$ і $0 < a < 1$.

ВПРАВИ

1. Розв'язати показникові рівняння:

А

Застосувати спосіб зведення до спільної основи:

1) $2^x = 64$; 2) $2^{2x} = 512$; 3) $2^{-x} = 16$;

4) $2^{x+1} = 32$; 5) $3^{2x-1} = 81$; 6) $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{25}$;

7) $3^{2x-1} = 1$; 8) $a^{x^2-7x+12} = 1$; 9) $a^{(x-1)(x+2)} = 1$.

Застосувати спосіб зведення до спільного показника:

10) $2^x \cdot 5^x = 0,01$; 11) $2^x \cdot 5^x = 0,1 \, (10^{x-1})^5$.

Розв'язати способом винесення спільного множника за дужки:

12) $2^{x+2} - 2^x = 96$; 13) $7^x - 7^{x-1} = 6$;

14) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$.

Розв'язати рівняння, зводячи їх до виду $a^{2x} + a^x + b = 0$:

15) $4^x + 2^x = 72$; 16) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$.

Б

17) $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[3]{a^{x-2}}$; 18) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$;

19) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; 20) $(0,25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$;

21) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$;

22) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;

23) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$; 24) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$;

25) $4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 40$;

26) $9^{\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$;

27) $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0,5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$;

28) $2^{3x-3} - 5 + 6 \cdot 2^{3-3x} = 0$;

В

29) $3^{2x-1} \cdot 5^{3x+2} = \frac{9}{5} \cdot 5^{2x} \cdot 3^{3x}$;

30) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$;

31) $2^{3(x-1)} - 128 \cdot 2^{3(2-x)} = 48$;

32) $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$;

33) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$;

34) $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62$;

35) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$;

36) $\sqrt[x+1]{a^3} \cdot \sqrt[x+1]{a^2} = \frac{1}{a^5}\sqrt[4]{(a^x)^{10}}$;

37) $2^{x-2} = 3^{x-2}$;

38) $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x-2}}{(a+b)^2}$;

39) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{15}}{6^{12-12x}}$;

40) $7^{2\sin x + \sqrt{3}} = 1$;

41) $(\sqrt{3})^{\sqrt{10x-5}+\sqrt{10x-29}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{-1}$;

42) $2^{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{2^{\sqrt{6}}} = 4^{\sqrt{x+1}}$;

43) $4^{2x} - 3^{2x-\frac{1}{2}} = 3^{2x+\frac{1}{2}} - 2^{4x-1}$;

44) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0$;

45) $2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$;

46) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$;

47) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

48) $5^{x^2-6x-35\frac{1}{3}} = 625\sqrt[3]{25}$;

49) $4^{4(x+1)} = \sqrt[5]{16^{x+100}}$;

50) $0,6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$.

2. Розв'язати показникові нерівності:

А

1) $2^x > \frac{1}{2}$;

2) $10^{3x+2} > 100$;

3) $(0,3)^x > 0,09$;

4) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2-x} < \left(\frac{5}{6}\right)^6$;

5) $0,5^{2x} < 1$;

6) $4^{5-2x} \leqslant 0,25$;

7) $\frac{1}{7^{3x}} < 49$;

8) $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$.

Б

9) $(\sqrt{3})^x \leqslant \dfrac{1}{9}$; 10) $0,7^{5-2x} < 0,49$;

11) $0,7^{8-x^2} > 0,7^{2x}$; 12) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$;

13) $16^{\frac{x+10}{x-10}} < 0,125$; 14) $3 \cdot 9^{x-2} > \left(\dfrac{1}{27}\right)^{3x-1}$;

15) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > \sqrt[4]{1,5}$; 16) $(\sqrt{13})^{x^2-2} > (\sqrt{14})^{x^2-2}$;

17) $2^{x^2-6x-2,5} < 16\sqrt{2}$; 18) $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 < 0$.

В

19) $8 \cdot 7^{2x^3-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} > 0$;

20) $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\dfrac{1}{16}\right)^{x+2}$; 21) $12^x \cdot 11^{\sqrt{x}} - 11^{\sqrt{x}} \cdot 12^{\sqrt{x}} < 0$;

22) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3,75}$; 23) $9^x + 6^x > 2^{2x+1}$;

24) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-3} < \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}$;

25) $4^x - 3^{x-0,5} > 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;

26) $9^x - \dfrac{28}{3^{2x-1}} + \dfrac{1}{3} > 0$;

27) $2^{x+6} + 2^{x+7} > 24$;

28) $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \geqslant 1$;

29) $25^{-x} + 5^{-x+1} \geqslant 50$;

30) $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \leqslant 7 \cdot 10^x$;

31) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0$;

32) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;

33) $5^{2x+1} > 5^x + 4$;

34) $4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$;

35) $0,2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$.

ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ

§ 1. Логарифм числа

Поняття логарифма. Розглянемо рівність $4^3 = 64$. У цій рівності число 3 є показником степеня, до якого слід піднести число 4, щоб дістати 64. Аналогічно в рівності $5^{-2} = \frac{1}{25}$ число (-2) є показником степеня, до якого треба піднести число 5, щоб дістати $\frac{1}{25}$. У загальному випадку в рівності $a^x = N$ число x є показником степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число N.

Розглянемо рівняння $a^x = N$, де a і N — деякі числа, причому $a > 0$ і $a \neq 1$. Якщо $N \leqslant 0$, то це рівняння не має коренів, бо значення показникової функції $y = a^x$ додатні при будь-якому x.

Для $N > 0$ рівняння має корінь, і до того ж єдиний. Справді, областю значень показникової функції $y = a^x$ при $a \neq 1$ є множина додатних чисел (отже, корінь рівняння існує). Крім того, кожне своє значення показникова функція набуває лише при одному значенні аргументу (отже, цей корінь єдиний).

Корінь рівняння $a^x = N$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають логарифмом числа N за основою a.

Логарифмом числа N за основою a ($a > 0$ і $a \neq 1$) називається показник степеня x, до якого треба піднести a, щоб дістати число N.

Слово «логарифм» заміняють символом log, праворуч від якого (трохи нижче) записують те число, яке називають основою.

Так, замість того щоб писати «логарифм числа 81 за основою 3» скорочено пишуть $\log_3 81$.

Те, що число x є логарифмом числа N за основою a, записують так: $\log_a N = x$.

Цю рівність читають так: логарифм числа N за основою a дорівнює x. Наприклад, з рівностей $5^3 = 125$; $6^{-2} = \frac{1}{36}$; $7^0 = 1$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$ випливає, що $\log_5 125 = 3$; $\log_6 \frac{1}{36} = -2$; $\log_7 1 = 0$; $\log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$.

Зазначимо, що вирази $\log_4(-64)$, $\log_3 0$ не мають смислу, бо рівняння $4^x = -64$, $3^x = 0$ не мають коренів.

Вираз $\log_a N$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, має смисл лише при $N > 0$.

Логарифмічна рівність $\log_a N = b$ і показникова рівність $a^b = N$ виражають одне й те саме співвідношення між числами a, b і N.

За цими рівностями можна знайти одне з трьох чисел, що входять до них, якщо задано два інших.

Відповідно до цього можна розв'язати три задачі.

1) Знайти число N за даним його логарифмом b і за основою a.

2) Знайти основу a за даним числом N і його логарифмом b.

3) Знайти логарифм b даного числа N за даною основою a.

Широко використовують так звані десяткові логарифми, тобто логарифми за основою 10. Для них застосовують замість символу $\log_{10}$ символ $\lg$ (без зазначення основи), наприклад $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$, $\lg 1000 = 3$, $\lg 0,1 = -1$

П р и к л а д и.

1. Записати у вигляді логарифмічних рівностей:

а) $2^7 = 128$; б) $5^{-3} = \frac{1}{125}$; в) $216^{\frac{1}{3}} = 6$.

Застосовуючи означення логарифма даного числа за даною основою, маємо:

а) $\log_2 128 = 7$; б) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; в) $\log_{216} 6 = \frac{1}{3}$.

2. За означенням логарифма, перевірити справедливість таких рівностей: а) $\log_5 625 = 4$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$.

Це так, оскільки: а) $5^4 = 625$, б) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

3. За означенням логарифма, визначити, яке число має логарифм 3 за основою 7.

За умовою $\log_7 x = 3$, звідси $x = 7^3$; $x = 343$.

4. За якою основою логарифм числа 10 000 дорівнює 4?

Маємо: $\log_x 10\,000 = 4$, $x^4 = 10\,000$, $x = \sqrt[4]{10\,000}$, $x = 10$.

5. Знайти: а) логарифм числа $\frac{1}{343}$ за основою 7;

б) логарифм числа 16 за основою $\frac{1}{2}$.

Маємо: а) $\log_7 \frac{1}{343} = x$; $7^x = \frac{1}{343}$; $7^x = 7^{-3}$; $x = -3$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = x$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^4$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, $x = -4$.

6. Знайти основу x, якщо $\log_x \frac{1}{49} = -2$.

Маємо: $x^{-2} = \frac{1}{49}$, $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{49}$; $x^2 = 49$; $x = 7$.

7. Знайти число x, якщо: а) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; б) $\log_{0,1} x = -1$. Переходячи від логарифмічних рівностей до показникових, маємо:

а) $x = (\sqrt{2})^4 = 4$; б) $x = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$.

8. За якої основи: а) логарифм числа 3 дорівнює 3; б) логарифм числа $\frac{1}{3}$ дорівнює $\frac{1}{3}$?

Маємо: а) $\log_x 3 = 3$, або $x^3 = 3$, звідки $x = \sqrt[3]{3}$;

б) $\log_x \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, або $x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$. Піднісши обидві частини цієї рівності до куба, дістанемо: $x = \frac{1}{27}$.

9. Обчислити вираз: а) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27}$;

б) $\log_3 \log_3 27$.

Маємо: а) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$;

б) позначимо $\log_3 \log_3 27 = x$.

За означенням логарифма $3^x = \log_3 27$ або $3^x = 3$, звідки $x = 1$.

Основна логарифмічна тотожність. Розглянемо показникову рівність

$$a^x = N. \quad (1)$$

За означенням логарифма,

$$x = \log_a N. \quad (2)$$

Замінюючи в рівності (1) x його значенням з рівності (2), дістанемо:

$$a^{\log_a N} = N. \quad (3)$$

Рівність (3) називається *основною логарифмічною тотожністю*. Вона є коротким записом означення логарифма: $\log_a N$ є показник степеня, до якого треба піднести основу степеня a, щоб дістати N. Наприклад: $5^{\log_5 125} = 125$; $10^{\lg 1000} = 1000$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 9} = 9$.

П р и к л а д и.

1. За допомогою основної логарифмічної тотожності перетворити рівність $2^5 = 32$. Маємо: $2^{\log_2 32} = 32$.

2. Обчислити: а) $1,9^{\log_{1,9} 8}$; б) $a^{2\log_a N}$.

Маємо: а) $1,9^{\log_{1,9} 8} = 8$; б) $a^{2\log_a N} = (a^{\log_a N})^2 = N^2$.

3. Обчислити: а) $4^{-\log_4 20}$; б) $5^{\log_5 9 - \log_5 10}$; в) $49^{\log_7 8}$.

а) За означенням степеня з від'ємним показником, $4^{-\log_4 20} = \frac{1}{4^{\log_4 20}} = \frac{1}{20}$;

б) У показнику маємо різницю, а показники степенів віднімаються при діленні. Отже, $5^{\log_5 9 - \log_5 10} = \frac{5^{\log_5 9}}{5^{\log_5 10}} = \frac{9}{10}$;

в) Враховуючи, що $49 = 7^2$, дістанемо: $49^{\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = 8^2 = 64$. Отже, $49^{\log_7 8} = 64$.

4. Обчислити: а) $1 + 5^{\log_5 8}$; б) $2^{1+3\log_2 5}$;

в) $\frac{a^{3\log_a N} + a^{2\log_a N}}{N^2}$; г) $81^{0,5\log_3 7}$; д) $10^{\lg 2}$; е) $10^{2+\lg 0,05}$.

Маємо: а) $1 + 5^{\log_5 8} = 1 + 8 = 9$;

б) $2^{1+3\log_2 5} = 2 \cdot 2^{3\log_2 5} = 2 \cdot (2^{\log_2 5})^3 = 2 \cdot 5^3 = 250;$

в) $\dfrac{a^{3\log_a N} + a^{2\log_a N}}{N^2} = \dfrac{(a^{\log_a N})^3 + (a^{\log_a N})^2}{N^2} =$

$= \dfrac{N^3 + N^2}{N^2} = N + 1;$

г) $81^{0,5\log_3 7} = (3^{0,5\log_3 7})^4 = 3^{2\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^2 = 7^2 = 49;$

д) $10^{\lg 2} = 2;$ е) $10^{2+\lg 0,05} = 10^2 \cdot 10^{\lg 0,05} = 100 \cdot 0,05 = 5.$

Основні властивості логарифмів. Практичне застосування логарифмів ґрунтується на ряді теорем, що виражають основні властивості логарифмів.

Теорема 1. Логарифм добутку двох додатних множників дорівнює сумі їх логарифмів, тобто

$$\log_a(N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2, \text{ де } N_1 > 0, N_2 > 0.$$

Доведення. Позначимо $\log_a N_1 = x_1$ і $\log_a N_2 = x_2$. За означенням логарифма, $N_1 = a^{x_1}$, $N_2 = a^{x_2}$. Перемножаючи почленно ці рівності, дістанемо: $N_1 \cdot N_2 = a^{x_1 + x_2}$. Тут $x_1 + x_2$ є показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число, яке дорівнює добутку. Отже, можна записати: $\log_a(N_1 \cdot N_2) = x_1 + x_2$. Замінюючи x_1 і x_2 їх виразами через логарифми, остаточно дістанемо: $\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$. Теорему доведено для окремого випадку — для двох множників. Але її можна довести і для будь-якого скінченного числа множників, бо при знаходженні добутку скінченного числа степенів однієї й тієї самої основи показники степенів додаються. Отже, взагалі, $\log_a(N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \ldots \cdot N_n) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \ldots + \log_a N_n$, де $N_1 > 0, N_2 > 0, \ldots, N_n > 0$ (пропонуємо самостійно довести теорему для випадку трьох множників).

Зазначимо, що для доведення цієї теореми можна було скористатися основною логарифмічною тотожністю, а саме: нехай, як і раніше, $N_1 = a^{x_1}$, $N_2 = a^{x_2}$. За основною логарифмічною тотожністю, $N_1 = a^{\log_a N_1}$, $N_2 = a^{\log_a N_2}$. Перемножаючи почленно ці рівності, дістанемо: $N_1 \cdot N_2 = a^{\log_a N_1} \cdot a^{\log_a N_2} = a^{\log_a N_1 + \log_a N_2}$. За означенням логарифма,

$$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2.$$

Теорема 2. Логарифм частки двох додатних чисел (дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника (чисельника і знаменника), тобто

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2, \text{ де } N_1 > 0, N_2 > 0.$$

Доведення. Нехай $\log_a N_1 = x_1$ і $\log_a N_2 = x_2$. Тоді $N_1 = a^{x_1}, N_2 = a^{x_2}$.

Поділимо почленно першу рівність на другу: $\frac{N_1}{N_2} = a^{x_1 - x_2}$.

Тут $x_1 - x_2$ є показником степеня, до якого слід піднести основу a, щоб дістати число, що дорівнює частці $\frac{N_1}{N_2}$. Отже, маємо: $\log_a \frac{N_1}{N_2} = x_1 - x_2$. Замінюючи x_1 і x_2 їх виразами через логарифми, остаточно дістанемо:

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2.$$

Наслідок. Логарифм дробу, чисельник якого дорівнює одиниці, дорівнює логарифму знаменника, взятому з протилежним знаком. (Обґрунтуйте це твердження самостійно. Можна також довести теорему 2, користуючись основною логарифмічною тотожністю.)

Теорема 3. Логарифм степеня додатного числа дорівнює показнику степеня, помноженому на логарифм основи цього степеня, тобто

$$\log_a(N^m) = m \log_a N, \text{ де } m \text{ — будь-яке число, } N > 0.$$

Доведення. Нехай $\log_a N = x$, тоді $N = a^x$. Піднесемо обидві частини останньої рівності до степеня m: $N^m = a^{mx}$. Тут mx — показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число, яке дорівнює N^m. Отже, переходячи до логарифмів, дістанемо: $\log_a(N^m) = mx$. Замінимо x його виразом через логарифм і остаточно матимемо $\log_a(N^m) = m\log_a N$.

Теорема 4. Логарифм кореня з додатного числа дорівнює логарифму підкореневого виразу, поділеному на показник кореня, тобто

$$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{\log_a N}{k}.$$

Д о в е д е н н я. Нехай треба знайти $\log_a \sqrt[k]{N}$. Замінюючи радикал степенем з дробовим показником і застосовуючи теорему 3, дістанемо:

$$\log_a \sqrt[k]{N} = \log_a N^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\log_a N = \frac{\log_a N}{k}.$$

Теорема 5. Якщо логарифми двох додатних чисел за тією самою основою рівні, то й самі числа рівні. І навпаки, якщо два додатних числа рівні, то і їх логарифми за тією самою основою рівні.

Д о в е д е н н я. Нехай $\log_a b = \log_a c$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$. Позначимо $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. Тоді $a^x = b$, $a^y = c$. За властивістю показникової функції, якщо $x = y$, то $b = c$.

Обернене твердження пропонуємо довести самостійно.

До основних властивостей логарифмів належать ще такі:

1) Логарифм одиниці дорівнює нулю. Це випливає з означення степеня з нульовим показником. Якщо $a \neq 0$, $a^0 = 1$, але тоді $\log_a 1 = 0$.

2) Логарифм основи дорівнює одиниці, тобто $\log_a a = 1$. Це випливає з того, що $a^1 = a$.

Основні властивості логарифмів широко використовуються під час перетворення виразів, що містять логарифми. Окремим видом таких перетворень є логарифмування виразів.

Прологарифмувати одночлен, означає виразити його логарифм через логарифми додатних чисел (позначених цифрами і буквами), що входять до його складу.

Користуючись теоремами про логарифм добутку, частки, степеня і кореня, можна прологарифмувати будь-який одночленний вираз.

Подані вище рівності справедливі для будь-якої основи a, що задовольняє умови $a > 0$, $a \neq 1$. Умовимося під час логарифмування основою вважати число 10.

П р и к л а д и. Прологарифмувати вирази:

1. $x = 5ac\,(a > 0, c > 0)$.

Даний вираз є добутком, а тому за теоремою 1:

$$\lg x = \lg 5 + \lg a + \lg c.$$

2. $x = \dfrac{m}{n}$ $(m > 0,\ n > 0)$.

За теоремою 2: $\lg x = \lg m - \lg n$.

3. $x = 11a^2b^3$ $(a > 0,\ b > 0)$.

За теоремами 1 і 3:

$$\lg x = \lg 11 + 2\lg a + 3\lg b.$$

4. $x = \dfrac{a^4b}{7c^5}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

$$\lg x = \lg(a^4b) - \lg(7c^5) = 4\lg a + \lg b - \lg 7 - 5\lg c$$

5. $x = \sqrt[4]{3a^3b}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

За теоремою 4:

$$\lg x = \frac{1}{4}\lg(3a^3b) = \frac{1}{4}\lg 3 + \frac{3}{4}\lg a + \frac{1}{4}\lg b.$$

6. $x = \dfrac{(a+b)^4\sqrt[5]{c}}{\sqrt[3]{(a-b)^2d^2}}$, де $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

$$\lg x = 4\lg(a+b) + \frac{1}{5}\lg c - \frac{1}{3}(2\lg(a-b) + 2\lg d).$$

7. Знайти x, якщо:

$$\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4,$$

$$\log_7 x = \log_7 \frac{12}{4}; \quad \log_7 x = \log_7 3.$$

Але якщо логарифми чисел x і 3 при одній і тій самій основі 7 рівні, то і числа будуть рівні. Отже, $x = 3$.

8. Обчислити без обчислювальних засобів:

а) $\log_3 2 + \log_3 4,5$;

$$\log_3 2 + \log_3 4,5 = \log_3(2 \cdot 4,5) = \log_3 9 = 2.$$

б) $\log_2 7 - \log_2 \dfrac{7}{16}$;

$$\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16} = \log_2 \frac{7}{\frac{7}{16}} = \log_2 16 = 4.$$

9. Нехай $\log_a b = 0,45$; $\log_a c = 0,4$; $\log_a d = 0,85$; $\log_a k = -0,25$.

Знайти $\log_a x$, якщо $x = \dfrac{b^2\sqrt[8]{c}}{dk^3}$.

$$\log_a x = 2\log_a b + \frac{1}{8}\log_a c - \log_a d - 3\log_a k =$$

$$= 0,9 + 0,05 - 0,85 + 0,75 = 0,85.$$

Деякі важливі тотожності, що містять логарифми.

1) Доведемо тотожність $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, або $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.

Нехай $\log_b a = x$. Тоді, за означенням логарифма, $b^x = a$. Логарифмуючи цю рівність за основою a, дістанемо: $x\log_a b = 1$, звідси $x = \dfrac{1}{\log_a b}$, тобто $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

2) Доведемо тотожність $\log_a N = \log_{a^k} N^k$, що має такий зміст: якщо число, що стоїть під знаком логарифма, і основу логарифма піднести до будь-якого степеня, то значення логарифма не зміниться.

Нехай $\log_a N = x$. Тоді $a^x = N$ і $a^{kx} = N^k$, або $(a^k)^x = N^k$. Тут x — показник степеня, до якого треба піднести вираз a^k, щоб дістати N^k. Отже, $x = \log_{a^k} N^k$.

Підставляючи замість x його значення, остаточно дістанемо: $\log_a N = \log_{a^k} N^k$.

За цією тотожністю маємо, наприклад: $\log_2 5 = \log_{2^3} 5^3 = \log_8 125$; $\log_{\sqrt[3]{a}} x = \log_a x^3 = 3\log_a x$.

3) Доведемо тотожність $\log_{a^n} N = \dfrac{1}{n}\log_a N$.

Нехай $\log_{a^n} N = x$, тоді $a^{nx} = N$. Піднесемо обидві частини останньої рівності до степеня $\dfrac{1}{n}$, дістанемо: $a^x = N^{\frac{1}{n}}$. Тепер прологарифмуємо останню рівність за основою a. Маємо: $x = \dfrac{1}{n}\log_a N$, тобто $\log_{a^n} N = \dfrac{1}{n}\log_a N$.

П р и к л а д и.

1. Що більше: $\log_4 3$ чи $\log_{10} 9$? $\log_4 3 = \log_{4^2} 3^2$, отже, $\log_4 3 = \log_{16} 9$. Таким чином, $\log_4 3 < \log_{10} 9$.

2. Обчислити $\log_{\sqrt{3}} 8$, знаючи, що $\log_{12} 3 = a$; $\log_{\sqrt{3}} 8 = \log_3 64 = \log_3 4^3 = 3\log_3 4 = 3\log_3 \dfrac{12}{3} = 3(\log_3 12 - \log_3 3)$.

Використовуючи залежності $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, дістаємо $\log_3 12 = \dfrac{1}{\log_{12} 3}$. Отже, $\log_{\sqrt{3}} 8 = 3(\log_3 12 - \log_3 3) = 3\left(\dfrac{1}{\log_{12} 3} - 1\right) = 3\left(\dfrac{1}{a} - 1\right) = \dfrac{3(1-a)}{a}$.

Потенціювання. Перетворення, за допомогою якого за даним логарифмом числа (виразу) визначають саме число (вираз), називають *потенціюванням*. Це перетворення є оберненим до логарифмування.

Застосовуючи теореми логарифмування, іноді можна вирази, що містять логарифми чисел або виразів, перетворити в логарифм одного числа або виразу

Приклади.

1. Знайти x за даним його логарифмом:

$$\lg x = 5\lg a - 3\lg c.$$

За теоремою про логарифм степеня, $\lg x = \lg a^5 - \lg c^3$ за теоремою про логарифм частки, $\lg x = \lg \frac{a^5}{c^3}$

Якщо логарифми виразів x і $\frac{a^5}{c^3}$ за однією і тією самою основою рівні, то і вирази будуть рівні, тобто $x = \frac{a^5}{c^3}$.

2. Знайти z за даним його логарифмом:

$$\lg z = \frac{11}{12}\lg a - \lg 7 - \lg b.$$

Маємо: $\lg z = \lg \frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{7b}$; $z = \frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{7b}$.

Тут потенціювання виконали без проміжних записів

3. Звільнитися від логарифмів: $\lg B - \lg A = \frac{b}{c}\lg m - 2\lg n$.

Маємо: $\lg \frac{B}{A} = \lg \frac{\sqrt[c]{m^b}}{n^2}$; $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt[c]{m^b}}{n^2}$.

4. Спростити вирази:

а) $\lg \frac{(m+n)^2}{a} + \lg \frac{ab}{m^2 - n^2} + \lg \frac{m-n}{b}$

Маємо: $\lg\left(\frac{(m+n)^2}{a} \cdot \frac{ab}{m^2 - n^2} \cdot \frac{m-n}{b}\right) = \lg(m+n)$

б) $\lg N = \frac{3}{4}\lg a - 2\lg b - \lg c + \lg(a+b)$.

Маємо: $\lg N = \lg \frac{\sqrt[4]{a^3}\cdot(a+b)}{b^2c}$, звідси $N = \frac{\sqrt[4]{a^3}(a+b)}{b^2c}$

Перехід від однієї основи логарифмів до іншої. Часто необхідно здійснити перехід від логарифмів за однією основою до логарифмів за іншою основою. Нехай відоме $\log_a N$ і треба знайти $\log_b N = x$ (x — невідоме число), де $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$. За означенням логарифма, $b^x = N$. Прологарифмуємо останню рівність за основою a. Маємо: $x\log_a b = \log_a N$, звідси $x = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$, тобто

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}. \qquad (1)$$

Таким чином, логарифм будь-якого додатного числа N за основою b дорівнює логарифму того самого числа за іншою основою a, поділеному на логарифм числа b за основою a. Цю залежність застосовують у такому вигляді:

$$\log_a N = \log_b N \cdot \log_a b. \qquad (2)$$

Ще раз підкреслимо, що формули (1) і (2) справедливі, якщо обидві їхні частини мають смисл, тобто $a > 0, a \neq 1$, $b > 0$ і $b \neq 1$.

Отже, будь-який логарифм можна подати у вигляді відношення двох логарифмів, узятих за тією самою основою Наприклад, $\log_5 10$ можна подати за основами 2 і 3 ($a > 0, a \neq 1$).

Так: $\log_5 10 = \dfrac{\log_2 10}{\log_2 5}$; $\log_5 10 = \dfrac{\log_3 10}{\log_3 5}$; $\log_5 10 = \dfrac{\log_a 10}{\log_a 5}$.

П р и к л а д и.

1. $\log_{27} 3x$ подати за основою 3.

Маємо: $\log_{27} 3x = \dfrac{\log_3 3x}{\log_3 27} = \dfrac{\log_3 3 + \log_3 x}{3} = \dfrac{1 + \log_3 x}{3}$.

2. Знаючи $\log_{12} 2 = a$, знайти $\log_6 16$.

Маємо: $\log_6 16 = \dfrac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \dfrac{\log_{12} 2^4}{\log_{12}\left(\frac{12}{2}\right)} = \dfrac{4\log_{12} 2}{1 - \log_{12} 2} = \dfrac{4a}{1-a}$.

3. Обчислити $\log_9 5 \cdot \log_{25} 27$.

Скористаємось залежністю $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ і зведемо логарифми до основи 10:

$$\log_9 5 \cdot \log_{25} 27 = \frac{\lg 5}{\lg 9} \cdot \frac{\lg 27}{\lg 25} = \frac{\lg 5}{2\lg 3} \cdot \frac{3\lg 3}{2\lg 5} = \frac{3}{4}.$$

Зазначимо, що в різноманітних розрахунках найчастіше використовують логарифм за основою 10, тобто десяткові логарифми.

Натуральні логарифми. В математичних дослідженнях використовують логарифми за основою, вираженою ірраціональним числом, наближене значення якого дорівнює 2,718281828459045... або $\approx 2,718$. Л е о н а р д Е й л е р (1707–1783) запропонував позначити це число буквою e. Його називають н е п е р о в и м ч и с л о м на честь шотландського математика Джона Непера (1550–1617).

Логарифми з основою e називають натуральними, або неперовими і позначають $\ln x$. Тут основу e не пишуть, а лише мають на увазі,

Від назви «логарифм» залишили лише одну букву (l), друга буква (n) є початковою в слові натуральний (латинське — *naturalis*). Отже,

$$\ln x = \log_e x. \tag{1}$$

Наприклад, $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln 2 = 0,693$, $\ln 3 = 1,098$, $\ln 10 = 2,303$.

За основною логарифмічною тотожністю, для будь-якого додатного числа

$$e^{\ln a} = a. \tag{2}$$

Якщо відомі десяткові логарифми чисел, то можна, використовуючи формулу (2), обчислити відповідні натуральні логарифми. Цією самою формулою можна користуватися і для відшукання десяткових логарифмів за натуральними. Маємо: $\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$, але $\log_e 10 \approx 2,303$, тому $\ln x = 2,303 \lg x$. Ця формула дає змогу обчислити натуральні логарифми, якщо відомі десяткові.

Нею можна користуватися також і для відшукання десяткових логарифмів за відомими натуральними. Для цього зручно переписати її у вигляді: $\lg x = \dfrac{1}{2,303} \ln x = 0,434 \ln x$.

Відповідно $\ln x = \dfrac{1}{0,434} \lg x$.

Число $M = \lg e \approx 0,434$ називають *модулем переходу* від натуральних логарифмів до десяткових. Отже, $\lg x = M \ln x$, $\ln x = \frac{\lg x}{M}$. Наприклад, $\ln 2 = \lg 2 \cdot \frac{1}{\lg e} \approx$
$\approx 0,3010 \cdot \frac{1}{\lg 2,718} \approx 0,3010 \cdot 2,303 \approx 0,6932$.
Натуральний логарифм приблизно в 2,3 раза більший за десятковий логарифм того самого числа.

§ 2. Логарифмічна функція, її графік і властивості

Поняття логарифмічної функції. Спробуємо знайти формулу функції, оберненої до показникової функції $y = a^x$, за відомим уже алгоритмом знаходження формули функції, оберненої до даної (див. с. 101).

1. Функція $y = a^x$ зростаюча при $a > 1$ і спадна при $0 < a < 1$. За достатньою умовою існування оберненої функції до даної функція $y = a^x$ має обернену на області визначення $D(s) = R$ (відповідно область значень цієї функції $E(s) = (0; +\infty)$).

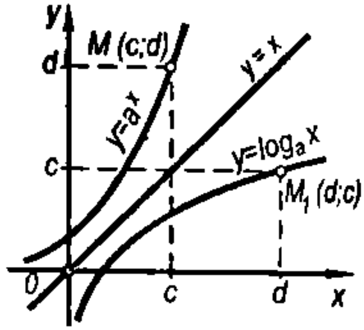
2. Розв'яжемо рівняння $y = a^x$ з двома змінними відносно змінної x. Оскільки x є показником степеня a^x, то, користуючись означенням логарифма, матимемо $x = \log_a y = \varphi(y)$. Дістали формулу функції, оберненої до функції $y = a^x = f(x)$.

3. Поміняємо позначення аргументу і функції у формулі оберненої функції. Дістанемо $y = \log_a x = \varphi(x)$ — формула функції, оберненої до функції $y = a^x$ у прийнятих позначеннях аргументу і функції. Одержана обернена функція дістала назву *логарифмічної функції*.

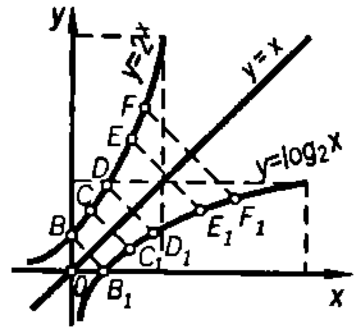
Отже, *логарифмічною називається функція* $y = \log_a x$, *де* $a >$ *і* $a \neq 1$, *обернена до показникової* $y = a^x$.

Відомо, що область визначення і область значень взаємно обернених функцій міняються множинами. Тому $D(\varphi) = (0; +\infty)$, $E(\varphi) = R$.

Вище було показано, що графік функції φ, оберненої до функції f, симетричний графіку f відносно прямої $y = x$. Скористаємося цим для побудови графіка функції $y = \log_a x$.

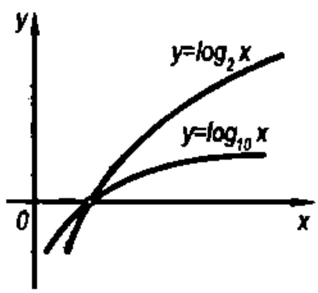


Мал. 96

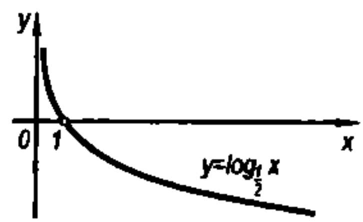


Мал. 97

Графік функції $y = \log_a x$ можна дістати з графіка функції $y = a^x$, симетрично відобразивши останній відносно прямої $y = x$. Для цього достатньо для кожної точки $M(c; d)$ графіка $y = a^x$ (мал. 96) побудувати точку $M_1(d; c)$, симетричну їй відносно прямої $y = x$.

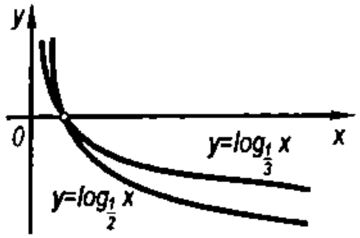


Мал. 98

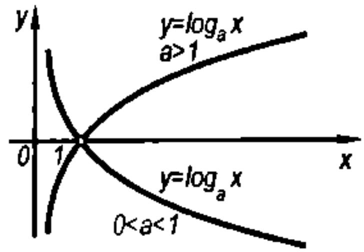


Мал. 99

Якщо на аркуші паперу накреслити чорнилом графік функції $y = a^x$, а потім, не давши йому висохнути, швидко зігнути аркуш уздовж бісектриси першого і третього координатних кутів, то відбиток буде графіком логарифмічної функції $y = \log_a x$. Побудуємо, наприклад, графік функції $y = \log_2 x$. Для цього знайдемо ряд точок, симетричних точкам графіка $y = 2^x$ відносно прямої $y = x$ (мал. 97). Такий вигляд матиме графік логарифмічної функції за будь-якої основи $a > 1$. Причому крива тим щільніше прилягає до осі Ox, чим більше a (мал. 98). Якщо основа $0 < a < 1$, то графік матиме інший вигляд. На малюнку 99 зображено графік логарифмічної функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Таку загальну форму матиме графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ за будь-якої основи $0 < a < 1$, причому крива тим щільніше прилягає до осі Ox, чим менше a (мал. 100).



Мал. 100



Мал. 101

Властивості логарифмічної функції. Знаючи властивості взаємно обернених функцій, можна легко дістати властивості логарифмічної функції з показникової. Характер графіка показникової функції за основою a залежить від того, буде $a > 1$ чи $0 < a < 1$. Тому і характер графіка логарифмічної функції за основою a залежить від тих самих умов. Отже, для функцій $y = \log_a x$ слід розрізняти 2 випадки: $a > 1$ і $0 < a < 1$ (мал. 101). У кожному з них властивості логарифмічної функції випливають із властивостей показникової, якщо врахувати ще зв'язок між графіками показникової й логарифмічної функцій. Отже, маємо такі *властивості логарифмічної функції.*

1) Область визначення логарифмічної функції — множина всіх додатних чисел.

2) Область значень логарифмічної функції — множина всіх дійсних чисел.

3) Логарифмічна функція на всій області визначення R_+ зростає, якщо $a > 1$ і спадає, якщо $0 < a < 1$.

4) Для будь-якого $a > 0$ $(a \neq 1)$ виконуються рівності:

а) $\log_a 1 = 0$; б) $\log_a a = 1$;

в) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, якщо $x > 0$, $y > 0$;

г) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, якщо $x > 0$, $y > 0$;

д) для будь-якого числа $x > 0$ і будь-якого $p \in R$

$$\log_a x^p = p \log_a x.$$

Для порівняння наведемо властивості показникової і логарифмічної функцій у вигляді таблиці (див. с. 230).

Систематизуємо властивості логарифмів, які слід запам'ятати, щоб впевнено використовувати їх під час розв'язування різноманітних вправ, виконання практичних розрахунків.

Спільні властивості для випадків $a > 0$ і $0 < a < 1$:

будь-яке додатне число має логарифм і до того тільки один:

від'ємні числа і число 0 не мають логарифмів:

логарифм одиниці дорівнює нулю:

логарифм основи дорівнює одиниці.

Властивості логарифмів чисел за основою $a > 1$:

якщо $N_1 > N_2$, то і $\log_a N_1 > \log_a N_2$, тобто більше число має більший логарифм, і навпаки;

логарифми чисел, більших за 1, додатні; логарифми чисел, менших за 1, від'ємні;

якщо число зростає необмежено, то і логарифм його зростає необмежено;

якщо число, залишаючись додатним, прямує до нуля, то логарифм його стає від'ємним і як завгодно великим за модулем.

Властивості логарифмів чисел за основою $0 < a < 1$:

якщо $N_1 > N_2$, то $\log_a N_1 < \log_a N_2$, тобто більше число має менший логарифм;

логарифми чисел, більших за 1, від'ємні; логарифми чисел, менших за 1, додатні;

якщо число зростає необмежено, то його логарифм спадає необмежено (умовний запис: $\log_a \infty = -\infty$); якщо число, залишаючись додатним, прямує до нуля, то логарифм його необмежено зростає (умовний запис: $\log_a 0 = +\infty$).

Приклади.

1. Які значення аргументу x є допустимими для функції $y = \log_a(3 - x)$?

Оскільки логарифмічна функція має дійсні значення тільки при додатних значеннях аргументу, накладемо умову $3 - x > 0$, звідси $x < 3$. Отже, допустимі значення аргументу визначаються нерівністю $x < 3$.

Розглядаючи наступні вправи, перевіряйте всі твердження за графіками логарифмічної функції.

2. Який висновок можна зробити щодо додатних чисел m і n, якщо $\log_5 m < \log_5 n$?

$m < n$, бо за основи, більшої від 1 ($a = 4$), меншому логарифму відповідає менше число.

3. Який висновок можна зробити щодо додатного числа m, якщо $\log_4 m = -3,7$?

$0 < m < 1$, бо за основи, більшої від 1 ($a = 4$), від'ємними є логарифми чисел, менших за 1.

Таблиця 9

Властивість	Функція	
	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Область визначення	R	$(0; \infty)$
Область значень	$(0; \infty)$	R
Монотонність $a > 1$	Зростає	Зростає
Монотонність $0 < a < 1$	Спадає	Спадає

4. Який висновок можна зробити щодо додатних чисел m і n, якщо $\log_{\frac{2}{5}} m > \log_{\frac{2}{5}} n$?

$m < n$, бо за основи, меншої від 1 $\left(a = \frac{2}{5}\right)$, меншому логарифму відповідає більше число.

5. Який висновок можна зробити щодо додатного числа c, якщо $\log_{\frac{1}{4}} c = -2$?

$c > 1$, бо за основи, меншої від 1 $\left(a = \frac{1}{4}\right)$, логарифми чисел, більших від 1, від'ємні.

6. Який висновок можна зробити відносно основи логарифма a, якщо $\log_a 8 = 0,3$?

Якщо число, більше від 1, має додатний логарифм, то основа логарифма більша від 1. Отже, $a > 1$.

7. Який висновок можна зробити щодо основи логарифма a, якщо $\log_a 7 < \log_a 6$?

Якщо більшому числу відповідає менший логарифм, то основа логарифма менша від 1. Отже, $0 < a < 1$.

8. За властивостями логарифмічної функції визначити, що більше:

а) $\log_2 3$ чи $\log_2 5$? б) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ чи $\log_{\frac{1}{2}} 3$?

в) $\log_5 8$ чи $\log_6 8$? г) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ чи $\log_{\frac{1}{2}} 5$?

д) $\log_4 5$ чи $\log_5 4$? е) $\log_2 1$ чи $\log_5 1$?

є) $\log_3 3$ чи $\log_7 7$?

Розв'язання.

а) $\log_2 5 > \log_2 3$, бо $a > 1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$, бо $a < 1$;

в) $\log_6 8 < \log_5 8$, бо коли $x > 1$, графік функції $y = \log_6 x$ лежить нижче, ніж графік функції $\log_5 x$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 5$, бо графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}} 5$ менш віддалений від осі Ox, ніж відповідний графік $y = \log_{\frac{1}{2}} 5$;

д) $\log_4 5 > \log_5 4$, бо коли $x > 1$, всі точки графіка $y = \log_4 x$ віддалені від осі Ox більше, ніж точки графіка $y = \log_5 x$;

е) $\log_2 1 = \log_5 1 = 0$, бо логарифм 1 за будь-якою основою дорівнює нулю;

є) $\log_3 3 = \log_7 7 = 1$, бо логарифм основи дорівнює одиниці.

9. Знайти області визначення функцій:

а) $y = \log_2(5 - x)$; б) $y = \log_3(x^2 + 1)$

в) $y = \log_{\frac{1}{2}}(5x - x^2 - 6)$; г) $y = \log_5 \dfrac{3 + x}{x - 5}$.

Розв'язання. Оскільки вираз, що стоїть під знаком логарифма, має бути додатним, то для встановлення областей визначення даних функцій досить знайти значення x, при яких вирази, що стоять під знаком логарифма, додатні.

а) $5 - x > 0$; $x < 5$, тобто областю визначення функції $y = \log_2(5 - x)$ є проміжок $(-\infty; 5)$.

б) $x^2 + 1 > 0$. Нерівність справджується для будь-яких дійсних значень x, тому областю визначення даної функції є $(-\infty; \infty)$.

в) $5x - x^2 - 6 > 0$, або $(x - 2)(x - 3) < 0$, звідси $2 < x < 3$, тобто областю визначення є проміжок $(2; 3)$.

г) $\dfrac{3 + x}{x - 5} > 0$, або $(3 + x)(x - 5) > 0$,

звідси $-\infty < x < -3$; $5 < x < \infty$. Отже, областю визначення даної функції є проміжки $(-\infty; -3)$ і $(5; +\infty)$.

§ 3. Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей

Логарифмічні рівняння. Приклади розв'язування логарифмічних рівнянь. *Логарифмічними* називають рівняння, які містять змінну під знаком логарифма. Наприклад: $\log_5 x = 2$, $\lg x + \lg 5 = 2$, $\lg(3x^2+7) - \lg(3x-2) = 1$. Рівняння $x + \log_2 7 = \sqrt{\log_4 5}$ не є логарифмічним, бо воно не містить невідомого під знаком логарифма. Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд $\log_a x = b$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, b — будь-яке число. Воно має єдиний розв'язок $x = a^b$, який можна дістати за допомогою потенціювання.

Розглянемо логарифмічні рівняння виду:

$$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1). \tag{1}$$

Розв'язування цих рівнянь ґрунтується на тому, що рівняння $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ рівносильне системі:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) = \varphi(x). \end{cases} \tag{2}$$

Інакше кажучи, рівняння $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ рівносильне кожній із змішаних систем:

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0. \end{cases} \tag{2*}$$

Для розв'язування рівняння (1) досить розв'язати рівняння

$$f(x) = \varphi(x) \tag{3}$$

і його розв'язки підставити в систему нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \end{cases} \tag{4}$$

яка задає область визначення рівняння. Коренями рівняння (1) є тільки ті розв'язки рівняння (3), які задовольняють систему (4), тобто належать області визначення рівняння, заданого формулою (1).

Під час розв'язування логарифмічних рівнянь може статися розширення області визначення (з'являються сторонні корені) або її звуження (зникнуть корені). Тому треба обов'язково підставити корені рівняння (3) у систему (4). Наприклад, рівняння $\lg x^2 = 2$ має два корені, бо, за означенням логарифма, $x^2 = 10^2$, $x^2 = 100$, звідси $x_1 = 10$; $x_2 = -10$. Якщо спочатку винести показник 2 за знак логарифма, то $2\lg x = 2$, $\lg x = 1$, $x = 10$. Втрата другого розв'язку $x = -10$ сталася внаслідок звуження множини допустимих значень x після винесення показника за знак логарифма. Справді, в рівнянні $\lg x^2 = 2$ корінь x може бути додатним і від'ємним числом, а в рівнянні 2 $2\lg x = 2$ — лише додатним.

Навпаки, якби даним було рівняння $2\lg x = 2$, а від нього ми перейшли б до рівняння $\lg x^2 = 2$, а потім до рівняння $x^2 = 100$, звідки $x_1 = 10, x_2 = -10$, то дістали б сторонній розв'язок ($x_2 = -10$) для даного рівняння.

Взагалі не існує якогось універсального способу розв'язування логарифмічних рівнянь. Здебільшого воно зводиться до розв'язування алгебраїчних рівнянь і найпростіших логарифмічних рівнянь виду $\log_a x = b$.

П р и к л а д и. Розв'язати рівняння.

1. $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

Р о з в ' я з а н н я. За означенням логарифма, маємо:

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}; \quad x = 8$$

2. $5\log_2 x - 3\log_7 49 = 2\log_2 x$.

Р о з в ' я з а н н я. $5\log_2 x - 2\log_2 x = 3 \cdot 2$; $3\log_2 x = 6$; $\log_2 x = 2$, $x = 4$.

П е р е в і р к а. $5\log_2 4 - 3\log_7 49 = 10 - 6 = 4$; $2\log_2 4 = 4$. Отже, $x = 4$.

3. $\log_5 x + \log_5(x + 7) = \log_5 2 + 2\log_5 3$.

Р о з в ' я з а н н я. Пропотенціюємо обидві частини рівняння:

$$x(x + 7) = 2 \cdot 3^2. \text{ Звідси } x^2 + 7x - 18 = 0,$$

$$x_1 = -9, x_2 = 2.$$

Перевірка. Підставимо в дане рівняння замість невідомого числа -9. У лівій частині дістанемо вирази $\log_5(-9)$ і $\log_5(-2)$, які не мають смислу (логарифми від'ємних чисел не існують). Отже, значення $x = -9$ є стороннім коренем. Тепер перевіримо, чи є коренем даного рівняння число 2. Ліва частина рівняння має вигляд:

$$\log_5 2 + \log_5 9 = \log_5 2 + \log_5 3^2 = \log_5 2 + 2\log_5 3.$$

Ліва частина дорівнює правій. Отже, $x = 2$ — корінь даного рівняння.

Зауважимо, що прийом потенціювання широко застосовується під час розв'язування логарифмічних рівнянь.

4. $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3.$

Розв'язання. $x^2 + 4x + 3 = 2^3$, або $x^2 + 4x - 5 = 0$. Коренями цього рівняння є: $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. Перевірка показує, що обидва розв'язки задовольняють дане рівняння. (Перевірку зробіть самостійно.)

5. $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) - 1 + \log_7(2x - 7) = 0.$

Розв'язання. Перенесемо два останніх доданки у праву частину рівняння: $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = 1 - \log_7(2x - 7)$. Беручи до уваги, що $1 = \log_7 7$, маємо: $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = \log_7 7 - \log_7(2x - 7)$. Тепер пропотенціюємо обидві частини рівняння:

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{2x-7}.$$

Після перетворень дістанемо квадратне рівняння $x^2 - 9x = 0$, яке має корені $x_1 = 0$, $x_2 = 9$.

Перевірка. $x = 0$ – сторонній корінь, бо вирази $\log_7(0 - 2)$ і $\log_7(0 - 7)$ не мають смислу.

Підставимо у рівняння значення $x = 9$. Ліва частина має вигляд: $\log_7 7 - \log_7 11 - 1 + \log_7 11 = 1 - \log_7 11 - 1 + \log_7 11 = 0$.

Права частина дорівнює нулю, отже, $x = 9$ — корінь даного рівняння.

6. $\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1.$

Розв'язання. $x^2 - 2x + 2 = x$, тобто $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Перевірка показує, що $x = 1$ не може бути коренем даного рівняння, а число 2 є його коренем.

7. $\log_{1-2x}(x^2 - 3x + 5) = 2$.

Розв'язання. За означенням логарифма дістанемо квадратне рівняння: $(1 - 2x)^2 = x^2 - 3x + 5$. Його корені $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

Дане рівняння задовольняє лише значення $x = -1$ (перевірте це).

8. $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\log_4 x = y$, тоді дістанемо квадратне рівняння $y^2 - y - 2 = 0$, корені якого $y_1 = -1$, $y = 2$. Дістанемо два рівняння: $\log_4 x = -1$, $\log_4 x = 2$.

З першого рівняння, за означенням логарифма, знаходимо $x_1 = 4^{-1}$, $x_1 = \frac{1}{4}$. З другого рівняння маємо: $x_2 = 4^2$, $x_2 = 16$. За допомогою перевірки з'ясовуємо, що обидва знайдених значення x є коренями даного рівняння. (Перевірку зробіть самостійно.)

9. $\lg x = 2 - \lg 5$.

Розв'язання. Замінимо 2 через $\lg 100$. Дістанемо $\lg x = \lg 100 - \lg 5$, або $\lg x = \lg 20$, звідси $x = 20$. Тут використано таку властивість логарифмів: якщо логарифми двох чисел за однією й тією самою основою рівні, то й самі числа рівні.

Перевірка. $2 - \lg 5 = \lg 100 - \lg 5 = \lg \frac{100}{5} = \lg 20$; $\lg 20 = \lg 20$.

10. $\lg x + \lg(x + 21) = 2$.

Розв'язання. $\lg x + \lg(x + 2) = \lg 100$; $x(x + 21) = 100$; $x^2 + 21x - 100 = 0$; $x_1 = -25$, $x_2 = 4$.

Перевірка. Якщо $x = -25$, у лівій частині даного рівняння матимемо вирази $\lg(-25)$ і $\lg(-4)$, що не мають смислу. Отже, $x_1 = -25$ не є розв'язком даного рівняння. Якщо $x_1 = 4$, маємо: $\lg 4 + \lg 25 = \lg(4 \cdot 25) = \lg 100 = 2$. Отже, $x = 4$ є коренем даного рівняння.

11. $\lg^3(x + 1) + \lg^2(x + 1) - 2\lg(x + 1) = 0$.

Розв'язання. Нехай $\lg(x+1) = y$, тоді $y^3 + y^2 - 2y = 0$, або $y(y^2 + y - 2) = 0$, звідси дістаємо два рівняння: $y = 0$; $y^2 + y - 2 = 0$;

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -2$. Тоді: 1) $\lg(x+1) = 0$; 2) $\lg(x+1) = 1$; 3) $\lg(x+1) =$

$= -2$ і відповідно: 1) $x+1 = 1$; 2) $x+1 = 10$; 3) $x+1 = 0,01$. З рівнянь 1) — 3) легко знаходимо, що $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, $x_3 = -0,99$. Перевірка показує, що всі три знайдені значення x є коренями даного рівняння.

12. $\lg(2x^2+21x+9) - \lg(2x+1) = 1$.

Розв'язання. $\lg \dfrac{2x^2+21x+9}{2x+1} = \lg 10$.
З рівності логарифмів випливає рівність чисел

$$\frac{2x^2+21x+9}{2x+1} = 10. \text{ Звідси } 2x^2+x-1=0;$$

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Значення $x_1 = -1$ не задовольняє рівняння, бо під знаком логарифма дістаємо від'ємне число.

Проілюструємо ще застосування способу логарифмування обох частин рівняння.

13. $x^{\lg x - 1} = 100$.

Розв'язання. $(\lg x - 1)\lg x = 2$. Поклавши $\lg x = y$, маємо: $y^2 - y - 2 = 0$. Звідси $y_1 = -1$; $y_2 = 2$. Тоді $\lg x_1 = -1$ і $x_1 = \frac{1}{10}$; $\lg x_2 = 2$ і $x_2 = 100$. Обидва значення невідомого задовольняють рівняння.

14. $x^{1-\lg x} = 0,01$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини рівняння: $(1-\lg x)\lg x = -2$. Нехай $\lg x = y$, тоді $(1-y)y = -2$, або $y^2 - y - 2 = 0$. Знайдемо корені цього рівняння: $y_1 = -1$, $y_2 = 2$.

Дістанемо два рівняння: $\lg x = -1$, $\lg x = 2$.

Остаточно маємо: $x_1 = 0,1$, $x_2 = 100$.

Обидва значення невідомого є коренями даного рівняння.

Зазначимо, що у прикладах 13, 14 невідоме входило до показника степеня під знаком логарифма. Такі рівняння іноді називають *показниково-логарифмічними*.

Найчастіше показниково-логарифмічні рівняння розв'язують способом логарифмування обох частин рівняння. До окремих видів рівнянь зручно застосовувати спосіб зведення до спільної основи.

Приклади. Розв'язати рівняння способом зведення до спільної основи.

1. $x^{\lg x} = 10$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини рівняння. Дістанемо: $\lg x \lg x = \lg 10$, $\lg^2 x = 1$, звідси $\lg x_1 = 1$, $\lg x_2 = -1$, або $x_1 = 10$, $x_2 = 0,1$.

Перевірка. Якщо $x_1 = 10$, маємо $10^{\lg 10} = 10$, $10 = 10$. Якщо $x_2 = 0,1$, маємо $0,1^{\lg 0,1} = 0,1^{-1} = 10$.

Отже, $10 = 10$, $x_1 = 10$, $x_2 = 0,1$.

2. $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}$.

Розв'язання. Зведемо обидві частини рівняння до спільної основи 2. Дістанемо $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = 2^{-6}$. Прирівнюючи показники степенів, маємо $\frac{3}{\log_3 x} = -6$, або $\log_3 x = -\frac{1}{2}$, звідси $x = 3^{-\frac{1}{2}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, або $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Перевірка. $2^{\frac{3}{\log_3 \frac{\sqrt{3}}{3}}} = 2^{\frac{3}{-\frac{1}{2}}} = 2^{-6}$, $2^{-6} = 2^{-6}$. Отже, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $x^{2-\frac{\lg x}{2}} = 100$.

Розв'язання. Прологарифмувавши обидві частини рівняння за основою 10, дістанемо $\left(2 - \frac{\lg x}{2}\right) \lg x = \lg 100$, або $\lg^2 x - 4\lg x + 4 = 0$, $\left(\lg x - 2\right)^2 = 0$. Звідси $\lg x = 2$, $x = 100$.

Перевірка. $100^{2-\frac{\lg 100}{2}} = 100^{2-1} = 100$.
Отже, $x = 100$.

4. $0,4^{\lg^2 x+1} = 6,25^{2-\lg x^3}$.

Розв'язання. Зведемо обидві частини рівняння до спільної основи $\frac{5}{2}$. Дістанемо $\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x+1} = 2,5^{2\left(2-3\lg x\right)}$,

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-\left(\lg^2 x+1\right)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2\left(2-3\lg x\right)}.$$

Прирівнюючи показники степенів, дістанемо: $-\left(\lg^2 x + 1\right) = 2\left(2 - 3\lg x\right)$, або $\lg^2 x - 6\lg x + 5 = 0$. Розв'яжемо квадратне рівняння відносно $\lg x$.

Маємо: $\lg x_1 = 1$, або $x_1 = 10$; $\lg x_2 = 5$, або $x_2 = 100\,000$. Перевірка показує, що обидва значення x є коренями даного рівняння.

5. $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$.

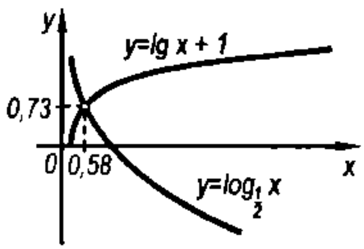
Розв'язання. Запишемо дане рівняння так:

$$\log_2(\log_3 \log_4 x) = 0.$$

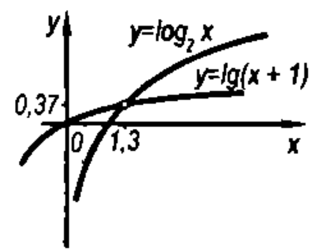
Число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма, дорівнює 2^0, тобто 1. Отже, $\log_3 \log_4 x = 1$. Це рівняння перепишемо так: $\log_3(\log_4 x) = 1$. Число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма, дорівнює 3. Маємо: $\log_4 x = 3$, звідси $x = 4^3$, або $x = 64$.

Перевірка. $\log_2 \log_3 \log_4 64 = \log_2 \log_3 3 = \log_2 1 = 0$; $0 = 0$.

6. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.



Мал. 102



Мал. 103

Розв'язання. Скористаємось формулою $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ і перейдемо в усіх доданках до логарифма при основі 2.

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}, \quad \log_{16} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = \frac{\log_2 x}{4}.$$

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7, \text{ звідси } \log_2 x = 4.$$

Остаточно маємо $x = 16$.

Деякі логарифмічні рівняння вдається розв'язувати лише наближено. Одним із способів наближеного знаходження коренів є графічний. На малюнках 102, 103 подано графічне розв'язання відповідно рівнянь

$$\lg x - \log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0 \text{ і } \lg(x+1) - \log_2 x = 0.$$

Розв'язування систем логарифмічних рівнянь. Під час розв'язування систем логарифмічних рівнянь переважно використовуються ті самі способи, що й при розв'язуванні алгебраїчних систем.

Приклади. Розв'язати системи рівнянь.

1. $\begin{cases} \lg x + \lg y = 5, \\ \lg x - \lg y = 3. \end{cases}$

Розв'язання. $2\lg x = 8, \lg x = 4, x = 10\,000.$

$\lg y = 1, y = 10.$

2. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$

Розв'язання. Перше рівняння системи рівносильне рівнянню $x^2 + y^2 = 100$, а друге – рівнянню $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, причому $x > 0$ і $y > 0$.

Маємо систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ xy = 48. \end{cases}$

Розв'язуючи її з урахуванням умови $x > 0$, $y > 0$, дістанемо розв'язок $x = 8$, $y = 6$, або $(8;\ 6)$.

3. $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \dfrac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 (1+y)^2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифма, перетворимо рівняння даної системи:

$$\begin{cases} 2\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2(y+1) - 1 = 2, \\ \dfrac{1}{3}\log_2 x \cdot 2\log_2(y+1) = \dfrac{4}{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\log_2 x + \log_2(y+1) = 6, \\ \log_2 x \cdot \log_2(y+1) = 2. \end{cases}$$

Зробимо заміну $\log_2 x = u$, $\log_2(y+1) = v$. Дістанемо систему:

$$\begin{cases} 4u+v=6, \\ uv=2; \end{cases} \quad u=1,\ v=2; \quad \text{або } u=\frac{1}{2},\ v=4; \quad \text{звідси } \log_2 x = \frac{1}{2},$$

$\log_2(y+1) = 4$, або $\log_2 x = 1$, $\log_2(y+1) = 2$. Отже, дістали два розв'язки: $x = 2$, $y = 3$ і $x = \sqrt{2}$, $y = 15$.

4. $\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y} = 0,5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Множина допустимих значень змінних x і y визначається системою нерівностей $x - 2y > 0$, $3x + 2y > 0$.

Запишемо перше рівняння системи у вигляді $(\sqrt{2})^{x-y+6} = (\sqrt{2})^{6-2y}$. Дістанемо рівняння $x - y + 6 = 6 - 2y$. З другого рівняння-системи, записаного у вигляді $\log_3((x-2y)(3x+2y)) = 3$, матимемо рівняння $(x-2y)(3x+2y) = 27$.

Отже, розв'язування вихідної системи звелося до розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} x - y + 6 = 6 - 2y, \\ (x-2y)(3x+2y) = 27, \end{cases}$ яка розглядається на множині допустимих значень змінних, заданих вихідною системою.

З першого рівняння системи знаходимо $y = -x$. Підставляючи це значення у друге рівняння системи, дістанемо $3x^2 = 27$. Звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. З першого рівняння системи знаходимо $y_1 = -3$, $y_2 = 3$.

Даній системі задовольняє лише пара $(3;\ -3)$.

5. $\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \lg_y x = 2. \end{cases}$

Розв'язання. Прологарифмуємо перше рівняння системи за умови $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$.

Маємо:
$$\lg y \lg x = 2. \tag{1}$$

З другого рівняння системи
$$x = y^2. \tag{2}$$

З рівнянь (1) і (2) маємо:

$\lg y \cdot \lg y^2 = 2$. Оскільки $y > 0$, то $2\lg^2 y = 2$, $\lg^2 y = 1$, $\lg y = \pm 1$, $y_1 = 0,1$, $y_2 = 10$, $x_1 = 0,01$, $x_2 = 100$.

Отже, розв'язками системи є $(0,01;\ 0,1)$, $(100;\ 10)$.

6. $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{4}, \\ \log_x y - \log_y x = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Р о з в ' я з а н н я. Перепишемо друге рівняння системи за умови, що $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$ так:

$$\log_x y - \frac{1}{\log_x y} = \frac{3}{2}, \quad \log_x y \neq 0; \quad y \neq 1.$$

$2\log_x^2 y - 3\log_x y - 2 = 0$, звідси $\log_x y = -\dfrac{1}{2}$ і $\log_x y = 2$.

а) У рівнянні $\log_x y = -\dfrac{1}{2}$ змінні x і y можуть бути або $y > 1, 0 < x < 1$, або $0 < y < 1$, $x > 1$. Жодна з областей визначення змінних не задовольняє рівняння $x + y = \dfrac{3}{4}$.

б) $\lg_x y = 2$, $y = x^2$. Розв'яжемо рівняння $x + y = \dfrac{3}{4}$, враховуючи, що $y = x^2$.

Маємо: $x + x^2 = \dfrac{3}{4}$, $4x^2 + 4x - 3 = 0$; $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

$x_1 = -\dfrac{3}{2}$ не задовольняє другого рівняння вихідної системи; $x_2 = \dfrac{1}{2}$, тоді $y_2 = \dfrac{1}{4}$.

Отже, розв'язком системи є $x = \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{4}$.

Логарифмічні нерівності. Під час розв'язування логарифмічних нерівностей виду

$$\log_a f(x) \gtrless \log_a \varphi(x) \qquad (1)$$

насамперед враховують, що областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, тобто вирази, які стоять під знаком логарифма, вважаються додатними.

Якщо $a > 1$, то логарифмічна функція зростає, тому більшому логарифму відповідає і більше значення виразу, що стоїть під знаком логарифма.

Якщо $a < 1$, то більшому логарифму відповідає менше значення виразу, що стоїть під знаком логарифма.

Якщо $a > 1$, то нерівність (1) рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \geqslant \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

якщо $0 < a < 1$, то системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \leqslant \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

П р и к л а д и. Розв'язати логарифмічні нерівності.

1. $\log_2 x < 3$. Маємо: $0 < x < 2^3$, $0 < x < 8$.

2. $\log_3 x > 4$. Маємо: $x > 3^4$, $x > 81$.

3. $\log_{\frac{1}{4}} x < 2$. Маємо: $x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $x > \frac{1}{16}$.

4. $\log_{0,2} x > 5,\ 0 < x < 0,2^5,\ 0 < x < 0,00032$.

5. $\log_{0,5}(2x+3) > 0,\ 0 < 2x + 3 < 1$, звідси $-1,5 < x < -1$.

6. $2 - \log_2(x^2 + 3x) > 0,\ \log_2(x^2 + 3x) < 2$, звідси $x^2+3x > 0$ і $x^2+3x < 4$. Отже, $-4 < x < -3,\ 0 < x < 1$.

7. $\lg(2x^2 + 4x - 5) < \lg(4 + x)$.

Р о з в ' я з а н н я. Враховуючи, що $a = 10 > 1$, маємо:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x - 5 < 4 + x, \\ 2x^2 + 4x - 5 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 3x - 9 < 0, \\ 2x^2 + 4x - 5 > 0; \end{cases}$$

$2x + 3x - 9 = 0,\ x_1 = -3,\ x_2 = 1,5,\ -3 < x < 1,5;$

$2x^2 + 4x - 5 = 0,\ x_1 = -1 - \frac{\sqrt{14}}{2},\ x_2 = -1 + \frac{\sqrt{14}}{2},$

$-\infty < x < -1 - \frac{\sqrt{14}}{2}$ і $-1 + \frac{\sqrt{14}}{2} < x < +\infty.$

Отже, треба розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} -3 < x < 1,5, \\ -\infty < x < -1 - \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ і } -1 + \frac{\sqrt{14}}{2} < x < +\infty. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи, а значить і даної нерівності, є $-3 < x < -1 - \frac{\sqrt{14}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{14}}{2} < x < 1,5$.

8. $\log_5 x + \log_5(x+1) < \log_5(2x+6)$.

Розв'язання. Вирази, що стоять під знаком логарифма у даній нерівності, мають бути додатними. Отже, справджуються нерівності: $x > 0$; $x + 1 > 0$; $2x + 6 > 0$. Запишемо дану нерівність у вигляді

$$\log_5 x(x+1) < \log_5(2x+6).$$

Тут основа $a = 5 > 1$, тому $x(x+1) < 2x + 6$. Розв'язування даної нерівності зводиться до розв'язування системи чотирьох нерівностей:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + 1 > 0, \\ 2x + 6 > 0, \\ x(x+1) < 2x + 6; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \\ x > -3, \\ x^2 - x - 6 < 0; \end{cases}$$

$$\text{або} \begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \\ x > -3, \\ -2 < x < 3. \end{cases}$$

Знаходимо значення x, для яких справджуються чотири нерівності.

Отже, $0 < x < 3$.

9. $\log_{\frac{1}{12}}(x^2 - 8x + 12) > -1$.

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком логарифма, має бути додатним. Тому $x^2 - 8x + 12 > 0$. Запишемо дану нерівність у вигляді: $\log_{\frac{1}{12}}(x^2 - 8x + 12) > \log_{\frac{1}{12}} 12$. Оскільки $a = \frac{1}{12} < 1$, то $x^2 - 8x + 12 < 12$. Залишається розв'язати систему двох нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 12 > 0, \\ x^2 - 8x + 12 < 12; \end{cases} \text{або} \begin{cases} -\infty < x < 2, \ \ 6 < x < \infty, \\ 0 < x < 8. \end{cases}$$

Отже, $0 < x < 2$ і $6 < x < 8$.

10. $\log_3^2 x + 3\log_3 x + 2 < 0$.

Розв'язання. Областю визначення змінної є $x > 0$. Позначивши $y = \log_3 x$, дістанемо: $y^2 + 3y + 2 < 0$. Звідси $-2 < y < -1$, або $-2 < \log_3 x < -1$. Отже, $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що називається логарифмом числа за даною основою?

2. За означенням логарифма вказати, яке з трьох тверджень справедливе: 1) логарифм — степінь; 2) логарифм — показник степеня; 3) логарифм — основа степеня?

3. Дано рівність $27^{\frac{2}{3}} = 9$. Що тут є логарифмом, якого числа і за якою основою?

4. Довести, що $\log_a a = 1$.

5. Подати у показниковій формі логарифмічні рівності: 1) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$.

6. Знаючи $\log_a P = p$ і $\log_a Q = q$, знайти $\log_a \frac{P}{Q}$.

7. Знаючи $\log_a N = n$, знайти $\log_a (N)^5$.

8. Знайти $\log_a (N^{\frac{1}{4}})$, якщо $\log_a N = 4,28$.

9. Знаючи $\log_a C$, знайти $\log_a \sqrt[6]{C}$.

10. Чи правильно, що $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$?

11. Довести, що $\log_a 2 + \log_a 0,5 = 0$.

12. Чи правильно, що $\log_a ab = 1 + \log_a b$?

13. Яку дію треба виконати, щоб з рівності $\log x = \frac{2}{3} \log a$ дістати рівність $x = \sqrt[3]{a^2}$?

14. Назвати дію, обернену до потенціювання.

15. Що таке функція, обернена до даної функції f?

16. Як дістати функцію, обернену до даної?

17. Вказати особливості розміщення графіків двох взаємно обернених функцій.

18. Якщо графіки двох функцій симетричні один одному відносно бісектриси I і III координатних кутів, то чи означає це, що функції взаємно обернені?

19. Як називається функція, обернена до показникової?

20. Яка показникова функція є оберненою до логарифмічної функції $y = \log_a x$?

21. Дано експоненту — графік показникової функції $y = a^x$. Як побудувати графік оберненої до неї логарифмічної функції $y = \log_a x$?

22. Чому функція $y = \log_a x$ $(a > 1)$ існує лише в області додатних чисел?

23. Чому дорівнює $\log_3(-27)$?

24. Чи може логарифм додатного числа за основою $a > 1$ бути від'ємним?

25. Вказати будь-яке число, логарифм якого за основою $a = 9$ більший від $\log_a 15$.

26. Які рівняння називають логарифмічними?

27. Якщо внаслідок певних перетворень рівняння область визначення змінної звузилася, то що сталося з коренями рівняння?

28. Яка причина появи сторонніх коренів під час розв'язування логарифмічних рівнянь?

29. Які способи розв'язування логарифмічних рівнянь вам відомі?

30. У чому полягає прийом потенціювання під час розв'язування логарифмічних рівнянь?

31. Які рівняння називають показниково-логарифмічними?

32. Які способи розв'язування систем логарифмічних рівнянь ви знаєте?

33. Які властивості логарифмічної функції використовують під час розв'язування нерівностей виду $\log_a f(x) \leqslant \leqslant \log_a \varphi(x)$?

34. Якій системі нерівностей рівносильна нерівність $\log_a f(x) \leqslant \log_a \varphi(x)$ при: 1) $a > 1$, 2) $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

А

1. Перевірити правильність рівностей: 1) $\log_4 16 = 2$; 2) $\log_5 125 = 3$; 3) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$; 4) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$; 5) $\lg 1 = 0$; 6) $\lg 100 = 2$.

2. Використовуючи знак логарифма, записати показник степеня з рівностей:

1) $3^4 = 81$; 2) $4^{-2} = \frac{1}{16}$; 3) $8^{\frac{1}{3}} = 2$; 4) $\sqrt[3]{27} = 3$.

3. Знайти логарифми чисел: 1) 8; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $0,5$; 5) 512; 6) $\frac{1}{128}$ за основою 2.

4. Знайти: 1) $\log_3 \frac{1}{9}$; 2) $\log_4 64$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$; 4) $\log_{\sqrt{2}} 8$.

5. Знайдіть число x, якщо: 1) $\log_5 x = 2$; 2) $\log_8 x = 3$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$; 4) $\log_{13} x = 0$; 5) $\log_4 x = 1,5$; 6) $\lg x = -3$.

6. Чи мають смисл вирази: 1) $\log_4(-64)$; 2) $\log_5 0$; 3) $\log_2(-4)^3$.

Б

7. Записати у логарифмічному вигляді рівності: 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = 2,25$; 2) $0,1^2 = 0,01$; 3) $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$; 4) $\sqrt[3]{343} = 7$.

8. Знайти логарифми чисел: 1) 3; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 81; 4) 1; 5) $\frac{1}{243}$; 6) $\sqrt{3}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) $\frac{1}{9\sqrt{3}}$ за основою 3.

9. Знайти x, якщо: 1) $\log_{3\sqrt{3}} x = -\frac{2}{3}$; 2) $\log_x \frac{1}{81} = 4$; 3) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x = 1$.

10. Чи мають смисл вирази: 1) $\log_6(-6)^2$; 2) $-\log_8 16$?

11. Обчислити: 1) $5\log_5 25 - 4\log_4 16$; 2) $\log_2 \log_2 16$.

12. Знаючи, що $a^2 = b$, знайти $\log_a b$.

В

13. Знайти логарифми чисел: 1) $\log_{0,2} 25$; 2) $\log_5 0,04$; 3) $\log_2 4\sqrt{2}$; 4) $\log_{2,5} 0,16$; 5) $\log_a a$; 6) $\log_a 1$; 7) $\log_a \sqrt{a}$; 8) $\log_a \sqrt[5]{a^3}$.

14. Знайти основи логарифмів: 1) $\log_x 3 = 0,25$; 2) $\log_x 125 = -\frac{3}{2}$; 3) $\log_x 0,64 = -2$; 4) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{4}$; 5) $\log_x(a^2 + 2a + 1) = 2$; 6) $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$.

15. Знайти x з рівностей: 1) $\log_3 x = -1$; 2) $\log_4 x = 2,5$; 3) $\log_5 x = 0$; 4) $\log_{49} x = -1,5$; 5) $\log_{\frac{1}{6}} x = 3$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

16. Обчислити: 1) $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\lg\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$.

17. Розв'язати рівняння: 1) $\log_2 x = 3$; 2) $\log_{0,7} x = -1$; 3) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; 4) $\log_5(3 - x) = 0$; 5) $\log_{0,4}(6 - 7x) = 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}}(5x - 7) = -3$.

Знайти значення виразів:

А

18. 1) $2^{\log_2 10}$; 2) $5^{\log_5 7}$; 3) $1,3^{\log_{1,3} 5}$; 4) $1 + 7^{\log_7 2}$; 5) $4^{-\log_4 7}$; 6) $4^{3\log_4 2}$.

Б

19. 1) $1,7^{\log_{1,7} 5}$; 2) $\pi^{\log_\pi 7,4}$; 3) $5^{\log_5 10 - 1}$; 4) $2^{3\log_2 4}$; 5) $2,4^{\log_{2,4} 10 + 1}$; 6) $10^{-\lg 0,8}$

В

20. 1) $10^{\lg 0,3}$; 2) $10^{2\lg 3}$; 3) $10^{\lg 3 - \lg 2}$; 4) $81^{0,5\log_9 7}$.

21. Порівняти за величиною: 1) $3^{\log_3 4}$ і $5^{\log_4 4}$; 2) $4^{\log_5 7}$ і $7^{\log_5 4}$; 3) $3^{\log_2 5}$ і $5^{\log_2 3}$.

22. Обчислити: 1) $2^{\log_2 5 + \log_2 4}$; 2) $4 \cdot 5^{1 - \log_5 25}$.

23. Довести тотожність $m^{\log_m N} = n^{\log_n N}$.

Прологарифмувати вирази:

А

24. 1) $y = \frac{ab^3}{c^2}$; 2) $z = \frac{\sqrt[5]{a}}{bc^2}$; 3) $y = a^2\sqrt[3]{b}$; 4) $x = \frac{a^3\sqrt{bc}}{(a+b)^2}$.

Б

25. 1) $x = \frac{a^2\sqrt{bc}}{3\sqrt[5]{(a+b)^3}}$; 2) $y = \frac{2\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{b}}$; 3) $x = 0,6^{\sqrt[3]{1,2}}$; 4) $z = \sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{b^2}$.

В

26. 1) $x = 3a\sqrt[5]{a^3(a+b)^2}$; 2) $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}}\sqrt{\frac{a}{b}}}$;

3) $x = \left(\sqrt[4]{a^3b}\right)^2$; 4) $x = \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{a^5}}\right)^{-0,2}$; 5) $x = \frac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}$.

Знайти значення виразів:

А

27. 1) $\log_{12} 5 + \log_{12} 4$; 2) $\log_5 15 - \log_5 3$.

Б

28. $\frac{\lg 64 - \lg 4}{\lg 48 - \lg 12}$.

В

29. 1) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$; 2) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$.

30. Що більше: 1) $\log_2 9 + \log_2 7$ чи $\log_2(9+7)$;

2) $\log_{0,6} 1,3 + \log_{0,6} 1,2$ чи $\log_{0,6}(1,3+1,2)$?

Пропотенціювати вирази:

А

31. 1) $\lg x = \lg 7 + 3\lg a - \lg 5$;

2) $\log_3 y = \log_3 1,5 + \log_3 8$;

3) $\lg y = \frac{1}{2}\lg(a+b) - 2\lg a - 3\lg b$;

4) $\lg z = \lg 2 - \lg 3 + \lg(a+b) - \lg a$.

Б

32. 1) $\lg x = \frac{1}{2}\lg(a-b) - \frac{2}{3}\lg(a+b) - \frac{2}{3}\lg a$;

2) $\lg y = \lg 2 + \lg a + 3\lg b - \lg 3 - \frac{1}{4}\lg(b-a)$.

В

33. 1) $\lg x = \frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)+\frac{1}{3}\lg(a+b)-\lg(a-b)$;
2) $\lg x = -\frac{1}{2}\lg a+\frac{1}{4}\left(\lg b-\frac{2}{3}\lg a+\frac{2}{3}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a-b)\right)$.

34. Знайти x, якщо: 1) $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$; 2) $\log_\pi x = 3\log_\pi 4 - 2\log_\pi 6$.

35. Обчислити, не користуючись допоміжними засобами: 1) $\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 6,25$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7\frac{58}{81}$.

36. Обчислити значення: 1) e^2; 2) $\frac{1}{e}$; 3) $\sqrt{e}$; 4) e^3; 5) $\ln e^3$; 6) $\ln 20$; 7) $\ln 3$; 8) $\ln 7,5$; 9) $\ln 1,21$.

А

37. Який висновок можна зробити щодо додатних чисел m і n, якщо: 1) $\log_5 m < \log_5 n$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} m > \log_{\frac{1}{2}} n$; 3) $\log_{0,1} m < \log_{0,1} n$?

38. Який висновок можна зробити щодо числа $m > 0$, якщо: 1) $\log_2 m = -0,32$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} m = \frac{5}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} m = -3\frac{2}{5}$?

39. Який висновок можна зробити щодо основи логарифма a, якщо:

1) $\log_a 7 = 0,4$; 2) $\log_a 5 = -\frac{1}{4}$;

3) $\log_a 4 < \log_a 2$; 4) $\log_a \frac{2}{5} > \log_a \frac{2}{3}$?

Б

40. За властивостями логарифмічної функції визначити, що більше:

1) $\log_2 5$ чи $\log_2 8$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 6$ чи $\log_{\frac{1}{3}} 8$;

3) $\log_7 8$ чи $\log_5 8$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} 11$ чи $\log_{\frac{1}{3}} 11$?

41. Для яких значень x правильні такі рівності:

1) $\lg(x^2+5x-14) = \lg(x+7)+\lg(x-2)$;

2) $\lg(x^2-10x+25) = 2\lg(5-x)$.

42. Визначити знак добутку:

$\log_3 0,97 \cdot \log_2 0,98 \cdot \log_4 6,99$.

В

43. Довести, що $\log_3 0,71 \cdot \log_2 \dfrac{4}{11} \cdot \log_{\sqrt{5}} 0,95 < 0$.

44. Яким співвідношенням пов'язані числа M і N, коли відомо, що $\lg M = 1,4153$, а $\lg N = 3,4153$?

Знайти області визначення функцій:

А

45. 1) $y = \log_2(2 + x)$; 2) $y = \log_3(x^2 + 3)$;
3) $\log_5(4 - x^2)$; 4) $y = \log_4(x^2 + x + 1)$;
5) $y = \log_2 \dfrac{5x - 2}{3 - x}$.

Б

46. 1) $\log_{0,1}(x^2 - 4)$; 2) $\log_{\sqrt{10}}(6 + x - x^2)$;
3) $\log_8 \dfrac{2 - x}{x + 1}$; 4) $\log_{0,9} \dfrac{2 + 3x}{5 - 2x}$.

В

47. 1) $y = \log_3(3x^2 - 7x - 40)$; 2) $y = \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x - 3)$; 3) $y = \log_7 \dfrac{2x + 5}{x - 1}$; 4) $y = \log_{3,1} \dfrac{7 - 2x}{2 - 3x}$; 5) $y = \log_2 |x|$; 6) $y = \log_{0,5} |x|$.

48. Для функцій, розглядуваних у зазначених проміжках, дати відповідь на запитання: 1) при яких значеннях x $y < 0$, $y = 0$, $y > 0$? 2) Від якого найменшого (найбільшого) і до якого найбільшого (найменшого) значення змінюється y?

1) $y = \log_3(x - 1)$, якщо $\dfrac{10}{9} \leqslant x \leqslant 10$;
2) $y = \log_{0,5}(x + 1)$, якщо $-0,75 \leqslant x \leqslant 7$;
3) $y = \log_4(x - 2)$, якщо $0,25 \leqslant x \leqslant 64$;
4) $y = 3 - \log_5 x$, якщо $0 < x \leqslant 625$.

Зобразити схематично графіки функцій:

А

49. 1) $\log_2 x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x$.

Б

50. 1) $y = \log_3 x$; 2) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;
3) $y = \log_{0,3} x$; 4) $y = \log_{\sqrt{0,7}} x$.

В

51. 1) $y = \ln x$; 2) $y = \ln \frac{1}{x}$; 3) $y = \ln(-x)$; 4) $y = \ln |x|$.

Розв'язати рівняння:

А

52. 1) $\log_2(5 - x) = 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(5x - 7) = -3$;
3) $\log_{0,3}(5 + 2x) = 1$; 4) $\lg(x - 1) = \lg(5x - 3)$;
5) $\log_3(x^2 - x + 1) = 0$; 6) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2$;
7) $\log_a x = \log_a 3 + \log_a 5$; 8) $\log_5^2 x = 3 \log_5 x$;
9) $\lg^2 x - 5 \lg x + 6 = 0$; 10) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;
11) $x^{\lg x} = 10\,000$; 12) $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{1 + \lg x}$;
13) $\lg \lg \lg x = 0$; 14) $x^{\lg x + 2} = 1000$.

Б

53. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 4) = -2$; 2) $\dfrac{\lg 2x}{\lg(4x - 15)} = 2$;
3) $\log_2(x + 3) = 3 - x$; 4) $\log_x 3 - \log_x 2 = \frac{1}{2}$;
5) $\log_a x = \log_a 12 - 2 \log_a 2$;
6) $\lg(x + 6) - \frac{1}{2} \lg(2x - 3) = 2 - \lg 25$;
7) $\lg^4 x - 10 \lg^2 x + 9 = 0$; 8) $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$;
9) $\log_\pi(x^2 + 2x + 3) = \log_\pi 6$;
10) $2 \log_6(2 + x) + \log_6(9 - 6x + x^2) = 2$;
11) $\frac{1}{2} \lg(x - 9) + \lg \sqrt{2x - 1} = 1$;
12) $\log_3 4 + \log_3 x = \log_3(x - 6) - \log_3(3 - x)$;
13) $x^{\lg x - 3} = 0,01$; 14) $3^{2 - \log_3 x} = 81x$;
15) $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$; 16) $100^{\lg(x+20)} = 10\,000$.

54. 1) $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$;

2) $\lg(x^2+75)=2+\lg(x-4)$;

3) $\dfrac{1}{\lg x-6}+\dfrac{5}{\lg x+2}=1$;

4) $\dfrac{1}{2}\lg(5x-4)+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0,18$;

5) $\dfrac{\lg(10x-19)}{2\lg(2x-3)}=1$;

6) $\dfrac{\lg(x+5)}{2}+\lg\sqrt{x-3}=\dfrac{1}{2}\lg(2x+1)$;

7) $\dfrac{\log_2 x}{\log_2\dfrac{x}{2}}-2\log_2\sqrt{x}+\log_2 2x=3$;

8) $\log_2^2 x-9\log_8 x=4$;

9) $\log_2 x+\dfrac{4}{\log_x 2}=5$;

10) $\log_2^2(x+1)-\log_{\frac{1}{4}}(x+1)=5$;

11) $81^{2-\log_{\sqrt{3}} x}-1=0$;

12) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$;

13) $x^{\log_a x}=a^2x\,(a>0,\ a\neq 1)$;

14) $x^{2(\lg x)^3-\frac{3}{2}\lg x}=\sqrt{10}$;

15) $\lg(5-x)-\dfrac{1}{3}\lg(35-x^3)=0$;

16) $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$;

17) $\lg^3 x-\lg^2 x-6\lg x=0$;

18) $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$;

19) $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2-0,5=0$;

20) $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2-25) = 0;$

21) $\log_{x+1}(x-0,5) = \log_{x-0,5}(x+1);$

22) $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1) = 3.$

Розв'язати системи рівнянь:

А

55. 1) $\begin{cases} x-y=90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x+3^y=12, \\ \log_3 27 = x+y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_9 729 = x+y, \\ 3^{x-y-1}=1. \end{cases}$

Б

56. 1) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2, \\ \log_{48} x + \log_{48} y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x+y-20=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2-2y^2=8. \end{cases}$

В

57. 1) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2, \\ \log_5(x-y)=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=50, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-\log_3 x = 1, \\ x^y=3^{12}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2-y=20; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2,5, \\ xy=27; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x = \log_4 y + \log_4(4-x), \\ \log_3(x+y) = \log_3 x - \log_3 y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_x(3x+2y) = 2, \\ \log_y(2x+3y) = 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1 + \lg 13, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = 3\lg 2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x+1}(y+23) = 3. \end{cases}$

Розв'язати нерівності:

А

58. 1) $\log_3 x < 4$; 2) $\log_5 x > 2$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x < 3$; 4) $\log_{0,3} x > 3$;
5) $\lg x < \lg 3$; 6) $\lg x > \frac{1}{3}$;
7) $\lg x > \lg 5$; 8) $\lg x > -3$;
9) $\log_2(x^2-x-4) < 3$; 10) $\log_3(12-2x-x^2) > 2$;
11) $\lg x + \lg(x-3) < 1$; 12) $\lg(2x+3) < \lg(x-1)$.

Б

59. 1) $\log_x 0,2 > \log_x 3$; 2) $2\lg x > \lg(4x+21)$;
3) $\log_2 8^{2n-1} > 3n+6$; 4) $\log_{0,5} 16^{2x-3} > x-24$;
5) $\log_8(5x-8) < \log_8(2x+7)$;
6) $\log_{0,3}(x^2+1) < \log_{0,3} 2x$;
7) $\log_{3x+2} x < 1$; 8) $\log_{x-1}(5x+3) > 1$;
9) $\log_2^2 x - \log_2 x \leqslant 6$; 10) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$;
11) $2\log_2(x+1) - \log_2(2x-4) > 0$;
12) $\log_4 \log_2 \log_3 x \leqslant 0,5$.

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

6) $\begin{cases} \log_2 x = \log_4 y + \log_4(4-x), \\ \log_3(x+y) = \log_3 x - \log_3 y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_x(3x+2y) = 2, \\ \log_y(2x+3y) = 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1 + \lg 13, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = 3\lg 2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1 + \lg 8, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \log_x y = 2, \\ \log_{x+1}(y+23) = 3. \end{cases}$

Розв'язати нерівності:

А

58. 1) $\log_3 x < 4$; 2) $\log_5 x > 2$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x < 3$; 4) $\log_{0,3} x > 3$;
5) $\lg x < \lg 3$; 6) $\lg x > \frac{1}{3}$;
7) $\lg x > \lg 5$; 8) $\lg x > -3$;
9) $\log_2(x^2-x-4) < 3$; 10) $\log_3(12-2x-x^2) > 2$;
11) $\lg x + \lg(x-3) < 1$; 12) $\lg(2x+3) < \lg(x-1)$.

Б

59. 1) $\log_x 0,2 > \log_x 3$; 2) $2\lg x > \lg(4x+21)$;
3) $\log_2 8^{2n-1} > 3n+6$; 4) $\log_{0,5} 16^{2x-3} > x-24$;
5) $\log_8(5x-8) < \log_8(2x+7)$;
6) $\log_{0,3}(x^2+1) < \log_{0,3} 2x$;
7) $\log_{3x+2} x < 1$; 8) $\log_{x-1}(5x+3) > 1$;
9) $\log_2^2 x - \log_2 x \leqslant 6$; 10) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$;
11) $2\log_2(x+1) - \log_2(2x-4) > 0$;
12) $\log_4 \log_2 \log_3 x \leqslant 0,5$.

B

60. 1) $\log_3 x < 3 - \log_3(12 - x)$;

2) $\log_2 0,25^{3-x} > 2 - x^2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}(4 - x) - 1$;

4) $\log_2(x^2 - 9x + 8) < 3$;

5) $\log_2 x > \log_4(x - 1)$;

6) $\log_{x^2+4}(2x^2 - 5) < 1$;

7) $\lg(x^2 - x + 8) \geqslant 1$;

8) $\log_\pi(x + 1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$;

9) $\log_{0,5} \dfrac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leqslant -1$;

10) $\log_3 \log_{0,5} \log_{\frac{1}{3}} x > 1$;

11) $\log_x(x + 2) > 2$;

12) $\log_{x+1}(x + 3) > 1$;

13) $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3) < 0$;

14) $\log_x(x^2 - 2x - 3) > 0$;

15) $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 3}{2\lg x - 1} > 1$;

16) $\dfrac{\log_2(x + 1)(x - 3)}{\log_2(x - 3)} < 0$.

ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

§ 1. Модуль дійсного числа та його властивості

Під час вивчення теорії границь доводиться користуватися модулем дійсного числа. З цим поняттям ви вже зустрічалися в шкільному курсі алгебри. Тут це питання розглядаємо більш ґрунтовно.

Означення. *Модулем дійсного числа a називається число a, якщо $a \geqslant 0$, і протилежне йому число $-a$, якщо $a < 0$.*

Модуль числа a позначається символом $|a|$ і читається «модуль числа a». Отже, за означенням:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Таким чином, щоб знайти $|a|$, слід спочатку встановити знак числа a, після чого за формулою (1) визначити $|a|$.

Приклади. $|1| = 1$; $|-1| = -(-1) = 1$; $|0| = 0$; $|\pi - 3,14| = \pi - 3,14$; $|3,14 - \pi| = -(3,14 - \pi) = \pi - 3,14$.

З геометричної точки зору, модуль числа a означає відстань точки числової осі з абсцисою a до точки відліку 0. Справді, якщо $a > 0$, то відповідна точка A числової осі лежить справа від точки 0 на відстані $a = |a|$. Якщо $a < 0$, то точка A міститься на числовій осі зліва від точки 0 на відстані $-a = |a|$.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що $|b-a|$ виражає відстань між точками B і A числової осі, абсциси яких дорівнюють відповідно b і a.

На основі геометричного змісту модуля дійсного числа можна довести такі властивості.

1. $|a| = |-a|$.

2. Якщо $|a| \leqslant b$, то $-b \leqslant a \leqslant b$.

3. Якщо $|a| \geqslant b$, то або $a \geqslant b$, або $a \leqslant -b$.

Так, наприклад, нерівність $|a| \leqslant b$ означає, що точка A з абсцисою a міститься від точки відліку 0 на відстані, яка не більша від b, тобто це ті точки числової осі, абсциси яких задовольняють нерівність $-b \leqslant a \leqslant b$.

Приклади.

1. Розв'язати нерівність $|x| \leqslant 5$.
Використовуючи властивість 2, маємо $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

2. Розв'язати нерівність $|x - 3| < 4$.
На основі властивості 2 дістанемо $-4 < x - 3 < 4$, або $-1 < x < 7$.

3. Розв'язати рівняння $|x| = 5$.
За властивістю 1 знаходимо $x = \pm 5$.

4. Розв'язати нерівність $|x| > 5$.
На основі властивості 3 робимо висновок: або $x > 5$, або $x < -5$.

Зауважимо, що для властивостей 2 і 3 мають місце обернені твердження, а саме:

2°. Якщо $-b \leqslant a \leqslant b$, то $|a| \leqslant b$.

3°. Якщо $a \geqslant b$ або $a \leqslant -b$, то $|a| \geqslant b$.

Доведемо твердження 2°. Оскільки $a \leqslant b$ і $a \geqslant -b$, то з нерівності $a \geqslant -b$ випливає, що $-a \leqslant b$. Але в нерівностях $a \leqslant b$, $-a \leqslant b$ хоча б одне з чисел a, $-a$ збігається з $|a|$.

Розглянемо кілька теорем, які виражають властивості модуля дійсного числа.

Теорема 1. Модуль суми скінченного числа дійсних чисел $a_1, \dots, a_n$ не перевищує суми модулів цих чисел:

$$|a_1 + \dots + a_n| \leqslant |a_1| + \dots + |a_n|.$$

Доведення. Доведемо цю теорему для випадку суми двох чисел. Оскільки модуль дійсного числа є число невід'ємне, то справджуються нерівності:

$$-|a_1| \leqslant a_1 \leqslant |a_1|,$$
$$-|a_2| \leqslant a_2 \leqslant |a_2|.$$

Додаючи почленно ці нерівності, дістанемо:

$$-(|a_1| + |a_2|) \leqslant a_1 + a_2 \leqslant (|a_1| + |a_2|).$$

Звідси, використовуючи властивість 2°, маємо:

$$|a_1 + a_2| \leqslant |a_1| + |a_2|.$$

Застосувавши метод математичної індукції, можна довести теорему 1 і для випадку $n \geqslant 3$ доданків. Зокрема, для $n = 3$ матимемо:

$$|a_1 + a_2 + a_3| \leqslant |a_1| + |a_2 + a_3| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3|.$$

Теорема 2. Модуль різниці не менший за різницю модулів зменшуваного і від'ємника, тобто

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

Д о в е д е н н я. Запишемо число a так:

$$a = b + (a - b).$$

Тоді, на основі теореми 1,

$$|a| \leqslant |b| + |a - b|,$$

звідки дістанемо доводжувану нерівність.

Теорема 3. Модуль добутку скінченного числа співмножників $a_1, \dots, a_n$ дорівнює добутку модулів цих співмножників

$$|a_1 \cdots a_n| = |a_1| \cdots |a_n|.$$

Д о в е д е н н я. Для простоти припустимо, що $n = 2$. Тоді:

1) якщо $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, то $a_1a_2 \geqslant 0$. Отже,

$$|a_1a_2| = |a_1||a_2|;$$

2) якщо $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, то $a_1a_2 < 0$. Отже,

$$|a_1a_2| = -a_1a_2.$$

Крім того, $|a_1||a_2| = -a_1a_2$. Тому

$$|a_1a_2| = |a_1||a_2|;$$

3) якщо $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, то $a_1a_2 > 0$ і $|a_1a_2| = a_1a_2$. З іншого боку, $|a_1||a_2| = (-a_1)(-a_2) = a_1a_2 = |a_1a_2|$.

Випадок $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ досліджується аналогічно.

Всі випадки вичерпано. Отже, теорему 3 для двох співмножників доведено. Загальний випадок цієї теореми доводиться методом математичної індукції.

Теорема 4. Модуль частки дорівнює частці від ділення модуля діленого на модуль дільника

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},$$

якщо $b \neq 0$.

Доведення. Зобразимо число a так: $a = \frac{a}{b} \cdot b$. Тоді, за попередньою теоремою,

$$|a| = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot |b|,$$

звідки дістанемо доводжувану рівність.

Приклади.

1. Довести, що $\sqrt{a^2} = |a|$.

Розв'язання. Корінь парного степеня з додатного числа, як відомо, має два дійсних значення: одне з цих значень додатне, друге — від'ємне (протилежне першому значенню). Невід'ємне значення кореня парного степеня називається його **арифметичним** значенням.

У математиці під коренем парного степеня на множині дійсних чисел завжди розуміють арифметичне значення цього кореня. Тому, якщо $a \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2} = a$. Якщо $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$. Тобто

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{якщо} \quad a < 0. \end{cases}$$

Права частина останньої рівності дорівнює $|a|$, тому $\sqrt{a^2} = |a|$.

2. Розв'язати нерівність $x^2 - 4 \leqslant 0$.

Розв'язання. Дану нерівність можна записати так: $x^2 \leqslant 4$. Добуваючи корінь квадратний з обох частин цієї нерівності, маємо: $|x| \leqslant 2$, або $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

3. Розв'язати нерівність $x^2 < 4x + 12$.

Розв'язання. Дану нерівність можна записати так: $x^2 - 4x - 12 < 0$. Тоді, виділивши квадрат двочлена у лівій частині цієї нерівності, матимемо: $(x-2)^2 < 16$. Добуваючи корінь квадратний з обох частин нерівності, дістанемо $|x - 2| < 4$, або $-4 < x - 2 < 4$, звідки $-2 < x < 6$.

4. Розв'язати нерівність $|x^2 - x - 2| > x^2 - x - 2$.

Розв'язання. Якщо $|a| > a$, то $a < 0$. Отже, задану нерівність задовольнятимуть усі ті значення x, які будуть задовольняти нерівність $x^2 - x - 2 < 0$, або $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$. Тоді $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}$, звідки $-\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$; $-1 < x < 2$.

5. Знайти дійсні корені рівняння $|\sin x| = \sin x + 3$.

Розв'язання. 1) Нехай $\sin x \geqslant 0$. Тоді $|\sin x| = \sin x$, і дане рівняння запишеться так: $\sin x = \sin x + 3$, звідки $3 = 0$. Прийшли до суперечності.

2) Нехай $\sin x < 0$. Тоді $|\sin x| = -\sin x$, отже, задане рівняння набирає вигляду $-\sin x = \sin x + 3$, або $\sin x = -\frac{3}{2} < -1$.

Оскільки синус не може набувати значень, менших за -1, то прийшли до суперечності.

Таким чином задане рівняння дійсних коренів не має. Множиною дійсних коренів цього рівняння є порожня множина.

6. Довести нерівність $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$, де a і b — довільні дійсні числа.

Розв'язання. Згідно з теоремою 2, справджуються нерівності $|a - b| \geqslant |a| - |b|$ і $|b - a| \geqslant |b| - |a|$.
Ці дві нерівності можна записати у вигляді

$$-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b|,$$

або $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

§ 2. Границя числової послідовності

1. Поняття про границю числової послідовності. У курсі «Алгебра і початки аналізу» вивчають досить важливі властивості функцій, які не можна дослідити елементарними способами. В основі методів, за допомогою яких удається дослідити ці нові властивості, лежить поняття границі функції, одне із фундаментальних понять математики. Існує окрема дисципліна, яка називається «Математичний аналіз». У ній досить ґрунтовно вивчається теорія границь. У цьому розділі ми розглянемо лише окремі питання цієї теорії, які будуть необхідні нам у подальшому.

Слушно зауважити, що з поняттям границі ви зустрічалися в 9-му класі під час вивчення таких понять, як довжина кола, площа круга, сума нескінченної геометричної прогресії, миттєва швидкість, хоч там сам термін «границя» ще не використовувався.

З'ясуємо поняття границі на простішому випадку функціональної залежності, коли областю визначення функції $y = f(x)$ є множина натурального ряду чисел N. Таку функцію називають числовою послідовністю і позначають $y_n = f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Числову послідовність ще записують у вигляді ряду чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, в якому y_1 називають першим членом послідовності, y_2 — другим і т. д., y_n — n-м, або загальним членом послідовності. Числову послідовність вважають заданою, якщо задано її загальний член.

Для числових послідовностей застосовують ще і таке позначення: (y_n) або (a_n), де y_n, a_n — n-ні члени послідовностей.

Прикладами числових послідовностей є арифметична і геометрична прогресії. Тут загальні члени задають такими формулами: $y_n = y_1 + d(n-1)$, $y_n = y_1 q^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, де d — різниця арифметичної прогресії; q — знаменник геометричної прогресії.

Розглянемо ще приклади числових послідовностей.

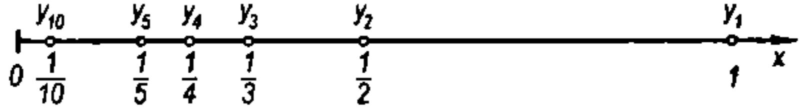
Приклад 1. Нехай загальний член послідовності задано формулою $y_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.
Тоді, надаючи n значення $1, 2, \ldots$, дістанемо числову послідовність

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots. \tag{1}$$

Помічаємо, що члени даної послідовності із збільшенням числа n спадають: кожний наступний член менший за попередній, тобто для всіх $n = 1, 2, \ldots$ справджується нерівність $y_{n+1} < y_n$.

Із збільшенням числа n відповідні члени послідовності, залишаючись додатними числами, стають ближчими до числа нуль. Так, другий член послідовності (1) міститься ближче до нуля, ніж перший член цієї ж послідовності, третій член послідовності знаходиться ближче до нуля ніж другий, і т. д., $(n + 1)$-й член — ближче до нуля, ніж n-й член (мал. 104, a).

Що означають слова: «члени послідовності зі збільшенням числа n стають все ближчими і ближчими до числа нуль»? Це означає, що зі збільшенням числа n відстань між відповідними членами послідовності і числом нуль стає все меншою і меншою. Оскільки відстань між двома дійсними числами a і b, або, що те саме, між двома точками a і b числової осі дорівнює додатному числу $|a - b|$, то в даному разі модуль різниці $|y_n - 0| = \frac{1}{n}$ при зростанні n стає все меншим і меншим. Зокрема, цей модуль може бути меншим, наприклад, за числа 0,1; 0,01; 0,001 і т. д. Для цього в послідовності (1) досить взяти відповідно члени з номерами, більшими за 10, 100, 1000 і т. д.



Мал. 104, а

А якщо взяти, наприклад, довільне додатне число ε, то чи знайдеться в послідовності (1) її член (його номер N) такий, щоб для всіх наступних членів цієї послідовності справджувалася нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$?

Таблиця 11

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
N	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

Відповідь стверджувальна. Для цього досить брати члени послідовності y_n, у яких номер n задовольняє нерівність $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Позначимо через y_n такий член в послідовності (1), що ри $n > N$ справджується нерівність $|y_n - 0| < \varepsilon$.

Зрозуміло, що для кожного окремого значення числа ε зснує своє натуральне число N. У таблиці 11 для різних начень ε наведено відповідні значення N.

П р и к л а д 2. Розглянемо послідовність, загальний илен якої заданий формулою $y_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Дістанемо таку числову послідовність;

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots . \tag{2}$$

У послідовності (2) члени із зростанням числа n спадають і наближаються до числа нуль. І чим більше число n, чим відповідний член послідовності міститиметься ближче до нуля. Іншими словами, відстань $|y_n - 0|$ при зростанні з стає як завгодно малою, тобто у послідовності (2) знайдеться член y_N такий, що для всіх $n > N$ буде справджуватися нерівність

$$|y_n - 0| < \varepsilon, \tag{3}$$

це ε — довільне додатне число. Надаючи ε довільних додатних значень, щоразу матимемо шукане число N.

Щоб знайти N для будь-якого наперед заданого додатного числа ε, підставимо в нерівність (3) значення y_n, і розв'яжемо здобуту нерівність відносно n. Дістанемо:

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon, \quad \frac{1}{n^2} < \varepsilon. \tag{4}$$

Звідси $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Отже, нерівність (3) буде справджуватися для всіх значень n, які задовольняють нерівність (4). Тому за число N можна взяти число $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, якщо воно ціле, або найбільшу цілу частину цього числа, якщо це число є дробовим. Проілюструємо сказане за допомогою таблиці 12.

Таблиця 12

ε	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$
N	2	3	4	5	10	31	100

П р и к л а д 3. Нехай у числовій послідовності загальний член y_n задається формулою

$$y_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Тоді маємо числову послідовність

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots . \tag{6}$$

Помічаємо, що із зростанням числа n члени послідовності (6) зростають і наближаються до числа 1, залишаючись меншими від 1. І чим більше число n, тим ближче до 1 відповідний член послідовності (6).

Розглянемо задачу: чи існує таке натуральне число N, щоб при $n > N$ члени послідовності (6) задовольняли нерівність

$$|y_n - 1| < \varepsilon, \tag{7}$$

де ε — будь-яке додатне число? Щоб відповісти на це запитання, слід розв'язати нерівність (7) відносно n. Для цього у ліву частину цієї нерівності підставимо значення y_n із (5) і зробимо певні перетворення.

Маємо:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon.$$

Звідси $n > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Якщо $0 < \varepsilon < 1$, то $N = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, коли число $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ ціле, і N дорівнює найбільшій цілій частині числа $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, коли воно є дробове число. Якщо $\varepsilon \geqslant 1$, ціла частина числа $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ менша або дорівнює нулю. Тому за число N можна взяти будь-яке натуральне число, зокрема числа $1, 2, \ldots$.

Для позначення найбільшої цілої частини числа m вводять спеціальний символ $E(m)$ (E — перша буква від французького слова *entier*, що означає «цілий»).

Так, наприклад, $E(0) = 0$, $E(1) = 1$, $E(0,5) = 0$, $E(3,2) = 3$, $E(-1,1) = -2$, $E(\sqrt{1000}) = 31$.

У цьому прикладі число N можна було знайти простіше, використовуючи так званий прийом «підсилення нерівності». Ідея полягає в тому, що коли $5 < 12$, то й поготів $3 < 12$.

Оскільки для всіх $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

то, розв'язуючи нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$, в якій ліва частина більша, ніж $\frac{1}{n+1}$, дістанемо $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Візьмемо $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Якщо $n > N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, то справджується нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$, а отже, й нерівність $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, тобто $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Тоді для числа N у першому і другому прикладах маємо такі формули:

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad N = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Дамо означення границі числової послідовності. *Число a називається границею послідовності y_1, y_2, y_3, $\ldots, y_n, \ldots$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ справджується нерівність*

$$|y_n - a| < \varepsilon. \tag{8}$$

Символічно це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a, \text{ або } y_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Ми будемо користуватися першим позначенням (lim — від латинського слова «*limes*», що означає «границя»).

Отже, у розглянутих прикладах границі послідовностей (1), (2), (6) відповідно дорівнюють 0; 0; 1.

Розглянемо ще приклади.

П р и к л а д 1. Показати, що границя функції $y_n = \frac{3n+1}{2n-1}$, або, що те саме, послідовності $\frac{4}{1}, \frac{7}{3}, \ldots, \ldots, \frac{3n+1}{2n-1}, \ldots$, дорівнює $\frac{3}{2}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Згідно з означенням границі, слід показати, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ справджується нерівність

$$\left|y_n - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

Справді, підставляючи у дану нерівність значення y_n, дістанемо:

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon, \text{ або } \left|\frac{1}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon.$$

Звідси $\dfrac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon.$

Розв'язавши здобуту нерівність відносно n, знаходимо $n > \dfrac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}.$

Отже, існує шукане число $N = E\left(\dfrac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}\right)$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{3}{2}.$

П р и к л а д 2. Показати, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+n-1} = 2.$

Р о з в ' я з а н н я. Справді, якщо $n \geqslant 3$,

$$\left|\frac{2n^2+3}{n^2+n-1} - 2\right| = \frac{2n-5}{n^2+n-1} < \frac{2}{n}.$$

Тому $\left|\dfrac{2n^2+3}{n^2+n-1} - 2\right|$ і поготів буде меншим за ε, якщо $\dfrac{2}{n} < \varepsilon$, або $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$. Отже, $N = E\left(\dfrac{2}{\varepsilon}\right)$.

Значення $n \geqslant 3$ взято тому, що за цієї умови дріб $\dfrac{2n-5}{n^2+n-1}$ набуває додатних значень. (На означення границі це обмеження не впливає.)

П р и к л а д 3. Показати, що границя сталої послідовності $y_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$ дорівнює числу a.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай маємо сталу послідовність $a, a, \ldots, a, \ldots$. Тоді $|y_n - a| = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Отже, яке б число $\varepsilon > 0$ ми не взяли, для всіх $n = 1, 2, \ldots$ справджується нерівність $|y_n - a| = 0 < \varepsilon$.

У цьому разі за число N можна взяти будь-яке натуральне число, наприклад, числа 1, 2 і т. д.

Якщо числова послідовність має границю, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати натуральне число N, то це число не єдине. Будь-яке число, більше за N, теж підходить.

П р и к л а д 4. Показати, що послідовність із загальним членом $y_n = (-1)^n$ не має границі.

Р о з в ' я з а н н я. Покажемо це, користуючись методом доведення від супротивного. Нехай задана послідовність має границю, яка дорівнює числу a. Отже, яке б ми не задали додатне число ε, наприклад число $\varepsilon = \frac{1}{2}$, існує таке N, що при $n > N$ виконується нерівність $|y_n - a| < \frac{1}{2}$.

Оскільки y_n при непарному n набуває значення -1, а при парному n — значення 1, то справджуються нерівності

$$|(-1) - a| < \frac{1}{2}, \quad |1 - a| < \frac{1}{2}.$$

Тоді $2 = |1 - (-1)| = |(a - (-1)) + (1 - a)| \leqslant |(-1) - a| + $
$+ |1 - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Отже, $2 < 1$. Дістали суперечність.

П р и к л а д 5. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 1).$$

Р о з в ' я з а н н я. Для цього виведемо спочатку допоміжну нерівність (нерівність Бернуллі). Якщо n — натуральне число, більше за одиницю, і $\gamma > 1$, то

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1).$$

Справді, поклавши $\gamma > 1 + \lambda$, де $\lambda > 0$, і використавши формулу бінома Ньютона, дістанемо

$$(1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \cdots + \lambda^n,$$

звідки

$$(1 + \lambda)^n > 1 + n\lambda,$$

або

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1).$$

Беручи тепер в нерівності $\gamma = a^{\frac{1}{n}}$, дістанемо

$$n(a^{\frac{1}{n}} - 1) < a - 1,$$

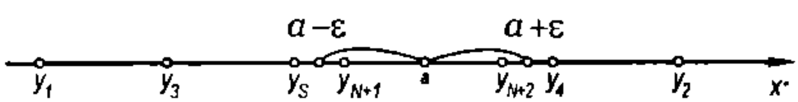
Отже, якщо $|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$, то

$$\frac{a-1}{n} < \varepsilon,$$

або

$$n > N = E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right).$$

Розглянемо тепер геометричну ілюстрацію того факту, що число a є границею числової послідовності (y_n). Візьмемо на числовій осі (див. мал. **104, *б***) точку з абсцисою (a) і відкладатимемо точки з абсцисами $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Послідовність може бути і коливною. Тоді нерівність (8) означає, що відстань між точкою y_n, якщо $n > N$, і точкою a має бути меншою за ε. А отже, усі члени послідовності (y_n), починаючи з y_{N+1} і всі наступні повинні міститися в інтервалі $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ є ε-околом точки a.



Мал. 104, *б*.

Отже, якщо число a є границею послідовності (y_n), то всі члени цієї послідовності, номери яких $n > N$, містяться в довільному ε-околі точки a. Що стосується членів послідовності (y_n), номери яких $n \leqslant N$, то про їх розміщення на числовій осі нічого не можна сказати, вони можуть міститись як всередині ε-околу точки a, так і поза ним. Проте у всякому разі поза довільним ε-околом точки a може бути розміщена тільки скінченна кількість членів послідовності.

Справедливе й обернене твердження: якщо, починаючи з певного номера і для всіх наступних номерів, члени послідовності (y_n) містяться в довільному ε-околі точки a, то a є границею даної послідовності.

Числову послідовність називають *збіжною*, якщо вона має границю. В противному випадку послідовність називають *розбіжною*.

§ 3. Нескінченно малі числові послідовності

Серед функцій натурального аргументу особливе місце відводиться так званим нескінченно малим послідовностям.

Послідовність $y_n = f(n)$, $n = 1, 2 \ldots$ називається нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Наприклад, послідовності $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ є нескінченно малими.

Якщо у нерівності (8) покласти $a = 0$, то дістанемо нерівність $|y_n| < \varepsilon, n > N$. Тому нескінченно малу числову послідовність можна означити ще й так.

Числова послідовність (y_n) називається нескінченно малою, якщо для будь-якого додатного числа ε існує натуральне число N таке, що для всіх $n > N$ справджується нерівність $|y_n| < \varepsilon$.

Отже, члени послідовності (y_n), починаючи з певного номера і для всіх наступних номерів, стають за модулем як завгодно малими.

Не слід плутати нескінченно малу числову послідовність з досить малим числом. Окремі члени нескінченно малої числової послідовності можуть бути як завгодно великими числами. Так, наприклад, послідовність $\left(\frac{10^{10}n}{n^2+1}\right)$ є нескінченно малою, бо $\left|\frac{10^{10}n}{n^2+1}\right| < \varepsilon$, якщо n більше, наприклад, від числа $\frac{10^{10}}{\varepsilon}$. Але окремі значення $\frac{10^{10}}{2}$, $\frac{10^{10}\cdot 2}{5}$, $\frac{10^{10}\cdot 3}{10}$ не є малими числами.

Нескінченно малі послідовності позначають через (α_n), (β_n), (γ_n) і т. д.

Наступні теореми встановлюють тісний зв'язок між послідовністю (y_n), яка має границю, і нескінченно малою послідовністю.

Теорема 1. Якщо $\lim_{n\to\infty} y_n = a$, **то послідовність** $(\alpha_n) = (y_n - a)$ **є нескінченно малою.**

Доведення. Яке б не було число $\varepsilon > 0$, знайдеться таке N, що для всіх $n > N$ справджуватиметься нерівність $|y_n - a| < \varepsilon$, або $|\alpha_n| < \varepsilon$ $(n > N)$, тобто α_n — нескінченно мала послідовність.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема 2. Якщо різниця між $\lim_{n\to\infty} = a$ **і числом** a **є нескінченно малою послідовністю, то** a **є границею послідовності** (y_n).

Позначимо $\alpha_n = y_n - a$. Тоді $y_n - a$ є нескінченно малою послідовністю. Тобто для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке N, що для всіх $n > N$ справджується нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$, що те саме, $|y_n - a| < \varepsilon$. Отже, згідно з означенням границі, $\lim_{n\to\infty} = a$. Доведені теореми дають змогу навести ще й таке означення границі послідовності.

Число a називається границею числової послідовності (y_n), якщо різниця між y_n і числом a є нескінченно малою послідовністю, тобто $(y_n - a) = (\alpha_n)$, де (α_n) — нескінченно мала послідовність.

Нескінченно малі послідовності мають такі властивості.

Властивість 1. *Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.*

Заради простоти припустимо, що маємо дві нескінченно малі послідовності (α_n) і (β_n). Треба показати, що послідовність $(\gamma_n) = (\alpha_n + \beta_n)$ є також нескінченно малою. Для цього задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки (α_n) є нескінченно малою послідовністю, то для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ існує таке число N_1, що для всіх $n > N_1$ справджуватиметься нерівність $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Існує також і число N_2, що для всіх $n > N_2$ справджуватиметься нерівність $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Візьмемо тепер число N, яке більше за числа N_1 і N_2. Тоді для всіх $n > N$ одночасно справджуються обидві нерівності.

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Використовуючи властивість модуля суми, дістанемо:

$$|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \geqslant |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Згідно з попередніми нерівностями, $|\gamma_n| < \varepsilon$, $(n > N)$.

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести справедливість цієї властивості і для будь-якого (певного) числа нескінченно малих послідовностей.

П р и к л а д. Довести, що послідовність із загальним членом

$$y_n = \frac{n+1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

є нескінченно малою.

Р о з в ' я з а н н я. У правій частині рівності (9) виконуємо ділення. Маємо: $y_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$. Кожний доданок тут є нескінченно малою числовою послідовністю. Згідно з властивістю 1, робимо висновок, що послідовність (9) є нескінченно малою.

Перш ніж сформулювати наступну властивість, наведемо таке означення.

Послідовність (y_n) *називається обмеженою, якщо існує число* $M > 0$, *що для всіх значень* $n = 1, 2, \ldots$ *справджується нерівність*

$$|y_n| < M.$$

Наприклад, послідовність $((-1)^n)$ є обмеженою. Тут $|(-1)^n| = 1$. Тому за число M можна взяти, наприклад, число 2. Тоді для всіх $n = 1, 2, \ldots$ справджуватиметься нерівність $|(-1)^n| < 2$.

Послідовність $y_n = \cos n\dfrac{\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$ є також обмеженою. Тут $\left|\cos n\dfrac{\pi}{2}\right| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, тоді як послідовність $y_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ не є обмеженою. (Чому?)

В л а с т и в і с т ь 2. *Добуток нескінченно малої числової послідовності на обмежену послідовність є нескінченно малою числовою послідовністю.*

Нехай (y_n) є обмеженою послідовністю, а (α_n) — нескінченно малою. Покажемо, що $(\beta_n) = (y_n \cdot \alpha_n)$ є нескінченно малою числовою послідовністю.

Оскільки (y_n) є обмеженою послідовністю, то існує таке число M, що для всіх n справджується нерівність $|y_n| < M$.

Оскільки (α_n) є нескінченно малою послідовністю, то яке б ми не взяли число, зокрема число $\frac{\varepsilon}{M}$, де $\varepsilon > 0$, знайдеться таке число N, що для всіх $n > N$ справджується нерівність $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Тоді

$$|\beta_n| = |y_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad (n > N).$$

З нерівності $|\beta_n| < \varepsilon$, $(n > N)$ випливає справедливість доводжуваного твердження.

§ 4. Нескінченно великі числові послідовності

У цьому параграфі розглянемо нескінченно великі числові послідовності.

О з н а ч е н н я. *Послідовність (y_n) називається нескінченно великою, якщо, яке б не було число $M > 0$, існує таке число $N = N(M)$, що для всіх $n > N$ справджується нерівність $|y_n| > M$.* Це записують так:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \infty,$$

y_n при цьому називають нескінченно великою послідовністю. Наприклад, послідовності $((-1)^n n)$, (n^2), (n) є нескінченно великі.

Доведемо, наприклад, що $((-1)^n n)$ є нескінченно велика послідовність. Справді, для довільного числа $M > 0$, починаючи з деякого номера n, маємо $|y_n| = |(-1)^n n| = n > M$. Члени заданої послідовності необмежено зростають за модулем, набуваючи то додатних, то від'ємних значень. Якщо $M_1 = 100$, то $|y_n| = n > 100$, якщо $n = 101, 102, \ldots$.
Отже, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \infty$.

Слід зауважити, що необмежена числова послідовність може й не бути нескінченно великою. Так, числова послідовність (y_n), де

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n = 2k, \\ n! & \text{якщо} \quad n = 2k+1, \ k = 0, 1, \ldots . \end{cases}$$

є необмеженою і не є нескінченно великою.

Якщо члени нескінченно великої послідовності, починаючи з певного n і для всіх наступних його значень, є додатні, то цей факт символічно записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Якщо ж члени нескінченно великої послідовності (y_n), починаючи з певного n і для всіх наступних його значень від'ємні, то це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

Наприклад, $y_n = 1000 - n$, починаючи з $n = 1001$ і для всіх $n > 1001$, набуває від'ємних значень. Тому

$$\lim_{n\to\infty}(1000 - n) = -\infty.$$

Члени послідовності $(a^n), a > 1$ для всіх $n = 1, 2 \ldots$ додатні. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

Існує тісний зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими числовими послідовностями. Цей зв'язок встановлюють такі теореми.

Теорема. Якщо (y_n) є нескінченно велика числова послідовність, то послідовність $(\alpha_n) = \left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ є нескінченно малою.

Д о в е д е н н я. Оскільки (y_n) є нескінченно велика послідовність, то яке б ми не взяли число $M > 0$, існує таке число N, що для всіх $n > N$ справджується нерівність $|y_n| > M$. Нехай $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, де ε — довільне додатне число. Тоді $|y_n| > \dfrac{1}{\varepsilon} \quad (n > N)$, або $|\alpha_n| < \varepsilon \quad (n > N)$. Теорему доведено.

Обернена теорема. Якщо послідовність (α_n) є нескінченно мала числова послідовність і $\alpha_n \neq 0$ для всіх $n = 1, 2, \ldots$, то послідовність $(y_n) = \left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)$ є нескінченно велика.

Д о в е д е н н я. Оскільки за умовою теореми (α_n) — нескінченно мала послідовність, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, наприклад, для $\varepsilon = \frac{1}{M}$, де $M > 0$ — будь-яке дійсне число, існує натуральне число $N = N(M)$ таке, що для всіх значень $n > N$ справджується нерівність $|\alpha_n| < \frac{1}{M}$.

Позначимо $(y_n) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$. Тоді

$$\frac{1}{|\alpha_n|} = \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = |y_n| > M, \quad n > N.$$

Теорема доведена.

П р и к л а д. Довести, що послідовність $(\alpha_n) = a^n$, $0 < a < 1$ є нескінченно мала.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо число a у вигляді

$$a = \frac{1}{\frac{1}{a}}.$$

Введемо позначення $\frac{1}{a} = b$. Оскільки $0 < a < 1$, то число $b > 1$. Отже, числову послідовність (α_n) можна записати так:

$$\alpha_n = \frac{1}{b^n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Звідси, враховуючи, що послідовність (b^n), $b > 1$ є нескінченно велика, робимо висновок: послідовність (α_n) є нескінченно мала.

§ 5. Основні теореми про границі

Знаходження границі числової послідовності на основі тільки означення границі викликає часто певні труднощі, оскільки: треба наперед знати «підозріле» на границю число; не кожного разу за заданим ε можна знайти N.

Тому на практиці для знаходження границі числових послідовностей користуються такими теоремами.

Теорема 1. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають відповідно границі a і b. Тоді послідовність $(x_n + y_n)$ має границю $a + b$.

Д о в е д е н н я. Якщо a і b є відповідно границі (x_n) і (y_n), то $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, де (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності.

Додавши почленно ці рівності, дістанемо

$$x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n.$$

Отже, послідовність $(x_n + y_n)$ подано у вигляді суми сталого числа $a+b$ і нескінченно малої послідовності $(\alpha_n + +\beta_n)$. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$ і дорівнює $a + b$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b.$$

Теорема 2. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають відповідно границі a, b. Тоді послідовність $(x_n \cdot y_n)$ має границю, яка дорівнює $a \cdot b$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b.$$

Д о в е д е н н я. Послідовності (x_n) і (y_n), за умовою даної теореми, можна подати у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = = b_n + \beta_n$, де (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності. Тоді

$$x_n \cdot y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

У даній рівності сума останніх трьох доданків є нескінченно малою послідовністю. Тому

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab.$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що теореми 1 і 2 справедливі й для більшого числа доданків (співмножників). З теореми 2 випливають н а с л і д к и.

Сталий множник можна виносити за знак границі. Справді, нехай $x_n = c$, а y_n має границю. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = c \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і k — натуральне число, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^k) = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k = a^k.$$

Теорема 3. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають скінченні границі, які відповідно дорівнюють

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, **причому** $b \neq 0$. **Тоді послідовність** $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ **має скінченну границю, яка дорівнює** $\dfrac{a}{b}$.

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то можна було б довести, що знайдеться таке N, що при $n > N$ справджується нерівність $|y_n| > r > 0$, де r — стале число.

Надалі обмежимося тими значеннями членів послідовності (y_n), які задовольняють попередню нерівність. Тоді

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n),$$

де (α_n), (β_n) — нескінченно малі послідовності.

Покажемо, що послідовність, яка міститься в правій частині попередньої рівності, є нескінченно малою. Справді,

$$\frac{1}{|by_n|} < \frac{1}{|b|r}.$$

Отже, послідовність $\left(\dfrac{1}{by_n}\right)$ є обмеженою. Послідовність $(b\alpha_n - a\beta_n)$ є нескінченно малою.

Таким чином, послідовність $(\gamma_n) = \left(\dfrac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)\right)$ є нескінченно малою. Тому $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b} + \gamma_n$. Теорему доведено.

Послідовність (y_n) називають **неспадною** (**незростаючою**), якщо для будь-якого $n \in N$ справджується нерівність

$$y_{n+1} \geqslant y_n \quad (y_{n+1} \leqslant y_n),$$

тобто значення кожного наступного члена послідовності не менші (не більші) за значення попереднього її члена. Неспадні та незростаючі послідовності називають **монотонними**.

Якщо значення членів монотонної послідовності (y_n) для будь-якого $n \in N$ задовольняють строгу нерівність $y_{n+1} > y_n$ $(y_{n+1} < y_n)$, то послідовність (y_n) називають **зростаючою** (**спадною**). Зростаючі та спадні послідовності називають також **строго монотонними**.

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\frac{4}{3}.$$

Приклад 3. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ $(a > 1)$.

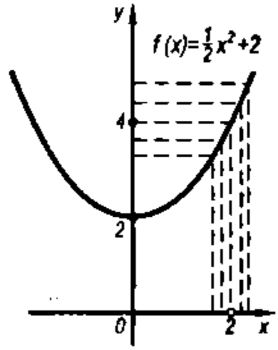
Розв'язання. Запишемо степінь $a^{-\frac{1}{n}}$ у вигляді $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ $(a > 1)$, то до попереднього відношення можна застосувати теорему 3 про границю частки. Тоді матимемо

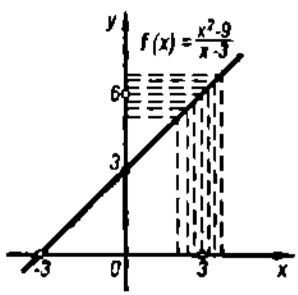
$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

§ 6. Границя функції неперервного аргументу

1. Поняття про границю функції. У попередніх параграфах ми ознайомилися з поняттям про границю числової послідовності, або з границею функції натурального аргументу. У таких функціях аргумент змінюється розривно (дискретно), набуваючи значень 1, 2, ...



Мал. 105



Мал. 106

Розглянемо функцію $y = f(x)$, де аргумент змінюється неперервно (набуває всіх значень з певного проміжку $\langle a; b\rangle$[1], крім, можливо, однієї внутрішньої точки даного проміжку).

[1]Тут і далі символом $\langle a; b\rangle$ позначатимемо будь-яку множину чисел: інтервал $(a; b)$, відрізок $[a; b]$, проміжки $[a; b)$ або $(a; b]$, причому a і b можуть бути і невласними числами $+\infty$ або $-\infty$.

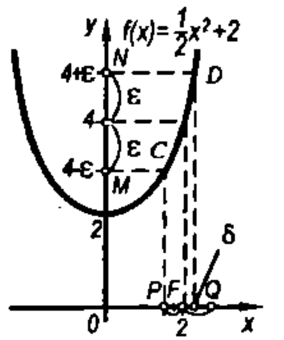
Наведемо два приклади.

П р и к л а д 1. Простежимо, як поводить себе функція $(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$, коли значення аргументу x як завгодно лизько наближається до числа 2. Символічно це познача-ть так: $x \to 2$. З малюнка 105 випливає, що коли $x \to 2$ ліва або справа, то відповідні значення функції $f(x)$ як авгодно близько наближаються до числа 4, тобто ці зна-ення мало відрізнятимуться від числа 4.

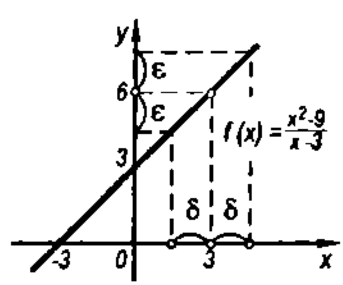
У такому разі кажуть, що функція $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ має раницею число 4, якщо $x \to 2$, або в точці $x_0 = 2$. Симво-ічно це записують так: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right) = 4$.

П р и к л а д 2. Знайдемо значення функції $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, коли $x \to 3$. На відміну від попереднього при-ладу, у точці $x_0 = 3$ функція не визначена. Проте за рафіком (мал. 106) неважко зробити висновок, що коли $\to 3$ $(x \neq 3)$, то відповідні значення функції наближаю-ься до числа 6. У такому разі також вважаємо, що число 6 границею функції $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, коли $x \to 3$, або в точці $_0 = 3$, тобто

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$



Мал. 107



Мал. 108

Отже, коли число A є границею функції $y = f(x)$ при $\to x_0$, то значення функції $f(x)$ як завгодно близько аближаються до числа A, коли значення аргументу x як авгодно близько наближаються до числа x_0.

З'ясуємо, як математично записати сформульовану властивість числа A. Повернемось до першого прикладу. Задамо додатне число ε і побудуємо на осі Oy відрізок $[NM]$ завдовжки 2ε, серединою якого є точка 4. Цей відрізок називають ε-околом точки 4 (мал. 107).

Всі значення функції, які містяться в ε-околі точки 4, тобто в середині відрізка $[NM]$ задовольняють нерівність $4 - \varepsilon < f(x) < 4 + \varepsilon$, або $-\varepsilon < f(x) - 4 < \varepsilon$, або рівносильну нерівність

$$|f(x) - 4| < \varepsilon. \quad (1)$$

Проте поведінка функції залежить від значень, яких набуває аргумент x. З'ясуємо геометрично, для яких x справджується нерівність (1). Для цього через точки N і M проведемо перпендикуляри до осі Oy і через точки C і D перетину цих перпендикулярів з графіком функції проведемо перпендикуляри до осі Ox. Відрізок $[PQ]$ містить,крім точки 2, всі значення аргументу x, відмінні від $x_0 = 2$, для яких справджується нерівність (1).

Очевидно, що $PF > FQ$. Довжину меншого відрізка FQ позначимо δ і побудуємо δ-окіл точки 2. Усі значення аргументу x, які містяться у δ-околі точки 2, задовольняють нерівність $2 - \delta < x < 2 + \delta$, або $-\delta < x - 2 < \delta$, або рівносильну нерівність

$$|x - 2| < \delta. \quad (2)$$

Отже, для тих значень x, які задовольняють умову $|x - 2| < \delta$, справджується нерівність $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Геометрично це означає, що як тільки значення аргументу x, яке прямує до числа 2, потрапляє у δ-окіл точки 2, то відповідне значення функції $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ потрапляє в ε-окіл точки 4.

За δ -окіл точки 2 взято довжину меншого відрізка FQ, оскільки коли б за δ взяти довжину більшого відрізка PF, то в побудованому δ-околі точки 2 знайшлися б такі значення x, для яких відповідні значення $f(x)$ не потрапили б в ε-окіл точки 4.

Значення $\delta > 0$ для будь-якого наперед заданого $\varepsilon > 0$ можна знайти і алгебраїчним способом, розв'язавши відповідну нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ відносно $|x - x_0|$.

Покажемо це для другого прикладу. Задамо $\varepsilon > 0$ і знайдемо відповідне $\delta > 0$, таке, щоб для всіх $x \neq 3$ і таких, що $|x - 3| < \delta$, справджувалася нерівність $|f(x) - 6| < \varepsilon$.

Підставимо в останню нерівність вираз, що задає функцію. Матимемо

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Розв'яжемо нерівність (3) відносно $|x-3|$. Враховуючи, що $x \neq 3$, а тому $x - 3 \neq 0$, і скоротивши дріб на $x - 3$, дістанемо $|x + 3 - 6| < \varepsilon$, або $|x - 3| < \varepsilon$.

Отже, в даному прикладі за δ можна взяти $\delta = \varepsilon$ (мал. 108).

Тепер сформулюємо означення границі функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $\langle a; b\rangle$, якщо $x \to x_0$, або, що те ж саме, у точці x_0.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in \langle a; b\rangle$, $x \neq x_0$ і таких, що $|x - x_0| < \delta$, справджується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символічно це записують так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \text{або} \quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A.$$

В означенні границі функції словосполучення «$x \neq x_0$ і таких, що $|x - x_0| < \delta$» можна записати скорочено у вигляді нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$.

Умову $x \neq x_0$ накладають для того, щоб охопити випадки, коли в точці x_0 функція не визначена, а якщо $x \to x_0$, то вона має границю — число A.

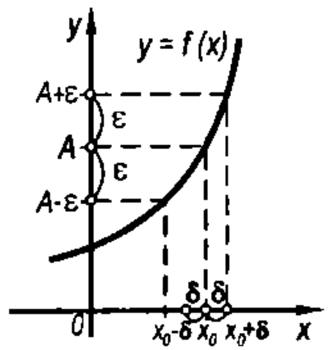
На малюнку 109 наведено геометричну інтерпретацію границі функції $y = f(x)$ у точці x_0 в загальному випадку.

Наведемо приклади застосування означення границі функції для доведення існування границь у певних точках.

Приклад 3. Довести, що $\lim\limits_{x\to a}(kx + b) = ka + b$, $k \neq 0$.

Щоб довести дану рівність, треба показати, що для будь-якого додатного числа ε існує додатне число δ, таке, що з нерівностей $0 < |x - a| < \delta$ випливає нерівність

$$|(kx + b) - (ka + b)| < \varepsilon. \qquad (4)$$



Мал. 109

Знайдемо число δ. Для цього в лівій частині нерівності (4) виконаємо тотожні перетворення $|kx + b - ka - b| < \varepsilon$, $|k(x - a)| < \varepsilon$, $|k| \cdot |x - a| < \varepsilon$, звідки

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Отже, якщо взяти $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$, то для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - a| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$, справджується нерівність (4).

Приклад 4. Довести, що $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 1) = 3$.

Розв'язання. Під знаком границі є лінійна функція $y = kx + b$ $(k = 2, b = 1)$. З попереднього прикладу випливає, що лінійна функція $y = ka + b$ у будь-якій точці $x \to a$ має границю A. Границя дорівнює значенню цієї функції у точці $x = a$, тобто $A = ka + b$. Отже, у даному прикладі $A = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Задача розв'язана.

Приклад 5. Довести, що $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{1}{2}x^2 + 2\right) = 4$.

Розв'язання. Задамо додатне число ε і знайдемо число $\delta > 0$, таке, щоб для всіх $x \neq 2$ і таких, що $|x - 2| < \delta$, справджувалася нерівність

$$\left|\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-4\right|<\varepsilon. \qquad (5)$$

Щоб знайти δ, слід розв'язати останню нерівність відносно $|x-2|$. Проте за допомогою тотожних перетворень це вдається зробити для лінійних функцій. У даному прикладі застосовується прийом підсилення нерівності.

Виконаємо тотожні перетворення у лівій частині нерівності (5). Дістанемо:

$$\left|\frac{x^2-4}{2}\right|<\varepsilon, \qquad \frac{|x-2|\cdot|x+2|}{2}<\varepsilon. \qquad (6)$$

Підсилимо нерівність (6), замінюючи множник $|x+2|$ на число, якого він не перевищує. Для цього накладемо на шукане δ обмеження $\delta\leqslant 1$. Це завжди можна зробити, оскільки δ залежить від ε, а число ε можна задавати як завгодно малим.

Тоді $|x-2|<1$, або $-1<x-2<1$. Додаючи до всіх трьох частин останньої нерівності число 4, дістанемо $3<x+2<5$, тому $|x+2|<5$.

Замінивши в нерівності (6) множник $|x+2|$ на число 5, вимагатимемо виконання нерівності

$$\frac{|x-2|\cdot 5}{2}<\varepsilon. \qquad (7)$$

Якщо справджується нерівність (7), то й поготів справджується нерівність (6) і рівносильна їй (5).

З нерівності (7) дістанемо

$$|x-2|<\frac{2}{5}\varepsilon.$$

Отже, за δ можна взяти менше з двох чисел 1 і $\frac{2}{5}\varepsilon$. Якщо $x\neq 2$ і $|x-2|<\delta$, то $\left|\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-4\right|<\varepsilon$.

П р и к л а д 6. Довести, що $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}$.

Яким має бути δ, щоб для значень x, які задовольняють нерівність $0<|x-2|<\delta$, справджувалась нерівність $\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{3}{5}\right|<0,001$?

Р о з в ' я з а н н я. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$ і покажемо, що існує таке число δ, що з умови $0 < |x-2| < \delta$ випливає нерівність

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon. \qquad (8)$$

Виконуючи у лівій частині нерівності (8) тотожні перетворення, дістанемо рівносильну нерівність

$$\frac{2|x-2| \cdot |x+2|}{5(x^2+1)} < \varepsilon. \qquad (9)$$

Шукатимемо δ таке, що $0 < \delta \leqslant 1$. Оскільки має бути $|x-2| < \delta$, то $|x-2| < 1$. Звідси $-1 < x-2 < 1$, або $1 < x < 3$. Отже, $3 < x+2 < 5$, а $1 < x^2 < 9$, тому $2 < x^2 + 1 < 10$.

Якщо у лівій частині нерівності (9) множник $|x+2|$ замінити на явно більше число 5, а вираз $|x^2+1|$ у знаменнику — на явно менше число 2, то дістанемо нерівність

$$\frac{2 \cdot |x-2| \cdot 5}{2 \cdot 5} < \varepsilon, \qquad (10)$$

у якої ліва частина більша, ніж у нерівності (9). З нерівності (10) дістанемо $|x-2| < \varepsilon$.

Отже, за ε можна взяти менше з двох чисел 1 і $\delta = \varepsilon$. Поклавши $\varepsilon = 0,001$, дістанемо $\delta = 0,001$.

Розглянемо приклад, який широко застосовують при знаходженні границь функцій.

П р и к л а д 7. Довести, що

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (11)$$

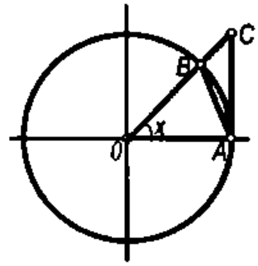
Нехай $x > 0$. Оскільки x розглядається у малому околі нуля, то можна припустити, що $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Покажемо, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що з нерівності $|x| < \delta$ випливає нерівність

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Доведемо спочатку допоміжну нерівність, а саме: покажемо, що при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ справджується нерівність $\sin x <$ $< x < \operatorname{tg} x$.

Візьмемо коло з центром у довіль-
ій точці O з радіусом, що дорів-
ює одиниці (мал. 110), а також го-
трий кут AOB, хорду AB і дотичну
C до кола у точці A. Тоді площа
AOB $<$ площі сектора AOB $<$
площі $\triangle AOC$.



Мал. 110

Якщо x — радіанна міра $\angle AOB$,
довжина дуги AB дорівнюватиме
бутку радіуса на радіанну міру ку-
, тобто дорівнюватиме x. Співвідношення між площами
пишемо у вигляді $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1 \times$
$\cdot \operatorname{tg} x$. Після множення всіх трьох частин нерівності на 2,
станемо $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Оскільки в цьому разі $\sin x > 0$, то, поділивши всі чле-
и останньої нерівності на $\sin x$, дістанемо $1 < \frac{x}{\sin x} <$
$\frac{1}{\cos x}$, або $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Розглянемо рівність $1 = 1 = 1$. Віднімаючи почленно
д цих рівностей попередні, маємо

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x, \text{ або}$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin x^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x.$$

Отже, $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$.

скільки $x > 0$, то $-x < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$. Останні нерівності
ожна записати у вигляді $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|$.

Отже, якщо $|x| < \varepsilon$, то $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$.

Тому взявши $\delta = \varepsilon$, якщо $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ (коли $\varepsilon \geqslant \frac{\pi}{2}$, то
ожна взяти $\delta = \frac{\pi}{2}$), помічаємо, що з нерівності $|x| < \varepsilon$
пливає нерівність $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Задачу для $x > 0$
зв'язано.

Нехай тепер $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Введемо нову змінну $x' > 0$ за формулою $x = -x'$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x')}{-x'} = \lim_{x'\to 0}\frac{-\sin x'}{-x'} = \lim_{x'\to 0}\frac{\sin x'}{x'} = 1.$$

Зазначимо, що розв'язуючи цю задачу, ми не робили жодного припущення про те, що x є строго аргументом.

Тому рівність (11) записують ще й так:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1,$$

де α може бути функцією від x.

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Позначимо $\alpha = 3x$. Тоді, якщо $x \to 0$, то і $\alpha \to 0$. Якби у знаменнику було $3x$, то границя попереднього виразу дорівнювала б 1. Тому, домноживши чисельник і знаменник на 3, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin(3x)}{(3x)} = 3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 3.$$

Сталий множник можна виносити за знак границі.

У попередніх прикладах розглянуто випадки, коли функція $y = f(x)$ у точці x_0 мала границю. Можна навести приклади, коли $y = f(x)$ у точці x_0 границі не має. Для цього розглянемо, наприклад, функцію Діріхле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне число,} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне число.} \end{cases}$$

Припустимо, що $D(x)$ у точці x_0 має границю A, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} D(x) = A$.

Тоді, згідно з означенням границі, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, зокрема для числа $\varepsilon = \frac{1}{3}$, існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$ $(x \neq x_0)$, справджується нерівність $|D(x) - A| < \frac{1}{3}$.

Нерівність $|x - x_0| < \delta$ означає інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, в якому містяться як раціональні, так і ірраціональні числа, що не дорівнюють x_0. Нехай x_1 — раціональне число $(x_1 \neq x_0)$, а x_2 — ірраціональне число $(x_2 \neq x_0)$, кі належать зазначеному інтервалу. Згідно з нерівністю $f(x)-A| < \varepsilon$ справджуються такі нерівності: $|1-A| < \frac{1}{3}$, $4| < \frac{1}{3}$.

Отже,

$$1 = |(1-A)+A| \leqslant |1-A| + |A| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\text{тобто } 1 < \frac{2}{3}.$$

Дістали суперечність. Отже, у точці x_0 функція $D(x)$ раниці не має.

Вище ми розглянули границю функції неперервного ргументу, коли він наближається до фіксованої точки x_0.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ визначена, наприлад, на множині всіх додатних чисел, і нехай x необмежео зростає (позначається це так: $x \to \infty$). Тоді може тратись, що значення функції наближаються як завгодно лизько до числа A. У цьому випадку число A називають раницею функції $y = f(x)$, якщо $x \to \infty$ і позначають $\lim\limits_{\to +\infty} f(x) = A$.

Число A називається границею функції $y = f(x)$, коли $\to +\infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує аке додатне число M, що з нерівності $x > M$ випливає ерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогічно означають границю функції, коли $x \to \to -\infty$. Число B називається границею функції $y = f(x)$, оли $x \to -\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує аке від'ємне число E, що для всіх $x < E$ справджується ерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} + 3\right) = 3$.

§ 7. Нескінченно малі функції. Основні теореми про границі

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $\langle a; b\rangle$, рім, можливо, точки $x_0 \in \langle a; b\rangle$.

Функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою у точці x_0, якщо існує границя функції у даній точці і вона дорівнює нулю.

Нескінченно малу функцію в точці ще називають нескінченно малою величиною.

Так, наприклад, нехай $y = 1 - x$. Тоді $\lim\limits_{x \to 1}(1 - x) = 0$. Отже, функція $y = 1 - x$ в точці $x = 1$ є нескінченно малою.

Зазначимо, що розглядувана функція $y = f(x)$ може бути нескінченно малою у даній точці і не бути такою в іншій точці. Може трапитися, що функція є нескінченно малою у кількох точках. Так, наприклад, функція $y = x(x - 1)(x - 2)$ є нескінченно малою у точках 0; 1; 2.

Якщо x_0 — внутрішня точка проміжку $\langle a; b\rangle$, то, скориставшись означенням границі функції в точці, нескінченно малу функцію означимо так.

Функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою у точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in \langle a; b\rangle$, $(x \neq x_0)$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, справджується нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

Оскільки число ε може бути як завгодно малим, то з попередньої нерівності випливає, що значення нескінченно малої функції поблизу даної точки x_0 за модулем як завгодно малі. Але не слід плутати нескінченно малу функцію в точці з досить малим числом. Значення нескінченно малої функції можуть бути за певних значень як завгодно великими числами. Наприклад, функція $y = x$ в точці $x = 0$ є нескінченно малою, але її значення при досить великих за модулем значеннях x є також як завгодно великі.

Нескінченно малі функції, аналогічно до нескінченно малих числових послідовностей, мають властивості, які ми сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. Сума (різниця) двох нескінченно малих функцій у даній точці є нескінченно малою функцією.

Цю теорему пропонуємо довести самостійно.

Функція $y = f(x)$ називається *обмеженою* на проміжку $\langle a; b\rangle$, якщо існує число $M > 0$ таке, що для всіх значень x із цього проміжку виконується нерівність $|f(x)| < M$.

Так, наприклад, функція $y = \sin x$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ є обмеженою ($|\sin x| \leqslant 1$). Обмеженою на відрізку $[-1; 1]$ є також функція $y = x^2$ ($|x^2| \leqslant 1$). Однак функція $y = x^2$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ не є обмеженою.

Теорема 2. Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є функцією нескінченно малою у даній точці.

Доведення. Нехай $\alpha(x)$ у точці x_0 є нескінченно малою функцією, а $f(x)$ — обмеженою. Тоді існує окіл $0 < |x - x_0| < \delta_1$ точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу справджується нерівність

$$|f(x)| < M, \tag{12}$$

де $M > 0$.

Візьмемо число $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M}$, де ε — довільне додатне число. Тоді, оскільки $\alpha(x)$ є нескінченно малою в точці x_0, для числа ε_1 існує таке число δ_2, що для всіх $x \neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta_2$, справджується нерівність

$$|\alpha(x)| < \varepsilon_1. \tag{13}$$

Нехай δ — число, менше за числа δ_1 і δ_2. Тоді для всіх $x \neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, справджуватимуться нерівності (12), (13). Отже, для всіх $x \neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, справджується нерівність

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| < M\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Ця нерівність і доводить теорему.

Теорема 3. Щоб функція $y = (x)$ у точці $x_0 \in (a; b)$ мала границею число A, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою функцією у цій точці.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} = A$.
Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \in (a; b)$ $(x \neq x_0)$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, справджується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначивши $\alpha(x) = f(x) - A$, дістанемо $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Достатність. Нехай $\alpha(x) = f(x) - A$ є вескінченно малою функцією у точці x_0, тобто $|\alpha(x)| < \varepsilon$, або, що те саме, $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тоді A є границею функції $f(x)$ у точці x_0. Теорему доведено.

Виходячи з цієї теореми, можна дати таке означення границі функції в точці.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці $x_0 \in (a; b)$, якщо різниця між цією функцією і числом A є нескінченно малою функцією в цій точці.

Звідси випливає, що поблизу точки x_0 справджується рівність $f(x) = A + \alpha(x)$, де A — границя функції $f(x)$ в точці x_0, а $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція в точці x_0.

Користуючись цим означенням границі функції, а також властивостями нескінченно малої функції, можна довести основні теореми про границі.

Теорема 4. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ в точці x_0 мають границі, то сума і добуток цих функцій також мають у цій точці границю, причому

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x), \qquad (14)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x). \qquad (15)$$

Теорема 5. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ в точці x_0 мають границі і $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, то й функція $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ має в цій точці границю, яка дорівнює

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}. \qquad (16)$$

Доведемо, наприклад, рівність (15) (рівності (14), (16) пропонуємо довести самостійно).

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$. Тоді справджуються рівності

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad \varphi(x)B + \beta(x), \qquad (17)$$

де $\alpha(x), \beta(x)$ — нескінченно малі функції в точці x_0.

Перемножимо почленно рівності (17)

$$f(x)\cdot\varphi(x) = AB+(A\cdot\beta(x)+B\ \alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)). \quad (18)$$

Покажемо, що сума останніх трьох доданків у рівності (18) є нескінченно малою функцією у точці x_0. Для цього достатньо довести, що $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ є нескінченно малою функцією у точці x_0 ($A\cdot\beta(x), B\cdot\alpha(x)$ — нескінченно малі функції згідно з теоремою 2).

Оскільки $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція в точці x_0, то для будь-якого додатного числа, наприклад, числа $\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, існує число $\delta_1 > 0$ таке, що для всіх x_0, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta_1$, справджується нерівність

$$|\alpha(x)| < \sqrt{\varepsilon}. \quad (19)$$

Існує також число $\delta_2 > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta_2$, справджується нерівність

$$|\beta(x)| < \sqrt{\varepsilon}. \quad (20)$$

Візьмемо число $\delta > 0$ меншим за числа δ_1 і δ_2. Тоді для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, будуть одночасно справджуватись нерівності (19), (20), і для цих значень x справджуватиметься нерівність $|\alpha(x)\cdot\beta(x)| < \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$.

Ця нерівність і доводить, що добуток $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ є нескінченно малою функцією у точці x.

Отже, згідно з рівністю (18) добуток функцій $f(x) \times \times\varphi(x)$ зображено у вигляді суми числа $A\cdot B$ і нескінченно малої функції. Тому число $A\cdot B$ є границею функції $f(x)\cdot\varphi(x)$ у точці x_0, тобто

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A\cdot B.$$

Рівність (15) доведено.

Як і для числових послідовностей, для функцій неперервного аргументу можна довести таку теорему:

Теорема 6. Якщо при $x \to x_0$ функція $y = f(x)$ має границю A, то ця границя єдина.

Приклади. Користуючись основними теоремами про границі, знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to4}\left(2(x+3)-\frac{x}{x-2}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^3+2x^2-x}{5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

Розв'язання. 1) Застосуємо теорему про границю суми. Тоді $\lim\limits_{x\to4}(2(x+3))=14$, $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{x}{x-2}\right)=2$.

Отже, $\lim\limits_{x\to4}\left(2(x+3)-\frac{x}{x-2}\right)=14-2=12.$

2) У цьому прикладі безпосередньо не можна використати теорему про границю частки, бо границя знаменника дорівнює нулю. Оскільки в означенні границі сказано, що коли $x\to x_0$, то обов'язково вимагається, щоб $x\neq x_0$, то на різницю $x-x_0\neq0$ можна скорочувати чисельник і знаменник.

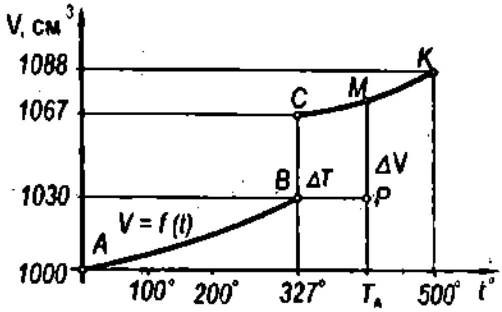
Тому
$$\lim_{x\to0}\frac{3x^3+2x^2-x}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2+2x-1}{5}=-\frac{1}{5}.$$

3) Скоротимо дріб на $x-5$:
$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)}=\lim_{x\to5}(x+5)=10.$$

4) Позбудемося ірраціональності у чисельнику і знаменнику. Матимемо:
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(5-x-4)(\sqrt{2-x}+1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

§ 8. Неперервність функції в точці

Неперервність функції в точці — одна з важливих властивостей, інтуїтивне уявлення про яку ви вже дістали, коли будували графіки різних функцій, знаходили кілька окремих точок графіка і через них проводили суцільну лінію. Виникає запитання — чи правомірною операцією є проведення такої лінії навіть тоді, коли функція визначена на всій числовій прямій або в усіх точках деякого проміжку $(a;b)$? Чи існують функції, графіки яких не є суцільними лініями на всій області визначення чи на деякому проміжку $\langle a; b \rangle$ і чи є такі реальні функції на практиці, в інших предметах? Відповідь на це запитання позитивна.



Мал. 111

Розглянемо приклад. Візьмемо кубик свинцю, який має об'єм 1 дм^3 при 0° і рівномірно нагріємо його. Дослід показує, що зміна об'єму кубика відбувається так: при нагріванні від 0° до 327° об'єм свинцю збільшується від 1000 см^3 до 1030 см ^{3} поступово, без стрибків, тобто об'єм набуває при цьому проміжних значень. Якщо $t = 327°$ (точка плавлення свинцю), об'єм різко (стрибком) зростає до 1067 см^3 і при подальшому нагріванні від 327° до 500° знов поступово, без стрибків, зростає від 1067 см^3 до 1088 см^3 (свинець перебуває в рідкому стані). Графік зміни об'єму свинцю залежно від температури подано на малюнку 111, звідки видно, що коли $0° < t < 327°$, графік є неперервною, суцільною кривою AB, а коли $t = 327°$, то відбувається стрибок від точки $B(327; 1030)$ до точки $C(327; 1067)$. Якщо $327° < t \leqslant 500°$, то графік знов є неперервною, суцільною кривою CK.

Отже, графік залежності між температурою і об'ємом свинцю є функцією $V = f(t)$, яку задано на відрізку $[0° 500°]$. Вона є розривною в точці $t = 327°$, хоч і визначена в кожній точці відрізка.

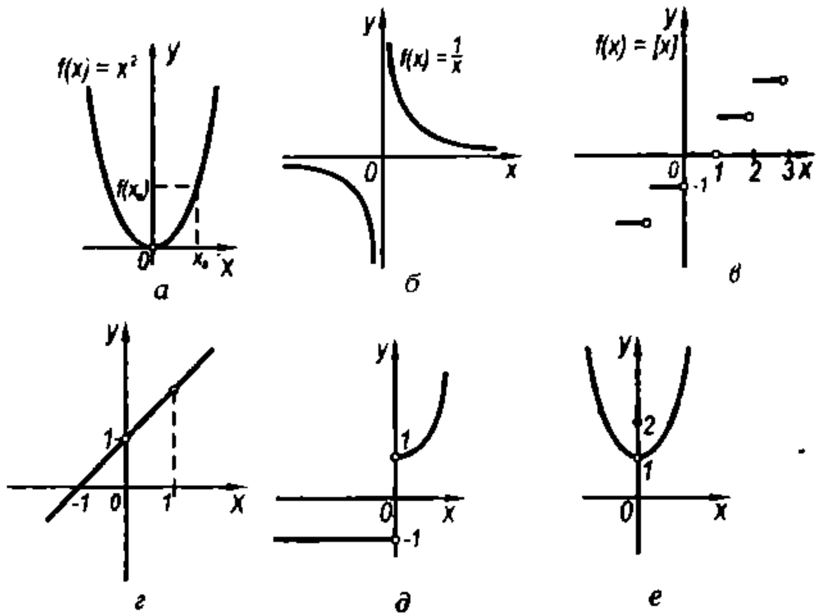
Якщо розглянути ще кілька функцій, графіки яких зображені на малюнку 112, *а–е*, то неважко з'ясувати причину розриву їхніх графіків у певних точках. Справді, функції $y = \dfrac{1}{x}$ і $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (мал. 112, *б, г*) мають розриви відповідно в точках $x_0 = 0$ і $x_0 = 1$, бо в цих точках вони не визначені. Функції $f(x) = [x]$ і

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad x < 0, \end{cases}$$

(мал. 112, *в*, *д*) розривні: перша відповідно при всіх цілих значеннях x, а друга, якщо $x = 0$, бо в цих точках вони не мають границі. Функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо} \quad x \neq 0, \\ 2, & \text{якщо} \quad x = 0, \end{cases}$$

(мал. 112, *е*) визначена в точці $x = 0$, має границю $A = 1$, коли $x \to 0$, але ця границя не дорівнює значенню функції $f(0) = 2$ в цій точці.



Мал. 112

Лише функція $f(x) = x^2$ неперервна в будь-якій точці числової осі.

Сформулюємо означення неперервної функції в точці.

Для цього припустимо, що функція $y = f(x)$ визначена у всіх точках деякого проміжку $\langle a; b \rangle$. Нехай x_0 є внутрішня точка цього проміжку.

О з н а ч е н н я. *Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x_0 \in \langle a; b \rangle$, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точці x_0.*

Отже, функція $y = f(x)$ в точці x_0 буде неперервною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0, тобто існує число $f(x_0)$;

2) існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ функції в точці x_0;

3) границя функції дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Разом всі ці умови є необхідними і достатніми для того, щоб функція $y = f(x)$ була неперервною в точці x_0.

П р и к л а д 1. Показати, що степенева функція $y = x^n$, де n — ціле додатне число, є неперервною у будь-якій точці числової осі.

Р о з в ' я з а н н я. Степенева функція при цілому додатному показнику визначена на всій числовій осі. Візьмемо довільну точку $x_0 \in (-\infty; +\infty)$. Тоді $f(x_0) = x_0^n$. Знайдемо $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = \lim\limits_{x \to x_0} (x \cdot x \cdot \dots \cdot x) = x_0^n$.

Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тому функція $y = x^n$ є неперервною у будь-якій точці $x_0 \in (+\infty; -\infty)$.

П р и к л а д 2. Довести, що многочлен $y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ є неперервною функцією у будь-якій точці числової осі.

Р о з в ' я з а н н я. Задана функція визначена в усіх точках числової осі, тобто коли $x \in (-\infty; +\infty)$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in (-\infty; +\infty)$. Тоді $f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n$.

Використовуючи основні теореми про границі, матимемо $\lim\limits_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n$.

Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

П р и к л а д 3. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{якщо} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0, \end{cases}$$

в точці $x = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Задана функція визначена в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, зокрема $f(0) = 0$. Проте в точці $x = 0$ ця функція не має границі. Справді, коли $x > 0$,

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1,$$

а коли $x < 0$,

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

Отже, тут $\lim\limits_{\substack{x > 0 \\ x \to 0}} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{\substack{x < 0 \\ x \to 0}} f(x) = -1,$

Функція в точці $x = 0$ не є неперервною.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, то роль границі функції в точці x_0 відіграє число $f(x_0)$. Тому, використовуючи означення границі функції в точці, можна дати таке означення неперервності функції в точці.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \in (a; b)$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, справджується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Зазначимо, що на відміну від означення границі, тут ми не ставимо умову $|x - x_0| > 0$, або $x \neq x_0$, бо в даному разі функція в точці x_0 визначена, а нерівність $|f(x) - f(x_0)| < < \varepsilon$, коли $x = x_0$ справджується.

Приклад 4. Користуючись наведеним означенням, показати, що функція $y = \sin x$ неперервна в кожній точці числової осі.

Розв'язання. Візьмемо, довільну точку $x_0 \in \in (-\infty; +\infty)$. Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ має існувати таке число $\delta > 0$, що нерівність

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \qquad (2)$$

справджується для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$.

Покажемо, що таке число δ існує. Для цього ліву частину нерівності (2) запишемо у вигляді

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|,$$

скільки $\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 1.$

Значення x розглядаються поблизу точки x_0. Тому згідно з нерівністю $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (§ 2, п. 1, приклад 5)

$$\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant \left|\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

Отже, $|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|$.

Таким чином, щоб справджувалася нерівність (2), достатньо, щоб $|x-x_0| < \varepsilon$. Поклавши $\delta = \varepsilon$, переконуємося в тому, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Це й доводить неперервність функції $y = \sin x$ у довільній точці числової осі.

На практиці при дослідженні функцій на неперервність часто користуються означенням неперервності функції, яке базується на понятті приросту функції в точці.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в усіх точках деякого проміжку $\langle a; b\rangle$. Візьмемо дві довільні точки з цього проміжку x_0 і $x_0 + \Delta x$, де $\Delta x = x - x_0$.

Тоді число Δx називають приростом аргументу, а число $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приростом функції $f(x)$ в точці x_0.

Сформулюємо тепер таке означення неперервності в точці x_0 функції $y = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{3}$$

Так, функція $y = x^2$ неперервна в довільній точці x_0 числової осі, бо $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 0$.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці проміжку $\langle a; b\rangle$, то вона називається неперервною на цьому проміжку.

Функція $y = x^2$ неперервна в інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

З'ясуємо питання про неперервність функцій, які утворені з неперервних функцій шляхом застосування до них раціональних операцій додавання, віднімання, множення, ділення.

Правильними є такі теореми.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ є неперервними в точці x_0, то в цій точці будуть неперервними і функції $f(x) \pm \varphi(x)$; $f(x) \cdot \varphi(x)$.

Теорема 2. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ є неперервними в точці x_0 і $\varphi(x_0)$, то в точці x_0 є неперервною також і функція $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Доведемо теорему 2. Теорему 1 пропонуємо довести самостійно.

Д о в е д е н н я. Застосуємо перше означення неперервності функції в точці. Введемо позначення $F(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. Оскільки $f(x)$ і $\varphi(x)$ є неперервними в точці x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \neq 0.$$

Тому

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = F(x_0).$$

Отже, границя функції $F(x)$ при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в точці x_0, а це означає, що $F(x)$ є неперервною в точці x_0. Теорему доведено.

П р и к л а д 1. Дослідити на неперервність дробово-раціональну функцію

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}.$$

Р о з в ' я з а н н я. У чисельнику і знаменнику ми маємо многочлени, які є неперервними функціями на всій числовій осі. Тому й раціональна функція є неперервною в усіх точках числової осі, крім тих точок, де знаменник перетворюється на нуль.

Зазначимо, що поняттям неперервності функції в точці часто користуються для знаходження границі функції в цій точці: якщо функція $y = f(x)$ є неперервною в точці

), то, як це випливає з (1), для знаходження $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ до-
'атньо знайти $f(x_0)$.

Приклад 2. Застосовуючи співвідношення $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x \to a}(x^2 + x - 2)$; 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$.

Розв'язання. 1) Оскільки функція $f(x) = x^2 + x - 2$ є неперервною у будь-якій точці числової осі, то вона неперервною і в точці $x = a$. Тому $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = a^2 + a - 2$.

2) Функція $y = \sin x$ є неперервною у будь-якій точці ислової осі. Тому $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що таке числова послідовність? Навести приклади.

2. Сформулювати означення границі числової послідовості.

3. Яка послідовність називається нескінченно малою? Навести приклади.

4. Сформулювати теореми про властивість нескінченно малих послідовностей.

5. Сформулювати основні теореми про границі числових послідовностей.

6. Сформулювати означення границі функції в точці. Навести приклади границь, якщо в точці функція існує; якщо не існує.

7. Яка функція називається нескінченно малою?

8. Сформулювати теореми про властивості нескінченно малих функцій.

9. Сформулювати означення неперервної в точці функції. Навести приклади неперервної і розривної в точці функцій.

10. Яка функція називається неперервною на проміжку $(a; b)$? Навести приклади.

14. Користуючись основними теоремами про границі, знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left|x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x}\right|$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1} - (x+1)}{\sqrt{x+1} - 1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

15. Користуючись означенням неперервності функції в точці, знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$.

16. Дослідити на неперервність функції. Довести що:

1) функція $y = |x|$ неперервна на всій числовій осі;

2) функція $y = \frac{1}{x}$ неперервна в кожній точці $x \neq 0$;

3) функція $y = \sqrt{x}$ неперервна в кожній точці $x > 0$;

4) функція $y = \cos x$ неперервна на всій числовій осі;

5) функція $y = \operatorname{tg} x$ неперервна в усіх точках числової осі, крім тих точок, в яких $\cos x = 0$.

ПОХІДНА

§ 1. Задачі, які приводять до поняття похідної

1. Задача про миттєву швидкість. Розглянемо рівномір-ий прямолінійний рух. Відомо, що закон (залежність дов-ини шляху s від часу t) рівномірного руху виражається нійною функцією

$$s = at + b, \qquad (1)$$

a і b – сталі числа.

Розглянемо два різні моменти часу: t і $t + \Delta t$ ($\Delta t > 0$ – иріст часу). Довжину шляху, який матеріальна точка оходить за час Δt, позначимо Δs (приріст довжини ляху). Тоді, згідно з рівністю (1), $\Delta s = a(t + \Delta t) + b - (at + b) = a\Delta t$.

Знайдемо відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a.$$

З фізики відомо, що відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ називається серед оюю швидкістю і позначається v_c. Отже, для рівномірного уху

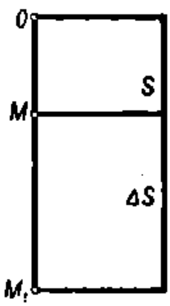
$$v_c = a \qquad (2)$$

сталою і не залежить від часу Δt. Вона залишається ті-о самою у будь-які моменти часу. Тому природно серед-ю швидкість для рівномірного руху вважати миттєвою швидкістю, або швидкістю у даний момент часу. Оскіль-и у будь-які моменти часу миттєва швидкість однакова, її називають швидкістю рівномірного руху.

Розглянемо нерівномірний рух. Нехай, наприклад, матеріальна точка M падає у середовищі без опору. Відраховуватимемо час t від початку падіння. Тоді, як відомо, закон такого руху виражається формулою

$$s = \frac{gt^2}{2}, \qquad (3)$$

де $g = 9,81$ м/с^2 — прискорення вільного падіння.



Мал. 113

Поставимо задачу: обчислити швидкість руху точки у момент часу $t_0 = 4$ с, якщо точка знаходиться у положенні M (мал. 113).

Розв'яжемо цю задачу, користуючись поняттям середньої швидкості. Для цього виконаємо чотири кроки.

1) Надамо аргументу t_0 приріст Δt, тобто крім моменту часу t_0 розглянемо момент часу $t_0 + \Delta t$ ($\Delta t > 0$). Нехай у момент часу $t_0 + \Delta t$ рухома точка знаходиться у положенні M_1.

2) За час Δt точка пройде шлях, який позначимо Δs і назвемо приростом шляху (на мал. 113 цей шлях дорівнює довжині відрізка MM_1). Спираючись на (3), обчислимо приріст шляху:

$$\Delta s = \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt_0\Delta t + \frac{g(\Delta t)^2}{2} =$$

$$= \Delta t\left(gt_0 + \frac{g\Delta t}{2}\right).$$

3) Знайдемо середню швидкість:

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0 + \frac{g\Delta t}{2}. \qquad (4)$$

Покладемо $t_0 = 4$ с, а $\Delta t = 1; 0,1; 0,01; 0,001$ с .... Обчислимо за формулою (4) відповідні значення v_c, взявши для спрощення обчислень $g \approx 10$м/с^2. Здобуті значення запишемо в таблицю 13.

Отже, на відміну від рівномірного руху, середня швидкість у розглядуваному випадку вже не є сталою. Вона у фіксований момент часу t_0 залежить від приросту часу Δt. При різних значеннях Δt середня швидкість v_c набуває різних значень.

4) Нехай $\Delta t \to 0$. Чим менший інтервал часу Δt після моменту часу t_0, тим точніше середня швидкість характеризуватиме швидкість точки у момент t_0. З таблиці випливає, що значення середньої швидкості прямують до числа 40, якщо $\Delta t \to 0$. Тому природно за швидкість v точки у момент часу $t_0 = 4$ с взяти границю v_c, коли $\Delta t \to 0$.

Отже, $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Швидкістю точки у момент часу t називається границя середньої швидкості v_c за інтервал часу Δt, коли Δt прямує до нуля.

Таблиця 13

$s(t_0)$	Δt	$t_0 + \Delta t$	$s(t_0 + \Delta t)$	$\Delta s(t_0)$	$v_c = \dfrac{\Delta s(t_0)}{\Delta t}$
80	1	5	125	45	45
80	0,1	4,1	84,05	4,05	40,5
80	0,01	4,01	80,4005	0,4005	40,05
80	0,001	4,001	80,040005	0,040005	40,005
80	0,0001	4,0001	80,00400005	0,00400005	40,0005

Перейшовши у формулі (4) до границі, коли $\Delta t \to 0$, маємо:

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt_0 + \frac{g\Delta t}{2} \right) = gt_0.$$

Отже, швидкість точки, яка вільно падає, у момент t_0 дорівнює $v = gt_0$.

Коли $t_0 = 4$ с, $g \approx 10$ м/с^2, маємо $v = 40$ м/с; коли $t_0 = 5$ с, $v = 50$ м/с.

Зазначимо, що при фіксованому значенні t_0 границею середньої швидкості є число. Але для різних значень t_0 ці числа різні. Отже, оскільки кожному значенню t_0 відповідає єдина певна границя, то можна стверджувати, що границя є функцією t, тобто

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0}\left(gt + \frac{g\Delta t}{2}\right) = gt.$$

Дістали відому з курсу фізики формулу.

Розглянемо загальний випадок. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно, а закон руху її задано деякою функцією

$$s = f(t). \tag{6}$$

Поставимо задачу: знайти швидкість точки у момент часу t. Використаємо наведене вище означення. Тоді швидкість v точки, яка рухається за законом (6), у момент часу t визначається співвідношенням $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_c$. Підставляючи значення $v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, дістанемо формулу

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{7}$$

Знайдемо приріст шляху Δs. Для цього часу t надамо приросту Δt. Тоді із (6) дістанемо вираз для приросту шляху

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t). \tag{8}$$

Підставляючи у (7) значення Δx, остаточно матимемо таку формулу:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{9}$$

Приклад 1. Нехай точка рухається рівноприскорено з прискоренням a і початковою швидкістю v_0. Знайти її швидкість у момент часу t.

Розв'язання. Відомо, що залежність шляху від часу у рівноприскореному русі виражається формулою

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{10}$$

1) Надамо t приріст Δt.

2) Знайдемо приріст шляху:

$$\Delta s = v_0(t + \Delta t) + \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} - \left(v_0 t + \frac{at^2}{2}\right).$$

Спрощуючи вираз у правій частині, дістанемо:

$$\Delta s = v_0 \Delta t + at\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} = \Delta t\left(v_0 + at + \frac{a\Delta t}{2}\right).$$

3) Знайдемо середню швидкість як відношення приросту функції s до приросту аргументу t:

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0 + at + \frac{a\Delta t}{2}.$$

4) Перейдемо в останній рівності до границі, коли $\Delta t \to 0$, знаходимо

$$v = v_0 + at, \tag{11}$$

тобто дістанемо відому з курсу фізики основної школи формулу.

П р и к л а д 2. Нехай точка рухається так, що закон її руху виражено формулою $s = t^3 - 5t^2 + t + 2$. Визначити: 1) середню швидкість точки за інтервал від $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с; 2) знайти швидкість точки на початку і в кінці цього інтервалу.

Р о з в' я з а н н я. Як і в першому прикладі, надамо аргументу t приросту Δt і знайдемо приріст шляху Δs. Для цього розглянемо два моменти часу t і $t + \Delta t$. Тоді

$$\Delta s = (t+\Delta t)^3 - 5(t+\Delta t)^2 + (t+\Delta t) + 2 - (t^3 - 5t^2 + t + 2),$$

або після спрощення

$$\Delta s = 3t(\Delta t)^2 + 3t^2\Delta t + (\Delta t)^3 - 10t\Delta t - 5(\Delta t)^2 + \Delta t.$$

Обчислимо середню швидкість за інтервал часу Δt:

$$v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t\Delta t + 3t^2 + (\Delta t)^2 - 10t - 5\Delta t + 1. \tag{12}$$

Підставивши сюди значення $t = t_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$, знаходимо середню швидкість за інтервал від $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с: $v_c = 101$ м/с.

Знайдемо швидкість у будь-який момент часу t. Для цього у рівності (12) перейдемо до границі, коли $\Delta t \to 0$. Маємо:

$$v = 3t^2 - 10t + 1. \tag{13}$$

Підставляючи у формулу (13) окремі значення t, щоразу діставатимемо відповідні значення швидкості. Зокрема, підставивши у (13) значення $t_1 = 5$ с та $t_2 = 10$ с, знаходимо $v = 26$ м/с, $v = 201$ м/с.

2. Задача про значення змінного струму, який проходить у провіднику. Нехай у провіднику за час t через поперечний переріз проходить кількість електрики q, яка з часом змінюється. Зміна задається відповідною функцією

$$q = q(t). \tag{14}$$

Треба знайти значення сили струму, який проходить у провіднику в момент часу t.

Для розв'язування цієї задачі застосуємо той самий спосіб, що й у задачі 1.

1) Надамо t приріст $\Delta t > 0$.

2) Знайдемо приріст кількості електрики $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$.

3) Визначимо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} \tag{15}$$

(це відношення називається середньою силою струму за інтервал часу Δt і позначається I_c).

4) Знайдемо границю середньої сили струму, коли $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} I_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}. \tag{16}$$

Границя середньої сили струму за інтервал часу Δt називається силою струму в даний момент часу.

Отже, якщо через I позначити силу струму в момент часу t, то для її обчислення маємо таку формулу:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} I_c,$$

або

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}. \tag{17}$$

П р и к л а д 3. Нехай в момент часу t через поперечний переріз провідника проходить кількість електрики

$$q = \sqrt{2+t}. \tag{18}$$

Знайти силу струму в момент $t = 2$ с.

Р о з в' я з а н н я. За формулою (15) знайдемо середнє значення сили струму за інтервал часу Δt :

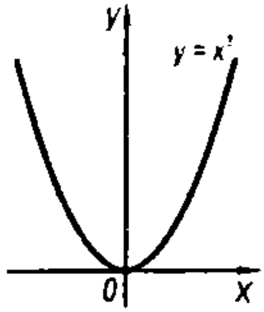
$$I_c = \frac{\sqrt{2+t+\Delta t} - \sqrt{2+t}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{2+t+\Delta t} + \sqrt{2+t}}.$$

Перейдемо до границі, коли $\Delta t \to 0$, і знайдемо значення сили струму в довільний момент часу t :

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+t+\Delta t} + \sqrt{2+t}} = \frac{1}{2\sqrt{2+t}}. \tag{19}$$

Підставляючи у формулу (19) значення $t = 2$, дістанемо відповідь: $I = \frac{1}{4}A$.

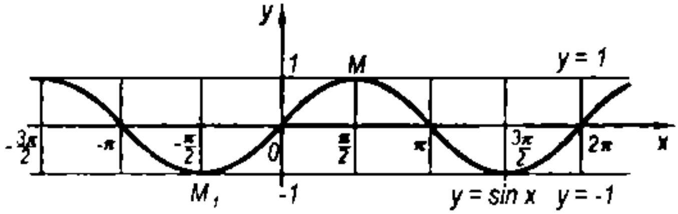
3. Задача про дотичну до кривої. З поняттям дотичної до кривої у даній точці ви ознайомилися в курсі геометрії, вивчаючи коло. Було наведено означення дотичної до кола як прямої, яка має з колом одну спільну точку. Але це означення є окремим випадком. Його не можна поширити, наприклад, на незамкнені криві. Справді, розглянемо параболу, рівняння якої $y = x^2$ (мал. 114). Вісь абсцис Ox і вісь ординат Oy мають з кривою у точці O по одній спільній точці. Отже, кожна з них, згідно з означенням, має бути дотичною до кривої у точці O. Проте це не так.



Мал. 114

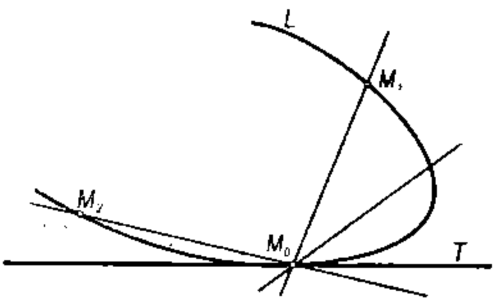
Розглянемо ще один приклад. Нехай задана крива є синусоїдою $y = \sin x$ (мал.115). Тоді пряма $y = 1$ має з даною кривою безліч спільних точок (а не одну!), і вона є дотичною до даної кривої, наприклад, у точці M. Це саме стосується і прямої $y = -1$, яка є дотичною до кривої, наприклад, у точці M_1 і має безліч спільних точок з кривою.

Тому, як випливає з наведених прикладів, слід дати загальне означення дотичної, яке б охоплювало як замкнені, так і незамкнені криві.



Мал. 115

Отже, нехай маємо деяку довільну криву L (мал. 116). Візьмемо на ній дві точки M_0 і M_1 і через них проведемо пряму M_0M_1, яку називатимемо січною. Якщо тепер точка M_1 рухатиметься уздовж кривої, то січна M_0M_1 повертатиметься навколо точки M_0. Нехай точка M_1, рухаючись вздовж кривої, наближається до точки M_0. Тоді довжина хорди M_0M_1 прямує до нуля. Якщо при цьому й величина кута M_1M_0T прямує до нуля, то пряма M_0T називається граничним положенням січної M_0M_1.



Мал. 116

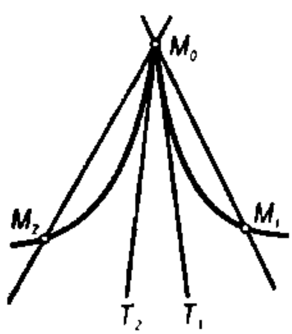
Отже, маємо таке означення.

Дотичною до кривої L у точці M_0 називається граничне положення M_0T січної M_0M_1, якщо точка M_1 прямує вздовж кривої до злиття з точкою M_0.

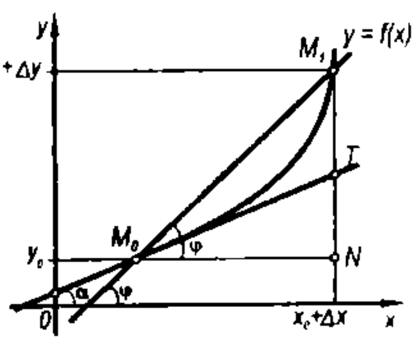
Зазначимо, що з якого б боку точка M_1 не наближа-
ася по кривій до точки M_0, січна M_0M_1 при цьому має
іаближатися до того самого її граничного положення (до
ієї самої прямої). Тільки у цьому разі кажуть, що у точці
M_0 крива має дотичну. Не кожна крива у розглядуваній
очці має дотичну. Граничного положення січної може і не
снувати.

Із малюнка видно, що з якого боку точка M_1 по кри-
ій не рухалась би до точки M_0, січна M_0M_1, обертаючись
іавколо точки M_0, при цьому наближається до тієї самої
прямої M_0T.

Якщо січна M_0M_1 наближається до різних прямих
мал. 117) залежно від того, з якого боку $M_1 \to M_0$,
о кажуть, що в даній точці дотичної до кривої не існує.
Так, дотичної до кривої у точці M_0 не існує, бо коли точка
$M_1 \to M_0$ і знаходиться справа від M_0, то січна M_1M_0 на-
ближається до прямої M_0T_1. А якщо $M_2 \to M_0$ і знаходи-
ться зліва, то січна M_2M_0 наближається до прямої M_0T_2.



Мал. 117



Мал. 118

Поставимо задачу: провести дотичну до графіка функ-
ції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$.

Положення дотичної до кривої в заданій точці цілком
визначається кутом нахилу її до додатного напряму осі
Ox. Отже, треба знайти цей кут.

Для цього виконаємо чотири кроки.

1) Надамо абсцисі x_0 приросту Δx. Нове значення абс-
циси $x_0 + \Delta x$ визначає нове значення ординати $y_0 +$
$+\Delta y$. Цим самим від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ перейдемо до
точки $M_1(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ (мал. 118).

2) Визначимо приріст ординати, тобто приріст функції Δy. Для цього досить від нового значення функції $f(x_0 + +\Delta x)$ відняти попереднє значення $f(x_0)$:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Геометрично Δy дорівнює довжині відрізка NM_1, тобто приросту ординати при переході від точки M_0 до точки M_1.

3) Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. З ΔM_0NM_1 випливає, що це відношення дорівнює тангенсу кута нахилу φ, утвореного січною M_0M_1 з додатним напрямом осі Ox, тобто $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$.

4) Нехай тепер $\Delta x \to 0$, тоді і $\Delta y \to 0$ (внаслідок неперервності функції $y = f(x)$), а тому точка M_1, рухаючись по кривій, буде прямувати до точки M_0, а січна M_0M_1 прямуватиме до свого граничного положення, тобто до положення дотичної M_0T. Це означає, що кут φ нахилу січної M_0M_1 буде прямувати до кута α нахилу дотичної M_0T, а $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$, якщо $\Delta x \to 0$.

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha = k$, де k — кутовий коефіцієнт дотичної M_0T.

Знаючи $\operatorname{tg}\alpha$, можна знайти кут α і побудувати дотичну до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$.

Проаналізувавши розв'язання розглянутих трьох задач (про миттєву швидкість, значення сили змінного струму в провіднику і проведення дотичної до кривої у певній точці), дійдемо висновку, що всі вони розв'язувались одним і тим самим способом, який складається з чотирьох кроків:

1) незалежній змінній x надаємо приросту Δx;

2) знаходимо приріст залежної змінної Δy;

3) складаємо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) знаходимо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при цьому виражає середню швидкість ини функції, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – швидкість зміни функції зада-іго значення аргументу x, або, що те саме, у точці x.

Оскільки за допомогою $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ розв'язують крім роз-янутих ще й багато інших важливих задач (наприклад, ю швидкість протікання хімічної реакції, знаходження нійної густини неоднорідного стержня, теплоємності ті-і при нагріванні, кутової швидкості тіла, що обертається, і ін.), то доцільно всебічно вивчити цю границю, зокре-а, вказати способи її обчислення. При цьому змінні x і доводиться розглядати абстрактно, не вкладаючи в них нкретного змісту, тобто доводиться узагальнити спосіб зв'язування розглянутого виду задач. Цю границю в ма-матиці називають *похідною*.

§ 2. Похідна. Механічний та геометричний зміст похідної

1. Означення похідної. Правило знаходження похідної. ехай функція $y = f(x)$ задана на деякому інтервалі ; b). Візьмемо довільну точку x_0, що належить цьому ін-рвалу. Виконаємо відомі чотири кроки:

1) надамо значенню x_0 довільного приросту Δx (число x може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, об точка $x_0 + \Delta x$ належала інтервалу $(a;\ b)$;

2) обчислимо в точці x_0 приріст $\Delta y = \Delta f(x_0)$ функції: $y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

3) складемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

4) знайдемо границю цього відношення, якщо $\Delta x \to 0$, обто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо дана границя існує, то її називають похідною ункції $y = f(x)$ в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$ або y'.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту Δy функції до приросту Δx аргументу за умови, що приріст Δx аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Кроки 1) — 4) фактично визначають правило знаходження похідної.

Застосовуючи поняття похідної до розглянутих вище трьох задач, можемо стверджувати, що миттєва швидкість нерівномірного руху є похідною від шляху $s = f(t)$, тобто $v = s' = f'(t)$. Це механічний зміст похідної.

Задача про дотичну дає змогу з'ясувати геометричний зміст похідної: похідна $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту $k = \operatorname{tg} \alpha$ дотичної до кривої, проведеної у точці $M_0(x_0; y_0)$.

Зазначимо, що коли похідна знаходиться у певній точці x_0, то вона як границя є певним числом $f'(x_0)$. Але для різних значень x_0 такі числа можуть бути різними, і кожному x_0 відповідатиме своє число $f'(x_0)$. Зокрема в задачі про миттєву швидкість, коли $t_0 = 4$ с, $v = 40$ м/с, а коли $t_0 = 5$ с, $v = 50$ м/с.

Отже, похідна функції $y = f(x)$, якщо вона існує в кожній точці інтервалу $(a; b)$, є також функцією аргументу x. Тоді її позначають символом $f'(x)$ і за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо функцію задано формулою, наприклад, $y = x^2$, то похідну позначають також символом $(x^2)'$.

Наведемо приклади застосування означення похідної для знаходження похідних окремих функцій. Оскільки на кроці 1) правила знаходження похідної ніяких обчислень фактично не доводиться виконувати, то при знаходженні похідних починають з кроку 2). Якщо похідну треба знайти у будь-якій точці x з $(a; b)$, то правило залишається тим самим, тільки замість x_0 ставимо x.

П р и к л а д 1. Знайти похідну від функції $y = x^2$ у ...ці $x_0 = 1$.

Р о з в' я з а н н я. Користуємося наведеним правилом. Знаходимо приріст Δy функції $y = x^2$ у точці x:

$$...y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Складаємо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

находимо границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

Отже, похідна функції $y = x^2$ у точці x існує: $f'(x) = 2x$. Коли $x = 1$, то $f'(1) = 2$.

П р и к л а д 2. Знайти похідну функції $y = x^3 + x^2 + 4x + 1$ у точці $x_0 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо приріст Δy у точці $x_0 = 0$:

$$\Delta y = (\Delta x)^3 + (\Delta x)^2 + 4\Delta x = \Delta x((\Delta x)^2) + \Delta x + 4).$$

...ді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x((\Delta x)^2 + \Delta x + 4)}{\Delta x} = (\Delta x)^2 + \Delta x + 4.$$

Обчислимо границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}((\Delta x)^2 + \Delta x + 4) = 4.$$

Отже, похідна функції $y = x^3 + x^2 + 4x + 1$ у точці ... $= 0$ існує і $f'(0 = 4)$.

П р и к л а д 3. Знайти похідну функції

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

точці $x_0 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо приріст y у точці $x_0 = 0$.

$$\Delta y = (\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Обчислимо границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0.$$

Отже, похідна заданої функції в точці $x_0 = 0$ існує, $f'(0) = 0$.

П р и к л а д 4. Довести, що функція $y = |x|$ у точці $x = 0$ похідної не має.

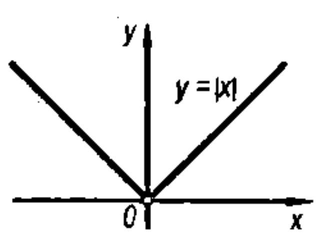
Р о з в' я з а н н я. Знаходимо приріст заданої функції у точці $x = 0$. Маємо $\Delta y = |\Delta x|$.

Знайдемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $x \to 0$, границі не має.

Зазначимо, що з графіка функції $y = |x|$ (мал. 119) випливає, що в точці $O(0;0)$ провести дотичну не можна, у цій точці крива, яка є графіком даної функції має перегин.



Мал. 119

П р и к л а д 5. Враховуючи геометричний зміст похідної, виведемо рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k має вигляд $= kx + b$. Оскільки для дотичної $k = f'(x_0)$, то

$$y = f'(x_0)x + b. \qquad (1)$$

Щоб знайти b, скористаємося тим, що дотична прохо-ıть через точку $M_0(x_0;\ y_0)$. Це означає, що її коорди-ıти задовольняють рівняння дотичної, тобто $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, звідки $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Підставимо значення b у рівняння (1). Дістанемо

$$y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0),$$

ю

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2)$$

Отже, рівняння (2) є шукане рівняння дотичної.

Використовуючи рівняння дотичної і формулу $(x^2)' = 2x$, доведемо, що дотичною до параболи $y = x^2$ у точці $I_0(0;\ 0)$ є вісь Ox.

Справді, оскільки $f(x_0) = (x_0^2)_{x_0=0} = 0$, $f'(x_0) = (2x_0)_{x_0=0} = 0$, то, підставляючи значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ рівняння (2) дотичної, дістанемо $y = 0+0\cdot(x-0)$; звідки $= 0$, а це і є рівняння осі Ox.

Наведемо таке означення.

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 називається диференці-ɔвною, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Якщо функція $y = f(x)$ є диференційовною в кожній очці деякого інтервалу $(a;\ b)$, то вона називається ди-ıеренційовною на цьому інтервалі.

Природно поставити запитання: який існує зв'язок іж неперервністю функції в точці і диференційовністю її цій точці? Зокрема, якщо функція неперервна в точці, то ı буде вона в цій точці диференційовною? Щоб дати від-ɔвідь на ці запитання, розглянемо приклад.

Функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ є неперервною, бо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0,$$

ıе вона не є в точці $x = 0$ диференційовною. Отже, не ɔжна функція неперервна в точці є диференційовною в ій точці.

Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 є диференційовною, то вона в цій точці неперервна.

Д о в е д е н н я. Нехай $y = f(x)$ в точці x_0 має похідну $f'(x_0)$, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Запишемо приріст функції Δy в точці x_0 у вигляді

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Отже, границя приросту функції в точці x_0 дорівнює нулю. Тому функція $y = f(x)$ в точці x_0 є неперервною. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що неперервність функції в точці є тільки необхідною умовою дифеоенційовності функції в даній точці.

§ 3. Похідні елементарних функцій

Виведемо формули для похідних елементарних функцій, причому на відміну від попередніх прикладів, знаходитимемо похідну в довільній точці.

1. Похідна сталої функції. Нехай на деякому проміжку $\langle a;\ b \rangle$ задано сталу функцію $y = c = \text{const}$. Тоді її значення у точках x і $x + \Delta x$ рівні між собою при будь-якому x. Тому приріст $\Delta y = 0$, а отже, й $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Перейшовши до границі в останній рівності, коли $\Delta x \to 0$, знаходимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Отже, границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$ існує і ірівнює нулю. Тому існує і похідна цієї функції в довільній точці x, яка також дорівнює нулю, тобто, якщо $= c = \text{const}$, то $y' = 0$, отож, $c' = 0$.

Похідна сталої функції дорівнює нулю. Наприклад, ,що $y = 2$, то $y' = 0$.

2. Похідна степеневої функції з цілим показником. Розінемо спочатку окремі приклади.

Приклад 1. Знайдемо похідну функції $y = x$ у вільній точці x.

Знайдемо приріст цієї функції Δy в точці x:

$$\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$.

Отже, похідна y' функції $y = x$ у будь-якій точці x ,нує і дорівнює 1, тобто $x' = 1$.

Раніше доведено, що похідна функції $y = x^2$ в точці x дорівнює $2x$, тобто $(x^2)' = 2x$.

Приклад 2. Знайдемо похідну функції $y = x^3$ у вільній точці x.

Знайдемо приріст функції $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Перейдемо у цій рівності до границі, коли $\Delta x \to 0$. Дізнемо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$.

Отже, похідна y' функції $y = x^3$ в точці x існує і дорівює $y' = 3x^2$, тобто $(x^3)' = 3x^2$.

У розглянутих прикладах помічаємо таку закономірість: похідна степеневих функцій x, x^2, x^3 дорівнює познику степеня, помноженому на цю функцію в степені, одиницю меншому:

$$= x,\ y' = 1 \cdot x^0, y = x^2,\ y' = 2 \cdot x, y = x^3,\ y' = 3 \cdot x^2.$$

Переконаємося, що дана закономірність є справедливою для степеневої функції $y = x^n$ з будь-яким натуральним показником:

$$y = x^n, \; y' = n \cdot x^{n-1}. \tag{1}$$

Формулу (1) доведемо в наступному параграфі.

Розглянемо ще приклади.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{x}$ у будь-якій точці $x \neq 0$.

Надамо x довільного приросту Δx, але такого, щоб $x + \Delta x \neq 0$. Тоді і функція y дістане приріст

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Знайдемо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$.

Перейдемо в цій рівності до границі, коли $\Delta x \to 0$. Дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}.$$

Отже, похідна y' функції $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ існує і дорівнює $y' = -x^{-2}$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{x^2}$ у будь-якій точці $x \neq 0$.

Надамо x такого приросту Δx, щоб $x + \Delta x \neq 0$. Тоді і функція y дістане приріст

$$\Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{x^2(x + \Delta x)^2} = -\frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{x^2(x + \Delta x)^2}.$$

Знайдемо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x + \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2}$.

Перейдемо у цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$. Дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{2x + \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2} \right) = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}.$$

Отже, похідна y' функції $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ існує і дорівнює $y' = -2x^{-3}$.

Із прикладів 3, 4 можна зробити такий висновок: похідна функції $y = x^{-k}$, де $k > 0$ – ціле число, існує у кожній точці $x_0 \neq 0$ і дорівнює

$$y' = -kx^{-k-1}. \qquad (2)$$

Формулу (2) також доведемо у наступному параграфі.

Формули (1), (2) дають змогу сформулювати таке твердження: *похідна степеневої функції $y = x^m$ з цілим показником існує і дорівнює показнику степеня, помноженому на цю функцію у степені, на одиницю меншому, тобто*

$$y' = mx^{m-1} \qquad (3)$$

коли $m < 0$, x не може дорівнювати нулю).

Так, наприклад, $y = x^{10}$, $y' = 10x^9$, $y = x^{-5}$, $y' = -5x^{-6}$.

П р и к л а д 5. Знайти похідну від функції $y = \sqrt{x}$.

1. Надамо x такого приросту Δx, щоб $x + \Delta x \neq 0$; тоді

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}.$$

2. Знайдемо приріст функції:

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

3. Складемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

4. Знайдемо границю відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Отже, похідна y' функції $y = \sqrt{x}$ існує і дорівнює

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. Похідні тригонометричних функцій. ***Похідна функції*** $y = \sin x$. Надамо x довільного приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді функція y дістане приріст

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Перейдемо у цій рівності до границі, коли $\Delta x \to 0$. Внаслідок неперервності функції $\cos x$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \cos x.$$

Для другого співмножника, позначивши $\frac{\Delta x}{2} = \alpha$, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\alpha \to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Тому

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) = \cos x.$$

Отже, похідна функції $y = \sin x$ існує у довільній точці $x \in (-\infty; +\infty)$ і дорівнює $\cos x$, тобто

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{4}$$

Похідна функції $y = \cos x$. Аналогічно доводиться, що похідна функції $y = \cos x$ у довільній точці $x \in \in (-\infty; +\infty)$ існує і дорівнює $-\sin x$, тобто

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{5}$$

Похідна $y = \operatorname{tg} x$. Візьмемо довільну точку $x \in \langle a;\ b\rangle$, де $\langle a;\ b\rangle$ – один із інтервалів, де визначена функція $\operatorname{tg} x$. Знайдемо приріст

$$\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin(x + \Delta x)\cos x - \sin x \cos(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)\cos x} =$$

$$= \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x)\cos x}$$

і складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\cos(x + \Delta x)\cos x}$.

Перейдемо до границі, коли $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\cos(x + \Delta x)\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, похідна функції $y = \operatorname{tg} x$ існує і дорівнює

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{6}$$

Похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$. Аналогічно доводиться, що похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$ існує у довільній точці $x \in \in \langle a;\ b\rangle$, де $\langle a;\ b\rangle$ – один із інтервалів, де визначена функція $\operatorname{ctg} x$, і дорівнює

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Виконайте доведення самостійно.

§ 4. Теореми про похідні алгебраїчної суми, добутку і частки функції

Доведемо ряд теорем, які широко використовують для знаходження похідних функцій.

Похідна суми. **Теорема 1. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ в точці x мають похідні, то функція $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ в цій точці також має похідну, яка дорівнює**

$$y' = (f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x).$$

Доведення. Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ матимуть прирости $\Delta f_1(x)$ і $\Delta f_2(x)$, а функція y матиме приріст $\Delta y = \Delta f_1(x) \pm \Delta f_2(x)$.

Знайдемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \dfrac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}$.

Перейдемо у цій рівності до границі, коли $\Delta x \to 0$. Оскільки $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у точці x за умовою теореми мають похідні, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} = f_1'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_2'(x).$$

Тому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_1'(x) \pm f_2'(x).$$

Отже, згідно з означенням похідної у точці x, існує похідна функції y, яка дорівнює

$$y' = f_1'(x) \pm f_2'(x). \tag{1}$$

Теорему 1 можна узагальнити для будь-якої скінченної суми функцій: *похідна суми скінченного числа функцій дорівнює сумі похідних від цих функцій, якщо похідні даних функцій існують, тобто*

$$(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))' =$$

$$= f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x). \qquad (2)$$

П р и к л а д 1. Знайти похідну функції $y = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + 5$.

Р о з в ' я з а н н я. За формулою (2) маємо: $y' = (\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + 5)' = (\sin x)' + (\cos x)' + (\operatorname{tg} x)' + (5)'$.

Знаючи похідні кожної функції, дістанемо:

$$y' = \cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Похідна добутку. **Теорема 2. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ в точці x мають похідні, то в цій точці функція $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$ також має похідну, яка дорівнює**

$$y' = f_1(x) \cdot f_2'(x) + f_1'(x) f_2(x). \qquad (3)$$

Д о в е д е н н я. Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ матимуть прирости $\Delta f_1(x)$, $\Delta f_2(x)$, а функція y дістане приріст

$$\Delta y = (f_1(x) + \Delta f_1(x))(f_2(x) + \Delta f_2(x)) - f_1(x) f_2(x) =$$

$$= f_1(x)\Delta f_2(x) + f_2(x)\Delta f_1(x) + \Delta f_1(x)\Delta f_2(x).$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f_1(x) \cdot \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} + f_2(x) \cdot \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} \cdot \Delta f_2(x).$$

Перейдемо у цій рівності до границі, коли $\Delta x \to 0$. За умовою теореми:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_2'(x), \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} = f_1'(x),$$

а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f_2(x) = 0$, бо $f_2(x)$ неперервна в точці x.

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f_1(x) f_2'(x) + f_1'(x) f_2(x)$.

Зазначимо, що коли один співмножник, наприклад, $f_1(x) = c =$ const, то $f_1'(x) = 0$ і формула (3) набирає вигляду $y' = c f_2'(x)$. Якщо в добутку один співмножник сталий, то похідна від такого добутку дорівнює

сталому співмножнику, помноженому на похідну змінного співмножника.

Дану теорему можна узагальнити і на випадок n співмножників. Зокрема, для похідної від добутку трьох функцій:

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x))' =$$

$$= f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3'(x) + f_1(x) \cdot f_3(x) \cdot f_2'(x) + f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot f_1'(x).$$

П р и к л а д 2. Знайти похідну функції $y = x^3 \sin x$.

Р о з в' я з а н н я. За формулою (3),

$$y' = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x.$$

П р и к л а д 3. Знайти похідну функції $y = 10\mathrm{ctg}\, x + 5\cos x + x^6 \mathrm{tg}\, x$.

Р о з в' я з а н н я.

$$y' = 10(\mathrm{ctg}\, x)' + 5(\cos x) + (x^6 \mathrm{tg}\, x)' =$$

$$= -\frac{10}{\sin^2 x} - 5\sin x + \frac{x^6}{\cos^2 x} + 6x^5 \mathrm{tg}\, x.$$

П р и к л а д 4. Довести, що функція $y = x^n$, де n - натуральне число, має похідну

$$y' = nx^{n-1}. \tag{4}$$

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося методом математичної індукції. Цей метод ґрунтується на такому принципі: якщо деяке твердження $A(n)$ відносно натурального числа n правильне для $n = 1$ і з припущення, що воно правильне для $n = k$, випливає, що воно правильне для наступного числа $n = k + 1$, то це твердження правильне для будь-якого натурального числа n.

Щоб довести твердження методом математичної індукції, треба:

1) перевірити правильність твердження для $n = 1$;

2) припустити, що воно правильне для k, і на підставі цього припущення і вже відомих тверджень довести, що твердження правильне для $n = k + 1$;

3) зробити висновок, що згідно з принципом математичної індукції доводжуване твердження правильне для будь-якого натурального числа n.

Доводжувана формула $y' = (x^n)' = nx^{n-1}$ є твердженням відносно натурального числа n. Виконаємо три кроки:

1) переконаємося, що формула правильна для $n = 1$. У § 3 було доведено, що $y' = (x)' = 1$. Отже $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$, тобто для $n = 1$ формула (4) правильна;

2) припустимо, що формула (4) правильна для $n = k$, тобто $y' = (x^k)' = kx^{k-1}$, і доведемо, що формула (4) правильна для $n = k + 1$.

Справді, використовуючи теорему про похідну добутку двох функцій і припущення, дістанемо,

$$y' = (x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x \cdot kx^{k-1} + x^k = kx^k + x^k = (k+1)x^k;$$

3) згідно з принципом математичної індукції формула $y' = (x^n)' = nx^{n-1}$ виконується для будь-якого n.

Похідна частки. **Теорема 3. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ в точці x мають похідні і $f_2(x) \neq 0$, то функція $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ також у точці x має похідну**

$$y' = \frac{f_2(x)f_1'(x) - f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

Доведення. Надамо x приросту Δx. Тоді функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ матимуть відповідно прирости $\Delta f_1(x)$, $f\Delta f_2(x)$, а функція y матиме приріст

$$\Delta y = \frac{f_1(x) + \Delta f_1(x)}{f_2(x) + \Delta f_2(x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_2(x)\Delta f_1(x) - f_1(x)\Delta f_2(x)}{(f_2(x) + \Delta f_2(x))f_2(x)}$$

Знайдемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x)\frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} - f_1(x) \cdot \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x}}{(f_2(x) + \Delta f_2(x))f_2(x)}.$$

За умовою даної теореми, функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ в точці x мають похідні, а це означає, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1(x)}{\Delta x} = f_1'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2(x)}{\Delta x} = f_2'(x).$$

Крім того, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f_2(x) = 0$, оскільки функція $f_2(x)$ неперервна. Тому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x)\cdot f_1'(x) - f_1(x)\cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

З останньої рівності й випливає формула (5).

П р и к л а д 5. Знайти похідну функції $y = \dfrac{x^2+1}{x^4+2}$.

Р о з в' я з а н н я. За формулою (5).

$$y' = \frac{(x^4+2)(x^2+1)' - (x^2+1)(x^4+2)'}{(x^4+2)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^4+2) - 4x^3(x^2+1)}{(x^4+2)^2} = \frac{2x(2-x^4-2x^2)}{(x^4+2)^2}.$$

П р и к л а д 6. Користуючись формулою (5), знайти похідну функції $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо похідну функції $y = \operatorname{tg} x$ (для $y = \operatorname{ctg} x$ похідну знаходять аналогічно). Подамо $\operatorname{tg} x$ у вигляді $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Тоді, згідно з формулою (5):

$$y' = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

П р и к л а д 7. Вивести формулу похідної функції $y = \dfrac{c}{f(x)}$, де $c = \text{const}$, $f(x) \neq 0$ і в точці x має похідну.

Р о з в' я з а н н я. Використаємо формулу (5), вважаючи $f_1(x) = c$, $f_2(x) = f(x)$. Маємо:

$$y' = \frac{f(x)\cdot c' - c\cdot f'(x)}{(f(x))^2} = -\frac{cf'(x)}{(f(x))^2}. \qquad (6)$$

Це і є шукана формула.

П р и к л а д 8. Знайти похідну функції $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Р о з в' я з а н н я. За формулою (6),

$$y' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}.$$

Аналогічно можна довести, що похідна функції $y = \frac{1}{\sin x}$ дорівнює $y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}$.

Приклад 9. Знайти похідну функції $y = x^{-k}$, де k – ціле число.

Розв'язання. Запишемо дану функцію у вигляді $y = \frac{1}{x^k}$. Тоді, згідно з формулою (6):

$$y' = -\frac{(x^k)'}{(x^k)^2} = -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}}.$$

Після скорочення на x^{k-1} дістанемо:

$$y' = \frac{-k}{x^{k+1}} = -kx^{-k-1}.$$

Це і є формула (3) § 3.

Похідна складеної функції. Спочатку з'ясуємо, що таке складена функція. З прикладами складеної функції ми вже зустрічалися, будуючи графіки функцій виду $y = f(kx)$, $y = f(x \pm a)$. Наприклад, функцію $y = \sqrt{x-5} = (x-5)^{\frac{1}{2}}$ можна розглядати як $\frac{1}{2}$ степінь лінійної функції $u = x - 5 = h(x)$. Щоб обчислити значення складеної функції при певному значенні x, доведеться виконати дві операції:

1) обчислити значення різниці $x - 5$; 2) добути арифметичний корінь із значення цієї різниці.

Перша операція кожному x ставить у відповідність певне число. Отже, маємо одну функцію $u = h(x) = x - 5$. Друга операція знайденому числу ставить у відповідність також певне число. Маємо другу функцію $y = g(u) = \sqrt{u} = \sqrt{h(x)} = g(h(x)) = f(x)$.

Функцію $y = f(x) = g(h(x))$ називають складеною функцією аргументу x. Змінну u назвемо проміжною змінною.

Областю визначення функції $u = h(x) = x - 5$ є множина дійсних чисел R, областю визначення функції $y = g(u) = \sqrt{u}$ є множина невід'ємних значень u. Отже, значення u мають задовольняти умову $u \geqslant 0$, або $x - 5 \geqslant 0$. Звідси $x \geqslant 5$.

Отже, областю визначення складеної функції $y = f(x) = \sqrt{5-x}$ є множина $[5; \infty)$.

Слід навчитися у складеній функції визначати проміжну змінну, яка є також функцією. Наприклад, для функції $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ проміжною змінною u є лінійна функція $u = 2x + \frac{\pi}{4}$. Для функції $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ проміжною змінною є квадратична функція $u = x^2 - 5x + 6$, при цьому задані функції можна записати у вигляді $y = \sin u$, $y = \sqrt{u}$.

Строге доведення теореми про похідну складеної функції міститься у курсі математичного аналізу. Ми наводимо доведення з певними обмеженнями, які його спрощують.

Нехай функція $u = h(x)$, де u — проміжне значення для складеної функції, має похідну у точці x_0, а функція $y = g(u)$ має похідну у точці $u_0 = h(x_0)$. Це означає, що існують границі $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$.

Надамо значенню x_0 приросту Δx. Тоді змінна u набуде приросту Δu, який, у свою чергу, зумовить приріст Δy функції $y = f(x) = g(u)$, де $u = h(x)$.

Щоб знайти похідну $y' = f'(x_0)$, треба обчислити $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Припустимо, що при досить малих $\Delta x \neq 0$ відповідне Δu також не дорівнює нулю. Подамо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

За теоремою про границю добутку, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, оскільки $\Delta u \to 0$, коли $\Delta x \to 0$. Справді, функція $u = h(x)$ диференційовна, а тому неперервна.

Оскільки обидві границі, що є в правій частині рівності, за умовою існують, то існує і границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Отже, $f'(x_0) = g'(u_0) \cdot h'(x_0)$.

Позначимо $g'(u_0) = y'_u$, щоб підкреслити, що похідну функції g шукаємо по u, а $h'(x_0) = u'_x$, бо похідну функції h шукаємо по x. Тоді формулу похідної складеної функції $y = f(x)$ запишемо скорочено у вигляді $y' = y'_u \cdot u'_x$, тобто похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжній змінній u на похідну проміжної змінної u по змінній x.

Проілюструємо застосування цієї теореми.

Приклад 10. Знайти похідні функцій:

1) $y = \sqrt{x-5}$; 2) $y = (5x^2+3)^4$; 3) $y = \sin 2x$;

4) $y = x - \sqrt{1-x^3}$; 5) $y = (x^3-1)\sqrt{2-x}$;

6) $y = \dfrac{x^2}{\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

Розв'язання. 1) Тут $y = \sqrt{u}$, $u = x - 5$, тому $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (x-5)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-5}}$.

2) Позначимо $u = 5x^2 + 3$, тоді $y = u^4$. Тому $y' = 4u^3(5x^2+3)' = 4(5x^2+3)^3 \cdot 10x = 40x(5x^2+3)^3$.

3) Покладемо $u = 2x$, тоді $y = \sin u$, отже, $y' = \cos u \cdot (2x)' = 2\cos 2x$.

4) Маємо різницю функцій, з яких друга складена. За теоремою про похідну різниці та формулою похідної складеної функції, де $u = 1 - x^3$, а $y = x - \sqrt{u}$, дістанемо $y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^3}} \cdot (1-x^3)' = 1 + \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$.

5) У другому співмножнику покладемо $u = 2 - x$, тоді $y = (x^3-1)\sqrt{u}$, $y' = (x^3-1)'\sqrt{u} + (\sqrt{u})' \cdot (x^3-1) = 3x^2\sqrt{u} + \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}(x^3-1) = 3x^2\sqrt{2-x} + \dfrac{(2-x)'}{2\sqrt{2-x}}(x^3-1) = 3x^2\sqrt{2-x} - \dfrac{x^3-1}{2\sqrt{2-x}} = \dfrac{6x^2(2-x)-(x^3-1)}{2\sqrt{2-x}} = \dfrac{-7x^3+12x^2+1}{2\sqrt{2-x}}$.

$$б)\ y' = \frac{(x^2)'\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) - \left(\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)' x^2}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2x\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3x^2}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2x\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) + 3x^2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Наведемо основні формули похідних. $(c)' = 0$, c — стала; $(x)' = 1$; $(x^n)' = nx^{n-1}$, де $n \in N$;

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0;\ (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{n^{n-1}}},\ x > 0;$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0;\ \left(\frac{c}{f(x)}\right)' = \frac{cf'(x)}{(f(x))^2},$$

де c — стала;

$$(f(x) \pm \varphi(x))' = f'(x) \pm \varphi'(x);$$

$$(f(x)\varphi(x))' = f(x)\varphi'(x) + \varphi(x)f'(x);$$

$$(cf(x))' = cf'(x),$$

де c — стала:

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)f(x)}{(\varphi(x))^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x;\ (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x};\ (\mathrm{ctg}\,x)' = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$, де $y = f(u)$, $u = h(x)$, тобто $y = f(h($

§ 5. Похідні вищих порядків

Нехай функція $f(x)$ задана на деякому проміжку $\langle a;\ b\rangle$ і нехай всередині цього проміжку вона має похідну $f'(x)$. Тоді може статися так, що $f'(x)$, будучи функцією від x, у деякій точці $x_0 \in \langle a;\ b\rangle$, а можливо, і в усіх точках цього проміжку, в свою чергу, має похідну. Цю похідну називають похідною д р у г о г о порядку, або другою похідною від функції $f(x)$ в точці x_0.

Похідна другого порядку позначається одним із таких символів: y''; $f''(x_0)$.

Отже, за означенням, похідна другого порядку це є похідна першого порядку від похідної першого порядку, тобто $y'' = (y')'$.

Звідси випливає таке правило знаходження похідної другого порядку.

Щоб знайти від функції $y = f(x)$ похідну другого порядку, треба знайти спочатку від цієї функції похідну першого порядку y', а потім від похідної y' знайти ще похідну першого порядку.

П р и к л а д и.

1. Знайти y'' від функції $y = x^3 + 5x^2 + 4x + 3$.

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо y' : $y' = 3x^2 + 10x + 4$.

Для знаходження y'' цей результат диференціюємо ще раз. Маємо $y'' = 6x + 10$.

2. Знайти похідну другого порядку від функції $s = \frac{gt^2}{2}$ де g – прискорення вільного падіння.

Р о з в' я з а н н я.

$$s' = gt,$$

тоді

$$s'' = g.$$

Отже, в цьому випадку похідна другого порядку від шляху по часу дорівнює прискоренню вільного падіння. Це не випадково. Якщо рух матеріальної точки відбувається за законом $s = f(t)$, то s', як вже було з'ясовано вище, дорівнює швидкості точки в даний момент часу $s' = v$.

Тоді прискорення a визначають як похідну першого порядку від швидкості, тобто $a = v'$, але $v' = s''$, тому $a = s''$.

Отже, похідній другого порядку можна дати *механічну інтерпретацію*, а саме: її можна тлумачити як величину, що дорівнює прискоренню рухомої точки в даний момент часу.

3. Знайти, з яким прискоренням рухається точка в момент часу $t = 10$ с, якщо $s = t^3 - 10t^2 + t + 5$.

Розв'язання. Знаходимо s'':

$$s' = 3t^2 - 20t + 1; \; s'' = 6t - 20.$$

У другу похідну підставимо значення $t = 10$. Маємо: $a = 40 \text{ м/с}^2$.

Подібно до того, як ми визначили похідну другого порядку, визначається й похідна третього порядку.

Нехай у кожній внутрішній точці проміжку $\langle a; b\rangle$ існує похідна другого порядку $f''(x)$. Отже, $f''(x)$ є функцією від x. Припустимо, що $f''(x)$ в деякій внутрішній точці $x_0 \in \langle a; b\rangle$ має похідну першого порядку.

Похідна першого порядку від похідної другого порядку називається похідною третього порядку, або третьою похідною в точці, і позначається одним із символів y''', $f'''(x_0)$.

Отже, за означенням, $y''' = (y'')'$.

Звідси випливає й правило знаходження похідної третього порядку: *щоб знайти похідну третього порядку, треба функцію послідовно три рази продиференціювати.*

Від похідної третього порядку можна перейти до похідної четвертого порядку, а від похідної четвертого порядку — до похідної п'ятого порядку і т. д. І взагалі, якщо припустити, що від функції уже визначена похідна $(n-1)$-го порядку $y^{(n-1)}$ і остання існує в кожній внутрішній точці проміжку $\langle a; b\rangle$, то можна дати означення похідної n-го порядку від функції $f(x)$ в точці $x_0 \in \langle a; b\rangle$.

Означення. ***Похідна першого порядку, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$-го порядку називається похідною n-го порядку, або n-ною похідною, і позначається одним із символів:***

$$y^{(n)};\ f^{(n)}(x_0).$$

Отже, згідно з означенням похідної n-го порядку, маємо таку рівність:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})',$$

а звідси й випливає правило знаходження похідної n-го порядку, а саме, щоб знайти похідну n-го порядку, треба функцію $y = f(x)$ продиференціювати послідовно n разів.

Зауважимо, що похідні від першого до четвертого порядку позначають так: y', y'', y''', y^{IV}, або $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, $f^{\mathrm{IV}}(x_0)$. Похідні п'ятого, шостого і т. д., n-го порядку — $y^{(5)}$, $y^{(6)}$, $y^{(7)}$, ..., $y^{(n)}$, або $f^{(5)}(x_0)$, $f^{(6)}(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$.

Розглянемо приклад. Знайти похідну шостого порядку від функції

$$y = x^6 + 5x^5 + 4x^4.$$

Р о з в ' я з а н н я. Послідовно одну за одною знаходимо похідні:

$$y' = 6x^5 + 25x^4 + 16x^3;\ \ y'' = 30x^4 + 100x^3 + 48x^2;$$

$$y''' = 120x^3 + 300x^2 + 96x;\ \ y^{\mathrm{IV}} = 360x^2 + 600x + 96x;$$

$$y^{(5)} = 720x + 600;\ y^{(6)} = 720.$$

В окремих випадках можна вивести формулу, яка дає змогу безпосередньо обчислити похідну n-го порядку, і, отже, при цьому не треба знаходити всі попередні похідні.

П р и к л а д и.

Знайти похідну n-го порядку від функції:

1. $y = x^{\mu}$.

Тут $y' = \mu x^{\mu-1}$, $y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, ... і т. д. Легко бачити, що

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ \dots\ (\mu-(n-1))x^{\mu-n}. \qquad (1)$$

Це і є формула похідної n-го порядку від степеневої функції $y = x^{\mu}$. Зокрема, якщо $\mu = n$, то $y^{(n)} = n!$. Так, наприклад, якщо $y = x^{10}$, то $y^{(10)} = 10!$; якщо $y = \sqrt{x}$, то

$$y^{(5)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)x^{\frac{1}{2}-5} = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}}.$$

2. $y = \sin x$.

Знакодимо y' :

$$y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Тоді

$$y'' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right),$$

або $y'' = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Аналогічно можна довести, що $y''' = \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Застосувавши метод математичної індукції, дістанемо загальну формулу

$$y^{(n)} = \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Так, наприклад, похідна 10-го порядку від $\sin x$ є

$$y^{(10)} = \sin\left(10\cdot\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin(5\pi+x) =$$

$$= \sin(\pi+x) = -\sin x.$$

3. $y = \cos x$.

Пропонуємо читачеві довести самостійно, що $y^{(n)} = \cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Легко довести також і такі формули:

1) якщо $y = cf(x)$, де $c = \text{const}$; а $f(x)$ має в деякому околі точки x похідні до n-го порядку, то $y^{(n)} = cf^{(n)}(x)$;

2) якщо $y = (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots f_n(x))$, де функції $f_k(x)(k = 1, 2, \ldots, n)$ в точці x і деякому її околі мають похідні до n-го порядку, то

$$y^{(n)} = f_1^{(n)}(x) \pm f_2^{(n)}(x) \pm \ldots \pm f_k^{(n)}(x).$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що називається законом руху?

2. Що називається середньою швидкістю прямолінійного руху точки?

3. Чому дорівнює середня швидкість: а) прямолінійного рівномірного руху; б) рівноприскореного руху $\left(s = \frac{gt^2}{2}\right)$?

4. Що називається миттєвою швидкістю рухомої точки, закон руху якої описується функцією $s = f(t)$?

5. Чому дорівнює миттєва швидкість:

а) рівномірного руху;

б) рівноприскореного руху $\left(s = v_0t + \frac{at^2}{2}\right)$;

в) рівносповільненого руху $\left(s = v_0t - \frac{at^2}{2}\right)$;

г) руху, закон якого описується формулою $s = at^3 + bt^2 + ct + d$?

6. Що називається силою струму? Чому дорівнює сила струму, якщо кількість електрики, що проходить у провіднику, виражається формулою $q = \frac{1}{\sqrt{t}}$?

7. Яка пряма називається січною до кривої?

8. Яка пряма називається граничним положенням січної?

9. Яка пряма називається дотичною до кривої?

10. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$, у точці $M_0(x_0; y_0)$?

11. Написати рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$.

12. Що називається швидкістю зміни функції $y = f(x)$ у точці x_0?

13. Сформулювати означення похідної функції в точці.

14. Який механічний зміст похідної?

15. Який геометричний зміст похідної?

16. Сформулювати правило знаходження похідної функції.

17. Сформулювати означення диференційовної функції: а) в точці; б) в інтервалі $(a,\ b)$.

18. Чи буде: а) неперервна функція в точці диференційовною в цій точці; б) диференційовна функція в точці неперервною в цій точці?

19. Чому дорівнює похідна сталої функції?

20. Чому дорівнює похідна степеня з натуральним показником?

21. Чому дорівнює похідна степеневої функції з цілим показником?

22. Чому дорівнює похідна тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$?

23. Сформулювати теорему про похідну суми (різниці) двох функцій.

24. Сформулювати теорему про похідну добутку двох (трьох) функцій.

25. Чому дорівнює похідна добутку двох функцій, у якому один із співмножників сталий?

26. Сформулювати теорему про похідну частки від ділення двох функцій.

27. Чому дорівнює похідна дробу, у якого чисельник сталий?

28. Чому дорівнює похідна складеної функції?

29. Дайте означення похідної другого порядку функції $y = f(x)$ в точці x.

30. Чи може існувати похідна $f''(x)$, якщо не існує похідна $f'(x)$?

31. Наведіть приклад функції, для якої існує $f'(x)$, однак не існує $f''(x)$.

32. Який механічний зміст має похідна другого порядку?

33. Дайте означення похідної n-го порядку функції $y = f(x)$.

ВПРАВИ

1. Користуючись означенням похідної і правилом, що випливає з нього, знайти похідну функцій:

А

1) $y = x^3$, $f'(1)$; 2) $y = 5x^2 + 1$, $f'(3)$;

3) $y = \cos x$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = \frac{1}{x^3}$, $f'(2)$.

2. Знайти миттєву швидкість рухомої точки в момент часу $t = 1$ с, якщо закон руху задано формулою $y = t^3 - -2t^2 + 2$.

3. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2$ у точці $M_0(1;\ 1)$.

Б

4. Знайти похідні функцій у заданій точці:

1) $y = ax^3 + 1$, $f'(-1)$; 2) $y = \sqrt{x}$, $f'(3)$;

3) $y = x^2 + 3x + 1$, $f'(1)$; 4) $y = \sqrt{x}$, $f'(4)$.

5. Знайти рівняння дотичної до синусоїди $y = \sin x$ в точці $M_0\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$.

6. Довести, що дотична до прямої $y = kx + b$ у будь-якій точці збігається з самою прямою.

В

7. Знайти похідні функцій:

1) $y = x^{-3}$, $f'(1)$; 2) $y = x|x|$, $f'(0)$;

3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \operatorname{ctg} x$.

8. Знайти рівняння дотичної до параболи $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$ у точці перетину з віссю ординат.

9. Відомо, що точка рухається за законом $s = \frac{1}{\sqrt{t+8}}$. Знайти миттєву швидкість руху точки в момент часу $t = 2$ с.

10. Знайти похідні функцій, використовуючи формули і теореми про похідні:

А

1) $y = x^{10} + x^5 + x$; 2) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^3}$; 3) $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x - 5^2$;

4) $y = \frac{5}{\sqrt{x}}$; 5) $y = x^2 \sin x$; 6) $y = (1 + \sin x)^2$;

7) $y = \sqrt{x} + \sqrt{2}$; 8) $y = \frac{\sin 3x}{2a}$; 9) $y = \frac{x+1}{x-1}$;

10) $y = \sqrt{\cos x}$; 11) $y = (x-1)^2(x+1)$;

12) $y = \sqrt[3]{5-2x}$; 13) $y = \frac{\sin x}{x^3 - 1}$; 14) $y = \operatorname{ctg}^3 x$;

15) $y = (\sqrt{x} + 1)(3x^2 - 5x + 1)$; 16) $y = \sqrt[n]{x^2}$.

Б

17) $y = (x^3+1)(3x-2)(1-x^3)$; 18) $y = \frac{ax + bx^2}{am + bm^2}$;

19) $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$; 20) $y = \frac{5}{\sqrt{x}}$;

21) $y = (a+b)t^2 + (a+b)^3$; 22) $y = 5\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$;

23) $y = ax^3 + a^3x^3 + a^3x$ у точці $x = a$;

24) $y = \left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^3$;

25) $y = \frac{1}{x^3 - 1}$ у точці $x = -1$; 26) $y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$;

27) $y = \frac{2x^2}{x^3 + 1}$; 28) $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$;

29) $y = x\sin x - x^2 \cos x$; 30) $y = (x^2+1)^n$, де $n \in Z$;

31) $y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$; 32) $y = \cos(3x^2 - 1) + \sin 4$.

В

33) $y = (1 + \sqrt[3]{t})\left(1 - \frac{3t}{\sqrt[3]{t}} + 3\sqrt{\frac{1}{t}}\right)$;

34) $y = \left(\frac{mu + n}{p}\right)^2$ u-незалежна змінна;

35) $y = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$;

36) $y = \frac{1}{1+\sqrt{t}} - \frac{1}{1-\sqrt{t}}$; 37) $y = \frac{1}{1 + \cos 4x}$;

38) $y = \cos^2 x^3$; 39) $y = \operatorname{tg}^3 \frac{x^2 + 3x - 1}{5}$;

40) $y = \left(\cos^2 \frac{x+1}{2} - \sin 0,8x\right)^2$.

11. Знайти кут, під яким синусоїда перетинає вісь Ox, проходячи через початок координат.

12. Під яким кутом перетинаються криві, задані рівняннями $y = x^2$ і $y = \frac{1}{x}$? Кутом перетину двох кривих вважати кут між дотичними, проведеними до кожної кривої в точці їх перетину.

13. Із тотожності $1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $x \neq 1$ знайти формулу для суми $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{h-1}$.

А

14. Знайти похідні вказаних порядків:

1) $y = x^5 + 4x^3 + 3x$, y^{IV}; 2) $y = \frac{x}{x^2-1}$, $y^{(n)}$;

3) $y = \cos^2 x$, $y^{(n)}$; 4) $y = \sqrt[3]{x}$, $y^{(m)}$.

15. Швидкість прямолінійного руху тіла, пропорційна квадратному кореню з пройденого шляху s. Довести, що тіло рухається під дією сталої сили.

16. Скільки разів потрібно продиференціювати функцію $y = (x^2+5)^{20}$, щоб в результаті дістати многочлен 10-го степеня?

Б

17. Знайти похідні n-го порядку від таких функцій:

1) $y = \cos x$; 2) $y = \frac{a}{x}$; 3) $y = \frac{1}{1+x}$.

18. Довести, що функція $y = A\sin(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\varphi)$ задовольняє співвідношення $y'' + \omega^2 y = 0$.

В

19. Знайти похідну другого порядку для функцій $f(x)$ та з'ясувати, чи існує $f''(0)$.

1) $f(x) = |x^2|$; 2) $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$.

20 Довести, що функція $y = (x^2-1)^n$ задовольняє рівняння: $(x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)}$

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

§ 1. Зростання, спадання функції. Екстремальні точки

1. Поняття зростаючої і спадної функції в точці. Максимум і мінімум функції. Введемо ряд означень. Для цього припустимо, що функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $\langle a;\ b\rangle$, а x_0 є внутрішньою точкою цього проміжку.

Функція називається з р о с т а ю ч о ю в т о ч ц і x_0, якщо існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, який знаходиться у проміжку $\langle a;\ b\rangle$ і такий, що $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $f(x) > f(x_0)$ для всіх x з інтервалу $(x_0;\ x_0 + \delta)$.

П р и к л а д 1. Довести, що функція $y = x^3$ є зростаючою у точці $x_0 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Функція $f(x) = x^3$ визначена на всій числовій осі, тобто на інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$. Візьмемо деякий інтервал, наприклад $(-1;\ 1)$, в якому міститься точка $x_0 = 0$. Тоді для кожного x з інтервалу $(-1; 0)$ маємо $f(x) < 0$, а для кожного x з інтервалу $(0; 1)$ $f(x) > 0$. Оскільки $f(0) = 0$, то задача розв'язана.

П р и к л а д 2. Довести, що функція $y = \sin x$ у точці $x_0 = 0$ є зростаючою.

Р о з в' я з а н н я. Візьмемо інтервал $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, який містить точку $x = 0$. Тоді для кожного x з інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ $\sin x < 0$, а для кожного x з інтервалу $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x > 0$. У точці $x_0 = 0$ $\sin x = 0$.

Функція $y = f(x)$ називається с п а д н о ю у т о ч ц і x_0, якщо існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, який міститься у проміжку $\langle a;\ b\rangle$ і такий, що $f(x) > f(x_0)$ для будь-якого x з інтервалу $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $f(x) < f(x_0)$ для будь-якого x з інтервалу $(x_0;\ x_0 + \delta)$.

П р и к л а д 3. Довести, що функція $y = \sin x$ у точці $x = \pi$ є спадною.

Р о з в' я з а н н я. Візьмемо інтервал $(0;\ 2\pi)$, який містить точку π. Тоді для всіх x з інтервалу $(0;\ \pi)$ $\sin x > 0$; а для всіх x з інтервалу $(\pi;\ 2\pi)$ $\sin x < 0$. У точці $x = \pi$ $\sin x = 0$.

П р и к л а д 4. Довести, що функція $y = \dfrac{1}{x}$ у точці $x = 1$ є спадною.

Р о з в' я з а н н я. Візьмемо інтервал $(0;\ 2)$. Тоді для всіх x з інтервалу $(0;\ 1)$ $f(x) = \dfrac{1}{x} > 1$, $f(1) = 1$, а для всіх x з інтервалу $(1;\ 2)$ $f(x) < 1$.

Якщо існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, який міститься у проміжку $\langle a;\ b\rangle$ і такий, що $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$, то точку x_0 називають **т о ч к о ю м а к с и м у м у ф у н к ц і ї $y = f(x)$**, а саме число $f(x_0)$ — **м а к с и м у м о м ф у н к ц і ї $y = f(x)$**.

П р и к л а д 5. Довести, що точка $x_0 = 0$ є точкою максимуму функції $y = \cos x$.

Р о з в' я з а н н я. Візьмемо інтервал $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, який містить точку $x = 0$. Оскільки $f(x) = \cos x$ у точці $x = 0$ дорівнює одиниці, а для всіх x з інтервалу $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ $(x \neq 0)$ $\cos x < 1$, то $x = 0$ є точкою максимуму функції $y = \cos x$. Число 1 є максимумом функції $y = \cos x$.

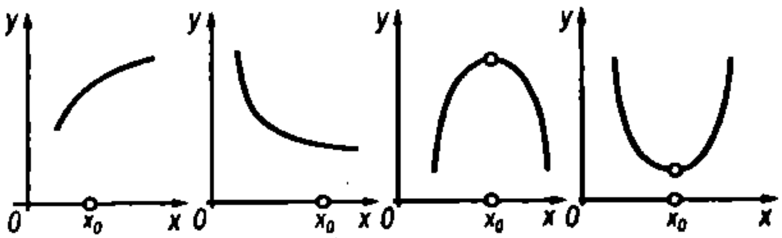
П р и к л а д 6. Довести, що точка $x = 0$ є точкою максимуму функції $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Р о з в' я з а н н я. Візьмемо інтервал $(-1; 1)$, який містить точку $x = 0$. Тоді $f(0) = 1$, а для всіх x з інтервалу $(-1; 1)$ $(x \neq 0)$ $f(x) < f(0)$. Отже, точка $x = 0$ є точкою максимуму функції $y = \frac{1}{1+x^2}$, а число 1 є максимумом заданої функції.

Якщо існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, який міститься у проміжку $\langle a;\ b\rangle$ і такий, що $f(x) > f(x_0)$ для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$, то точку x_0 називають **точкою мінімуму функції** $y = f(x)$, а саме число $f(x_0)$ — **мінімумом функції** $y = f(x)$.

Приклад 7. Нехай $f(x) = x^2$. Довести, що точка $x = 0$ є точкою мінімуму даної функції.

Розв'язання. Візьмемо інтервал $(-1; 1)$. Тоді $f(0) = 0$, а для всіх x маємо $x^2 > 0$. Отже, точка $x = 0$ є точкою мінімуму функції $y = x^2$, а число $f(0) = 0$ — мінімумом заданої функції.



Мал. 120

Приклад 8. Довести, що точка $x = 1$ є точкою мінімуму функції $f(x) = |x - 1|$.

Розв'язання. Візьмемо інтервал $(0; 2)$. У кожній точці цього інтервалу $f(x) > 0$, а в точці $x = 1$ $f(x) = 0$.

Отже, $x = 1$ є точкою мінімуму функції $y = |x - 1|$, а число 0 — мінімумом заданої функції.

Зазначимо, що точки максимуму і мінімуму функції називають ще **екстремальними точками**, а максимум і мінімум називають **екстремумом** функції (екстремум походить від латинського слова *extremum*, що означає «крайній»).

Точки зростання (спадання) та екстремальні точки зображені на малюнку 120.

Якщо функція $y = f(x)$ зростаюча (спадна) у кожній внутрішній точці проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то вона зростаюча (спадна) на цьому проміжку.

Наприклад, функція $y = x^3$ є зростаючою в інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$, а функція $y = \frac{1}{x}$ — спадною у півінтервалі $(0;\ +\infty)$. Проте є функції, для яких у розглядуваному проміжку є як точки зростання, так і точки спадання, а також екстремальні точки. Прикладом такої функції може бути функція $y = \sin x$. Наприклад, в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ ця функція зростає, а в інтервалі $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$ спадає. Точки $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ є точками екстремуму (див. мал. 56).

Для функції, яка має похідну, існують прості достатні ознаки зростання (спадання) її в точці.

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ у внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a;\ b\rangle$ має похідну $f'(x_0)$ і $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$, то функція $y = f(x)$ в точці x_0 зростає (спадає).

Д о в е д е н н я. Розглянемо випадок, коли $f'(x_0) > 0$. Доведемо, що в такому разі функція $y = f(x)$ в точці x_0 зростає. Скористаємось означенням похідної

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

де $\Delta x = x - x_0$.

Тоді з попередньої рівності та умови теореми випливає така нерівність:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

При цьому знайдеться інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ такий, що для всіх x з цього інтервалу, крім точки $x = x_0$, справджуватиметься нерівність:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Нехай $x_0 - \delta < x < x_0$. Тоді з попередньої нерівності випливає, що $f(x) < f(x_0)$.

Нехай $x_0 < x < x_0 + \delta$. Тоді з тієї самої нерівності маємо $f(x) > f(x_0)$.

Отже, існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ такий, що для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta;\ x_0)$ матимемо $f(x) < f x_0$, а для всіх x з інтервалу $(x;\ x_0 + \delta)$ матимемо $f(x) > f(x_0)$, а це й означає, що в точці x_0 функція є зростаючою. Теорему доведено.

Аналогічно доводиться теорема і для $f'(x_0) < 0$.

Приклад 9. Довести, що функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ є зростаючою в інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$.

Розв'язання. В курсі математичного аналізу доведено, що $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

У кожній точці інтервалу $(-\infty;\ +\infty)$ $f'(x) > 0$. Отже, за попередньою теоремою, функція $y = \operatorname{arctg} x$ є зростаючою у кожній точці даного інтервалу. Це видно з графіка цієї функції (див. мал. 58).

Приклад 10. Знайти інтервали зростання і спадання функції:

а) $f(x) = x^3 + 2x - 5$; б) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язання. а) Знайдемо похідну $f'(x) = 3x^2 + +2$. Неважко помітити, що при будь-якому x з інтервалу $(-\infty;\ +\infty)$ $f'(x) > 0$. Отже, функція $f(x) = x^3 + 2x - 5$ на всій числовій осі є зростаючою.

б) Знайдемо похідну

$$f'(x) = 2\frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Знайдемо точки, в яких $f'(x) > 0$. Це всі точки, в яких $1 - x^2 > 0$. Розв'яжемо нерівність $x^2 < 1$, $|x| < 1$, або $-1 < x < 1$.

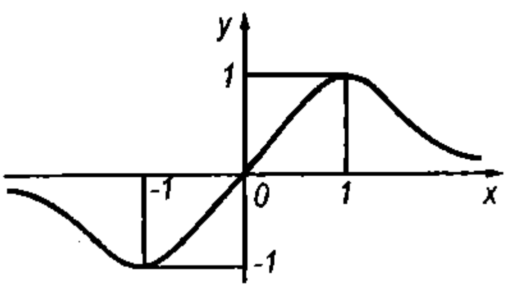
Отже, в інтервалі $(-1;\ 1)$ функція зростає. Тоді в інтервалах $(-\infty;\ -1)$, $(1,\ +\infty)$ функція спадає. Звідси робимо висновок, що точка $x = -1$ є точкою мінімуму, а точка $x = 1$ — максимуму даної функції. Мінімум функції дорівнює $f(-1) = -1$, а максимум $f(1) = 1$ (мал. 121).

§ 2. Локальний екстремум функції

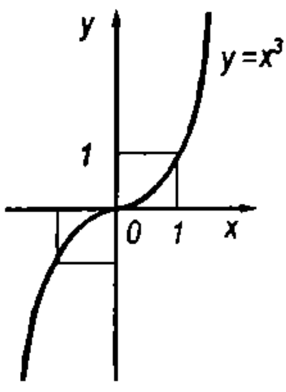
У § 1 дано означення екстремальних точок і екстремуму функції. Далі будуть доведені теореми, за допомогою яких можна знаходити екстремальні точки, а отже, і екстремум функції. Іншими словами, ці теореми дають змогу досліджувати функції на екстремум.

Спочатку зазначимо, що екстремальні точки, як випливає з означення, це такі точки, в яких функція набуває відповідно найбільшого чи найменшого значень порівняно із значенням функції, яких вона набуває в точках, досить близьких до екстремальної. Такий екстремум називають **локальним екстремумом** (слово «локальний» походить від латинського слова *lokalis*, що означає «місцевий»).

Отже, не слід плутати локальний максимум (мінімум) з найбільшим (найменшим) значенням функції, якого вона набуває на проміжку. Локальних максимумів і мінімумів функція може мати кілька, а найбільше значення (його ще називають абсолютним максимумом), якщо воно існує, єдине. Це саме стосується і найменшого значення (абсолютного мінімуму) функції. Окремий локальний мінімум може бути більшим за окремий локальний максимум, як це показано, наприклад, на малюнку 129. Функція, графік якої тут зображено, в точці x_a має мінімум, більший за максимум, якого вона набуває в точці x_b.



Мал. 121



Мал. 122

Розглянемо необхідні умови існування екстремуму функції. Доведемо теорему.

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$ у внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a;\ b\rangle$ має екстремум, то в цій точці похідна $f'(x_0)$, якщо вона існує, дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я. Доведемо теорему методом від супротивного. Нехай в точці $x_0 \in \langle a;\ b\rangle$, яка є екстремальною для $y = f(x)$, існує похідна $f'(x_0)$ і $f'(x_0) \neq 0$. Припустимо, що $f'(x_0) > 0$. Тоді, за теоремою 1, $y = f(x)$ в точці x_0 зростає. Отже, x_0 не є екстремальною точкою. Якщо $f'(x_0) < 0$, то $y = f(x)$ в точці x_0 спадає. Дістали суперечність. Отже, теорему доведено.

З цієї теореми випливає таке твердження: *якщо в точці x_0 існує похідна $f'(x_0) \neq 0$, то функція $y = f(x)$ в точці x_0 екстремуму не має.*

Звідси дістанемо таку необхідну умову існування екстремуму: екстремум може існувати в таких точках, де похідна, якщо вона існує, дорівнює нулю.

Внутрішня точка x_0 проміжку $\langle a;\ b\rangle$ називається **с т а ц і о н а р н о ю** точкою функції $y = f(x)$, якщо в цій точці $f'(x_0) = 0$.

Отже, згідно з попередніми міркуваннями, функція може мати екстремум у стаціонарних точках. Проте не слід вважати, що функція кожного разу в стаціонарній точці має екстремум, оскільки в цій точці виконується тільки необхідна умова існування екстремуму. Стаціонарні точки можуть бути точками, в яких функція зростає або спадає.

П р и к л а д 1. Нехай $f(x) = x^3$. Тоді $f'(x) = 3x^2$. В точці $x = 0$ похідна $f'(0)$ дорівнює нулю. Отже, необхідна умова існування екстремуму виконується. Проте задана функція в точці $x = 0$ екстремуму не має, вона в цій точці зростає (мал. 122).

З наведеного прикладу випливає, що стаціонарні точки функції не обов'язково є екстремальними. Вони є екстремальними, якщо в цих точках виконуються достатні умови існування екстремуму. Доведемо таку теорему.

Теорема 3. Нехай x_0 — стаціонарна точка функції $y = f(x)$, яка в цій точці є неперервною, і існує окіл точки $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, в якому $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$. Тоді: 1) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$), то x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$; 2) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, то x_0 є точкою мінімуму функції; 3) якщо в

обох інтервалах $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак (набуває тільки додатних або тільки від'ємних значень), то x_0 не є екстремальною точкою функції $y = f(x)$.

Доведення. 1) Нехай $f'(x) > 0$ в інтервалі $(x_0 - -\delta;\ x_0)$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$. Тоді для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ функція $y = f(x)$ зростає, а для всіх $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ $y = f(x)$ спадає. Якщо $x_0 - \delta < x < x_0$, то справджується нерівність $f(x) < f(x_0)$, а коли $x_0 < < x < x_0 + \delta$ — нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Отже, існує окіл точки x_0, а саме інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + +\delta)$ такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, крім $x = x_0$, значення функції менші за значення функції в точці x_0, а це й означає, що x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$.

2) Нехай в інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$. Тоді для всіх $x \in \in (x - \delta;\ x_0)$ функція $y = f(x)$ спадає, тобто $f(x) < < f(x_0)$, а для всіх $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ функція $y = f(x)$ зростає, тобто $f(x) > f(x_0)$. Отже, інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ має ту властивість, що функція $y = f(x)$, коли $x_0 - \delta < < x < x_0 + \delta$ набуває значень, більших ніж $f(x_0)$, а це й означає, що x_0 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$.

3) Нехай, наприклад, в інтервалах $(x_0 - \delta;\ x_0)$, $(x_0;\ x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$. Тоді функція $y = f(x)$ в цих інтервалах зростає, і коли $x_0 - \delta < x < x_0$, справджується нерівність $f(x) < f(x_0)$, а коли $x_0 < x < x_0 + \delta$ — нерівність $f(x) > f(x_0)$.

Отже, функція $y = f(x)$ в точці x_0 зростає, тобто x_0 не є екстремальною точкою.

Якщо $f'(x)$ в обох інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$, $(x_0;\ x_0 + \delta)$ набуває від'ємних значень, то як і у попередньому випадку, можна показати, що $y = f(x)$ в точці x_0 спадає. Теорему доведено.

Із доведених теорем випливає таке *перше правило* дослідження функції на екстремум.

1) Необхідно знайти стаціонарні точки даної функції. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, причому з коренів даного рівняння вибрати тільки дійсні і ті, які є внутрішніми точками області існування функції.

2) У кожній стаціонарній точці треба перевірити зміну знака похідної. Якщо $f'(x)$ при переході через стаціонарну точку (зліва направо) змінює знак «+» на «—», то ця точка є точкою максимуму. Якщо $f'(x)$ змінює знак з «—» на «+», то ця стаціонарна точка є точкою мінімуму. Якщо при переході через стаціонарну точку знак похідної не змінюється, то розглядувана точка не є екстремальною точкою даної функції.

П р и к л а д 2. Дослідити функцію $f(x) = x^3$ на екстремум.

Р о з в' я з а н н я. Використаємо наведену схему. Знайдемо похідну $f'(x) = 3x^2$. Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$, $3x^2 = 0$, звідки дістанемо одну стаціонарну точку $x = 0$. З'ясуємо, чи є зміна знака похідної. Оскільки $3x^2 > 0$ для всіх $x \neq 0$, то $f'(x)$ не змінює знак при переході через точку $x = 0$. Отже, $x_0 = 0$ не є екстремальною точкою. Функція $y = x^3$ екстремуму не має.

П р и к л а д 3. Дослідити функцію $f(x) = x^2$ на екстремум.

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо $f'(x) = 2x$ і розв'язуємо рівняння $2x = 0$, звідси дістанемо одну стаціонарну точку $x = 0$.

Перевіряємо достатні умови. Для цього візьмемо поблизу точки $x = 0$ від'ємне значення x, наприклад $x = -h$ ($h > 0$ — дійсне число), і обчислимо похідну $f'(-h) = -2h$. Оскільки $h > 0$, то $-2h < 0$. Отже, зліва від точки $x = 0$ похідна $f'(x)$ має від'ємний знак.

Обчислимо $f'(x)$ в точці $x = h$. Маємо $f'(h) = 2h > 0$. Отже, справа від точки $x = 0$ похідна $f'(x)$ має додатний знак.

Таким чином, похідна $f'(x)$ при переході через точку $x = 0$ змінює знак з «—» на «+». Звідси $x = 0$ є точкою мінімуму, а сама функція в точці $x = 0$ має мінімум. Щоб знайти цей мінімум, слід знайти значення функції в цій точці. Дістанемо $f(0) = 0$.

Зазначимо, що перевірку достатніх умов у випадку, коли функція має скінченну множину стаціонарних точок, можна дещо спростити. Справді, нехай, наприклад, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — стаціонарні точки функції $y = f(x)$, які занумеровано в порядку зростання, тобто $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k$.

Розглянемо інтервали $(a;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, ..., $(x_{k-1};\ x_k)$, $(x_k;\ b)$, де числа a і b належать області визначення функції. Тоді в кожному з інтервалів не має екстремальних точок. Отже, в цих інтервалах похідна $f'(x)$ має сталий знак. Тому, обчисливши похідну в будь-якій точці інтервалу, можна зробити висновок про знак похідної на всьому інтервалі.

П р и к л а д 4. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = (x+1)^2(x-2)^3$.

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо

$$f'(x) = 2(x+1)(x-2)^3 + 3(x+1)^2(x-2)^2 =$$

$$= (x+1)(x-2)^2(2x-4+3x+3) =$$

$$= (x+1)(x-2)^2(5x-1).$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0:\ (x+1)\cdot(x-2)^2\cdot(5x-1) = 0$. Звідси знаходимо стаціонарні точки $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = 2$. Розглянемо інтервали $(-\infty;\ -1)$, $\left(-1;\ \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{5};\ 2\right)$, $(2;\ +\infty)$.

Для визначення знака похідної обчислимо останню в довільних точках, які належать даним інтервалам. Візьмемо, наприклад, такі точки: -2; 0; 1; 3. Тоді

$$\begin{array}{ll} f'(-2) = -4^2(-11) > 0 & (+); \\ f'(0) = -4 < 0 & (-); \\ f'(1) = 8 > 0 & (+); \\ f'(3) = 4\cdot 14 > 0 & (+). \end{array}$$

Отже, при переході через точку $x_1 = -1$ похідна змінює знак з «+» на «−». У цій точці функція має максимум, який дорівнює $f(-1) = -27$.

При переході через точку $x_2 = \frac{1}{5}$ похідна змінює знак з «−» на «+». У цій точці функція має мінімум $f\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{26\,244}{3125} = -8\frac{1244}{3125}$.

При переході через стаціонарну точку $x_3 = 2$ похідна знак не змінює. Точка $x_3 = 2$ не є екстремальною для заданої функції.

§ 3. Друге правило дослідження функції на екстремум

Виявляється, що в окремих випадках можна вказати простіше правило дослідження функції на екстремум, а саме застосовуючи похідну другого порядку. Доведемо таку теорему.

Теорема 4. Нехай точка x_0 є стаціонарною для функції $f(x)$ і нехай в цій точці існує похідна другого порядку $f''(x_0)$, яка не дорівнює нулю, $f''(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 є точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.

Доведення. За умовою теореми, x_0 є стаціонарною точкою для $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$, то це означає, що похідна $f'(x)$, будучи функцією від x, у точці x_0 зростає, а отже, існує окіл $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ справджується нерівність $f'(x) < f'(x_0)$, а для всіх $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ — нерівність $f'(x) > f'(x_0)$. Проте $f'(x_0) = 0$. Тому, коли $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$, справджується нерівність $f'(x) < 0$, а коли $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ — нерівність $f'(x) > 0$. Ми довели, що похідна першого порядку $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з «$-$» на «$+$». Тоді, за теоремою 2, точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Аналогічно доводиться, що коли в стаціонарній точці x_0 друга похідна $f''(x_0) < 0$, то x_0 є точкою максимуму для функції $f(x)$.

Теорему доведено.

На основі цієї теореми можна сформулювати друге правило дослідження функції на екстремум.

Друге правило. Щоб дослідити функцію на екстремум, треба:

1) знайти стаціонарні точки заданої функції;

2) знайти похідну другого порядку в стаціонарній точці.

Якщо при цьому в стаціонарній точці x_0 $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 є екстремальною точкою для функції $f(x)$, а саме: точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) > 0$, і точкою максимуму, якщо $f''(x_0) < 0$.

П р и к л а д. Користуючись другим правилом, дослідити функції на екстремум:

1) $f(x) = x^3 - x^2$; 2) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$.

Р о з в' я з а н н я.

1) Знаходимо похідну $f'(x) = 3x^2 - 2x$.

Прирівнюємо похідну $f'(x)$ до нуля і розв'язуємо рівняння $3x^2 - 2x = 0$, $x(3x-2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$, звідси дістанемо такі стаціонарні точки: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Знаходимо похідну другого порядку $f''(x) = 6x - 2$.

Підставляємо у вираз для $f''(x)$ знайдені значення x_1 і x_2 :

$$f''(0) = -2 < 0, \quad f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 2 > 0.$$

Отже, $x_1 = 0$ є точкою максимуму, а $x_2 = \frac{2}{3}$ — точкою мінімуму функції $y = x^3 - x^2$, причому максимум і мінімум відповідно дорівнюють $f(0) = 0$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$.

2) Знаходимо похідну першого порядку

$$f'(x) = 6x^2 - 30x - 84.$$

Прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо утворене рівняння $6x^2 - 30x - 84 = 0$.

Звідси знаходимо стаціонарні точки $x_1 = 7$; $x_2 = -2$.

Знаходимо похідну другого порядку $f''(x) = 12x - 30$.

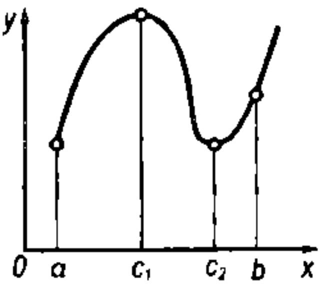
Тоді $f''(7) = 54 > 0$, $f''(-2) = -54 < 0$.

Отже, в точці $x_1 = 7$ функція має мінімум $f(7) = -629$, а в точці $x_2 = -2$ — максимум $f(-2) = 100$.

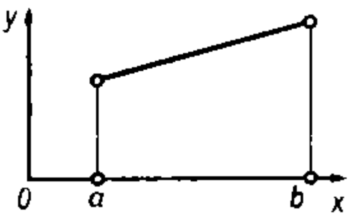
Як бачимо, друге правило дослідження функції на екстремум простіше, ніж перше. Однак це правило застосовується до вужчого класу функцій. Його, зокрема, не можна застосовувати при дослідженні на екстремум тих точок, в яких похідна першого порядку не існує, а також до стаціонарних точок, в яких похідна другого порядку дорівнює нулю. У цих випадках слід застосовувати перше правило.

§ 4. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$. Тоді, як доводиться в курсі математичного аналізу, серед множини значень такої функції є найбільше і найменше числа. Ці числа і називаються відповідно **найбільшим** і **найменшим** значеннями функції. Постає питання: як знайти точки відрізка $[a; b]$, в яких функція набуває своїх найбільшого і найменшого значень?



Мал. 123



Мал. 124

Зазначимо, що функція може набувати своїх найбільшого і найменшого значень як на кінцях відрізка, так і у внутрішніх його точках.

Так, на малюнку 123 зображено графік неперервної функції, яка у внутрішній точці c_1 відрізка $[a, b]$ набуває найбільшого значення, а у внутрішній точці c_2 — найменшого.

На малюнку 124 зображено графік функції, яка на кінцях відрізка набуває найменшого і найбільшого значень.

Може статися і так, що одного із значень функція набуває всередині відрізка, а другого — на одному з кінців. Так на малюнку 125 зображено графік неперервної функції, яка в лівому кінці відрізка (точці a) набуває найменшого значення, а у внутрішній точці (точці c) — найбільшого.

Якщо функція набуває найбільшого (найменшого) значення всередині відрізка, то це найбільше (найменше) значення є одночасно і локальним максимумом (мінімумом) заданої функції. Звідси випливає спосіб знаходження точок, в яких функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на відрізку $[a;\ b]$, треба знайти всі локальні максимуми (мінімуми) і порівняти їх із значенням функції, яких вона набуває на кінцях відрізка. Найбільше (найменше) число серед утвореної множини і буде найбільшим (найменшим) значенням функції, заданої на відрізку $[a;\ b]$.

Оскільки неперервна функція на відрізку $[a;\ b]$ обов'язково набуває свого найбільшого (найменшого) значення і воно може бути тільки в стаціонарних точках та на кінцях відрізка, то немає потреби перевіряти достатні умови існування екстремуму функції в стаціонарних точках. Досить обчислити значення функції в цих точках і порівняти їх із значеннями функції на кінцях відрізка, тобто числами $f(a)$ і $f(b)$. Найбільше і найменше з усіх чисел і будуть відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$.

Якщо між точками (кінцями відрізка) a і b міститься тільки одна критична точка $x_0 \in (a;\ b)$ і в ній функція має максимум (мінімум), то без порівняння з числами $f(a)$ і $f(b)$ можна стверджувати, що цей максимум (мінімум) і є найбільшим (найменшим) значенням функції на відрізку $[a;\ b]$. У цьому разі не треба обчислювати значення функції на кінцях відрізку, а дослідити відразу точку на екстремум. Значення функції в цій точці й буде відповідно найбільшим (найменшим) значенням функції.

Приклади. Знайти найбільше (найменше) значення функції:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ на $\left[-2;\ \frac{5}{2}\right]$;

2) $f(x) = \sin^2 x$ на $[0; 2\pi]$.

Розв'язання. 1) Знайдемо стаціонарні точки. Для цього знайдемо похідну $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Розв'язуючи рівняння $6x^2 - 6x - 12 = 0$, дістанемо стаціонарні точки $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Обчислимо значення функції в точках x_1, x_2, а також на кінцях відрізка, тобто в точках $x_3 = -2$, $x_4 = \frac{5}{2}$. Ма-

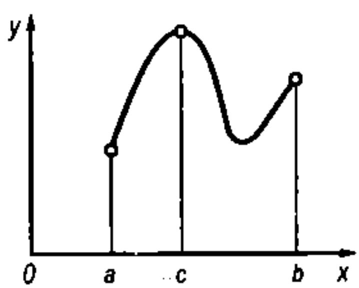
ємо: $f(-1) = 6$; $f(2) = -21$; $f(-2) = -3$; $f\left(\frac{5}{2}\right) =$
$= -16\frac{1}{2}$.

Отже, найбільше значення дорівнює $f(-1) = 6$, найменше — $f(2) = -21$.

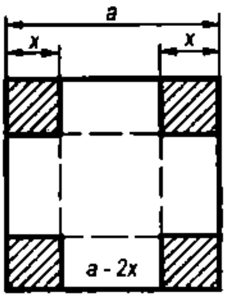
2) Знайдемо стаціонарні точки з рівняння $f'(x) = 0$, $\sin 2x = 0$. Звідси $x = \frac{\pi}{2}k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Ми повинні взяти точки, які б належали відрізку $[0;\ 2\pi]$. Такими точками є: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, $x_5 = 2\pi$.

Отже, маємо три стаціонарні точки $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Точки 0 і 2π збігаються з кінцями відрізка. Обчислюємо значення функції в цих точках: $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$. Найменше значення функції дорівнює нулю, найбільше — одиниці.



Мал. 125



Мал. 126

Розглянемо кілька практичних задач, розв'язування яких зводиться до знаходження найбільшого чи найменшого значень певної функції.

Задача 1. Нехай маємо квадратний лист заліза із стороною a. Треба в кожному куті його відрізати такі квадрати, щоб після згинання країв отримати ящик найбільшої місткості.

Розв'язання. Позначимо через x довжину сторони того квадрата, який слід відрізати (мал. 126), а через

V — об'єм ящика. Тоді V є функцією від x, яка виражається формулою $V(x) = (a-2x)^2x$, причому x змінюється на відрізку $\left[0; \frac{a}{2}\right]$. Оскільки $V(x)$ є неперервною функцією на відрізку $\left[0; \frac{a}{2}\right]$, то вона набуває на ньому найбільшого значення. На кінцях відрізка $V(x)$ не може набувати найбільшого значення, бо в цих точках $V = 0$. Отже, шукана точка міститься всередині відрізка. Знайдемо її. Для цього обчислимо спочатку похідну

$$V'(x) = -4(a-2x)x + (a-2x)^2 = (a-2x)(a-6x)$$

і розв'яжемо рівняння $(a-2x)(a-6x) = 0$.

Звідси дістанемо корені $x_1 = \frac{a}{2}$ і $x_2 = \frac{a}{6}$. Точка x_1 не є стаціонарною, бо це кінець відрізка, на якому розглядується функція $V = V(x)$. Точка x_2 міститься всередині даного відрізка. Отже, точка $x_2 = \frac{a}{6}$ є стаціонарною і точкою максимуму. У ній функція $V = V(x)$ набуває найбільшого значення, яке дорівнює $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3$.

З а д а ч а 2. Нехай електрична лампочка переміщується (наприклад, на блоці) уздовж вертикальної прямої OB (мал. 127). На якій відстані від горизонтальної площини слід її розмістити, щоб в точці A цієї площини освітленість була найбільшою, якщо $OA = a$?

Р о з в' я з а н н я. З курсу фізики відомо, що освітленість прямо пропорційна $\sin\varphi$ і обернено пропорційна квадрату відстані $AB = r$, тобто $E = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$, де k — коефіцієнт пропорційності, який залежить від сили світла лампочки.

За незалежну змінну візьмемо висоту $x = OB$. Тоді

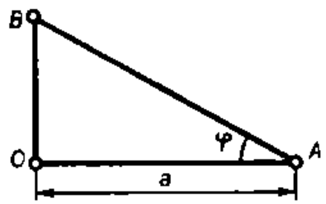
$$\sin\varphi = \frac{x}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad 0 < x < +\infty.$$

Отже, $E = k\frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

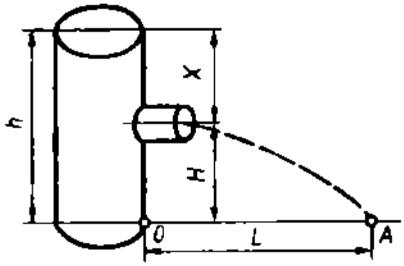
Знайдемо похідну від $E(x)$:

$$E'(x) = k\frac{a^2 - 2x^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

і розв'яжемо рівняння $k\frac{a^2 - 2x^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$. Звідси знаходимо стаціонарну точку $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.



Мал. 127



Мал. 128

Оскільки функція $E(x)$ має тільки одну стаціонарну точку, а в умові задачі сказано, що існує положення лампочки, при якому освітлення в точці A найбільше, то x є шуканою точкою.

Задача 3. Визначити розміри такого відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом $V = 32$ м^3, щоб на облицьовування його стін і дна було витрачено найменшу кількість матеріалу.

Розв'язання. Позначимо довжину сторони основи через x, а висоту — через y. Тоді $V(x, y) = x^2y = 32$.

Площа бічної поверхні басейну разом із площею дна дорівнює $S = x^2 + 4xy$. Знайшовши з попередньої рівності y і підставивши в останню рівність його значення, дістанемо таку функцію від x :

$$S(x) = x^2 + \frac{128}{x}.$$

Знайдемо похідну цієї функції: $S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}$.

Розв'язуючи рівняння $2x - \frac{128}{x^2} = 0$, знаходимо стаціонарну точку $x = 4$.

Оскільки існує тільки одна стаціонарна точка, то вона і буде точкою мінімуму. Отже найменші розміри басейну заданого об'єму $V = 32$ м^3 такі: $x = 4$ м; $y = 2$ м.

Задача 4. Посудина з вертикальною стінкою і висотою h стоїть на горизонтальній площині (мал. 128). На якій глибині слід розмістити отвір, щоб дальність вильоту води з отвору була найбільшою (швидкість рідини, що витікає за законом Торрічеллі, дорівнює $\sqrt{2gx}$, де x — глибина розміщення отвору, g — прискорення вільного падіння)?

Розв'язання. Позначимо через H відстань отвору в посудині від горизонтальної площини, а через L — відстань точки A від стінки посудини. Тоді $L = vt$, де t — час польоту води від отвору до площини (у точку A).

З курсу фізики відомо, що

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \text{ або } t = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}.$$

Тоді

$$L(x) = \sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} =$$

$$= 2\sqrt{x(h-x)}, \quad 0 < x < h.$$

Знайдемо похідну $L'(x) = \dfrac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}$.

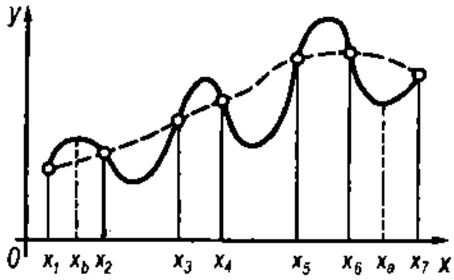
Розв'язуючи рівняння $\dfrac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}} = 0$,

знаходимо стаціонарну точку $x = \dfrac{h}{2}$.

Оскільки це єдина стаціонарна точка, то вона і буде шуканою.

§ 5. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

Нехай на відрізку $[a;\ b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$, графіком якої є деяка лінія. Виникає запитання: як побудувати цей графік? Одним з методів побудови графіка функції є побудова за точками. При такій побудові графіка на площині будують кілька точок, координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$, а потім ці точки сполучають суцільною лінією. Зрозуміло, чим більше таких точок буде нанесено на площину, тим точніше лінія, що їх сполучає, відображатиме графік функції $y = f(x)$. Але при такому методі побудови графіка не відтворюється реальна поведінка функції. Так, наприклад, нехай графіком функції є суцільна лінія, яка зображена на малюнку 129, а лінія, яка утворюється при сполученні семи точок площини xOy, зображена штриховою лінією. Як бачимо, побудований і реальний графіки однієї і тієї самої функції значно відрізняються. Отже, перш, ніж будувати графік функції, її треба дослідити. Як правило, це роблять за такою схемою.



Мал. 129

1) Знайти область визначення функції.

2) Знайти точки перетину графіка з координатними осями. Для цього треба розв'язати дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y = f(x), \\ x = 0. \end{cases}$$

Перша система дає точки перетину з віссю Ox, а друга — з Oy.

3) Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність. З'ясування цих питань полегшить побудову графіка у тому розумінні, що її доведеться виконувати не в усій області визначення функції, а тільки в певній її ча-

стині. Так, якщо $y = f(x)$ — періодична функція з періодом $T > 0$, то графік достатньо побудувати на відрізку числової осі, довжина якого дорівнює T, а потім цю частину графіка повторити на кожному з відрізків довжини T. Якщо функція парна, то графік функції симетричний відносно осі Oy, якщо непарна — то відносно початку координат. Тому достатньо побудувати графік тільки коли $x \geqslant 0$, а потім симетрично відобразити його і для $x < 0$.

4) Знайти значення функції на кінцях відрізків, де визначена функція. Якщо область визначення функції є інтервалом (півінтервалом) або кількома інтервалами (півінтервалами), то слід знайти граничне значення функції, коли x наближається до одного з кінців розглядуваних проміжків.

5) Знайти інтервали монотонності функції.

6) Знайти екстремальні точки функції і побудувати їх на площині.

7) На основі дослідження побудувати графіки функції.

Приклади. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

а) $y = 2x^4 - x^2 + 1$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. а) Дослідимо функцію $y = 2x^4 - x^2 + 1$ за наведеною схемою.

1) Вона є многочленом, областю визначення якого є вся множина дійсних чисел, тобто інтервал $(-\infty; +\infty)$.

2) Знаходимо точки перетину графіка з координатними осями. При перетині з віссю Ox $(y = 0)$ маємо рівняння $2x^4 - x^2 + 1 = 0$. Це рівняння дійсних коренів не має, тобто крива не перетинає вісь Ox. Для знаходження точок перетину графіка з віссю Oy покладемо $x = 0$. Маємо: $y = 1$. Отже, в точці $M_1(0; 1)$ графік функції перетинає вісь Oy.

3) Функція не періодична, парна. Надалі досліджуватимемо задану функцію тільки коли $x \geqslant 0$.

4) Многочлен є функцією, неперервною на всій числовій осі.

5) Досліджуємо функцію на кінцях інтервалів. У точці $x = 0$ маємо $y = 1$.

6) Для знаходження інтервалів монотонності слід розв'язати нерівність $y' > 0$, $y' < 0$. У точках, де $y' > 0$, функція зростає, а де $y' < 0$ — спадає.

Обчислимо $y' = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1)$, $x(4x^2 - 1) > 0$.

Оскільки $x > 0$, то $4x^2 - 1 > 0$. Звідси $x^2 > \frac{1}{4}$, або $x > \frac{1}{2}$. Отже, в інтервалі $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ функція зростає, тоді в інтервалі $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ вона спадає.

7) Досліджуємо функцію на екстремум. Для цього розв'яжемо рівняння $x(4x^2 - 1) = 0$. Дістанемо такі стаціонарні точки: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ (від'ємні значення x не розглядаємо). Неважко показати, що $x_1 = 0$ є точкою максимуму, а $x_2 = \frac{1}{2}$ — мінімуму, причому

$$y_{\max} = f(0) = 1,$$

$$y_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}.$$

Будуємо точки $M_1(0;\ 1)$, $M_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{7}{8}\right)$.

Графік заданої функції зображено на малюнку 130.

б) Дослідимо функцію $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ за наведеною схемою.

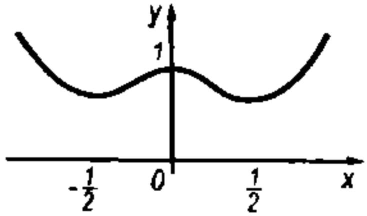
1) Знаходимо область визначення функції. Оскільки задана функція дробово-раціональна, то вона не існує в тих точках, де знаменник дорівнює нулю, тобто $x^2 - 1 = 0$. Звідки $x \neq \pm 1$.

Отже, областю визначення функції є об'єднання множин $(\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (-1;\ +\infty)$.

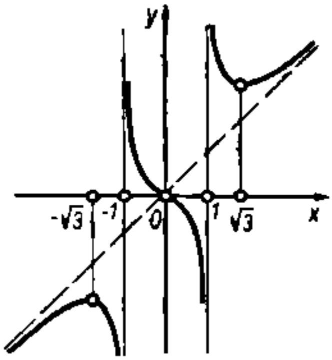
2) Визначимо точки перетину графіка з осями координат. Нехай $y = 0$, тоді $x = 0$; $x = 0$, тоді $y = 0$. Отже, графік перетинає координатні осі в точці $O(0;\ 0)$, тобто графік проходить через початок координат.

3) Функція неперіодична. Вона непарна, тому розглядатимемо тільки $x \geqslant 0$.

4) Чисельником і знаменником є многочлени, які неперервні на всій числовій осі. Функція неперервна на всій числовій осі, крім точок $x = \pm 1$.



Мал. 130



Мал. 131

5) Знаходимо похідну:

$$y' = \frac{(x^2-1)\cdot 3x^2 - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Розв'яжемо нерівність $y' > 0$: $\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0$. Помножимо обидві частини нерівності на додатні множники $\frac{1}{x^2}$ і $(x^2-1)^2$, дістанемо $x^2 - 3 > 0$, звідси $x > \sqrt{3}$. Отже, в інтервалі $(\sqrt{3};\ +\infty)$ функція зростає, а в інтервалах $(0;\ 1)$, $(1;\ \sqrt{3})$ — спадає.

6) Знайдемо екстремальні точки. Розв'яжемо рівняння $y' = 0$:

$$\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0,$$

звідси знайдемо стаціонарні точки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$.

При переході x через точку x_1 похідна знака не змінює, а при переході x через точку x_2 похідна y' змінює знак «−» на «+». Тому x_1 не є екстремальною точкою, а x_2 є точкою мінімуму і

$$y_{\min} = f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

7) Графік даної функції зображено на малюнку 131.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Яка функція називається зростаючою (спадною) в точці?

2. Яка функція називається зростаючою (спадною) на проміжку?

3. Сформулювати ознаку зростання (спадання) функції в точці.

4. Сформулювати ознаку зростання (спадання) функції на проміжку.

5. Яка точка називається точкою максимуму (мінімуму) функції?

6. Що називається максимумом (мінімумом) функції?

7. Яка точка називається екстремальною для функції $y = f(x)$?

8. Яка точка називається стаціонарною для функції $y = f(x)$?

9. Чи буде стаціонарна точка екстремальною для функції $y = f(x)$? Навести приклади.

10. Сформулювати необхідну умову існування екстремуму функції.

11. Сформулювати правила дослідження функції на екстремум.

12. Що називається найбільшим і найменшим значеннями неперервної функції, заданої на замкненому відрізку?

13. В яких точках відрізка неперервна функція може набувати свого найбільшого і найменшого значень?

14. Сформулювати правила знаходження найбільшого і найменшого значень функції.

ВПРАВИ

1. Знайти інтервали зростання і спадання функцій:

А

1) $y = x^4$; 2) $y = (x-2)^2$; 3) $y = 2 - x^3$;

4) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 5) $y = ax^2 + bx + c$; 6) $y = \sqrt{x}$;

7) $y = \frac{3}{x-2}$; 8) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

Б

9) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$; 10) $f(x) = \dfrac{5}{x+1}$;
11) $f(x) = x - x^3$; 12) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$;
13) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 8$; 14) $g(x) = x^4 - 4x + 3$.

В

15) $y = x^4 - 2x^2 - 3$; 16) $y = \dfrac{x^3}{1-x}$;
17) $y = \sqrt{x - 4x^2}$; 18) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$;
19) $y = \sin x - \dfrac{1}{2}x$; 20) $y = (x-1)^3(2x+3)^2$.

2. Знайти локальні екстремуми функцій:

А

1) $y = 4x - x^2$; 2) $y = 2x^3 + 6x^2 - 12x + 100$;
3) $y = \dfrac{4}{x} + x$; 4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = \sin x$;
6) $y = (a-x)(a-2x)$.

Б

7) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$; 8) $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{4}{x}$;
9) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$; 10) $f(x) = (x-2)^4$;
11) $f(x) = \sin x + \cos x$; 12) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$.

В

13) $y = x^4(x-12)^2$; 14) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4x}$;
15) $y = \dfrac{3x}{2 + x^2}$; 16) $y = x\sqrt[3]{x-2}$;
17) $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$; 18) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функцій:

А

1) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ на відрізку $[-1;\ 2]$;
2) $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на відрізку $[-2;\ 2]$;

3) $y = \frac{1}{2}x - \sin x$ на відрізку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Б

4) $y = \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 32x$ на відрізку $[0;\ 9]$;

5) $y = x + \sqrt{x}$ на відрізку $[1;\ 4]$;

6) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ на відрізку $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.

В

7) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ на відрізку $[-0,5;\ 0,7]$;

8) $y = x^{\frac{2}{3}}(x - 2)$ на відрізку $[-8;\ -1]$;

9) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

4. Розв'язати задачі на знаходження найменшого та найбільшого значень функцій:

А

1) Яке число слід додати до його квадрата, щоб дістати найменшу суму?

2) Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в коло радіуса r.

3) Як із квадратного листа жерсті зі стороною a виготовити бак з квадратною стороною без кришки найбільшого об'єму?

Б

4) Є дріт завдовжки a метрів. Як огородити цим дротом прямокутну ділянку землі, одна сторона якої прилягає до будинку, так, щоб площа огородженої ділянки була найбільшою?

5) Із всіх кругових секторів, що мають даний периметр, знайти сектор з найбільшою площею.

Вказівка: периметр сектора $p = 2r + \alpha r$, де r — радіус сектора і α — відповідний центральний кут.

В

6) Друкований текст (разом з проміжками між рядками) однієї сторінки книги повинен займати S см^2. Верхні

і нижні поля сторінки повинні мати ширину a см, бічні поля — b см. Які найвигідніші розміри сторінки, якщо враховувати лише економію паперу?

7) Із всіх прямокутників, що мають периметр 20 см, знайти той, у якого діагональ найменша.

8) Міцність балки прямокутного перерізу пропорційна її ширині і квадрату її висоти, тобто $p = kxy^2$. Який периметр повинен мати брус, вирізаний з циліндричної колоди радіуса R, щоб його міцність була найбільшою?

9) Вартість (за годину) утримання баржі складається з двох частин: вартості палива, яка пропорційна кубу швидкості баржі, і вартості амортизації баржі (заробітна плата команди, обладнання та ін.). Загальна вартість утримання баржі за годину, таким чином, виразиться формулою $S = av^3 + b$, де v — швидкість судна в км/год; a і b — коефіцієнти, задані для кожного судна.

Визначити, при якому v загальна сума утримання на 1 км шляху буде найменшою, якщо $a = 0,005$, $b = 40$.

5. Дослідити функції і побудувати графіки:

А

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = 1 - 2x^2 - \frac{x^3}{3}$;
3) $y = -x^2 + 5x - 4$; 4) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Б

5) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$; 6) $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1; 1]$;
7) $y = \frac{1}{x(x-1)}$; 8) $y = 2\cos x + x$.

В

9) $y = x^4 - 10x^2 + 9$; 10) $y = 2|x| - x^2$;
11) $y = \sin 2x + 2\sin x$; 12) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}$.

ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

§ 1. Первісна. Таблиця первісних

Зауважимо, що кожна дія (операція), яку вивчали у шкільному курсі, має обернену: додавання — віднімання; множення — ділення; піднесення до степеня — добування кореня; множення одночлена на многочлен — розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки та ін. При цьому деякі з обернених операцій виявилися неоднозначними. Наприклад, дія добування квадратного кореня з додатного числа, яка є оберненою до дії піднесення до квадрата, є двозначною. Справді, існує два значення квадратного кореня з числа 25, а саме числа 5 і -5, бо $5^2 = 25$ і $(-5)^2 = 25$.

Основною операцією диференціального числення є знаходження похідної $y' = f'(x)$ даної функції $y = f(x)$. Проте під час розв'язування різних задач, зокрема фізичних і геометричних, іноді треба виконати обернену задачу: за відомою похідною $y' = f'(x)$ деякої функції знайти (відновити) саму функцію $y = f(x)$, яку називають первісною для відомої функції.

П р и к л а д 1. Нехай дано функцію $f(x) = x^2$, яка є похідною невідомої функції $F(x)$. Треба знайти функцію $F(x)$. Щоб це зробити, спробуємо відповісти на запитання: похідна якої функції дорівнює x^2?

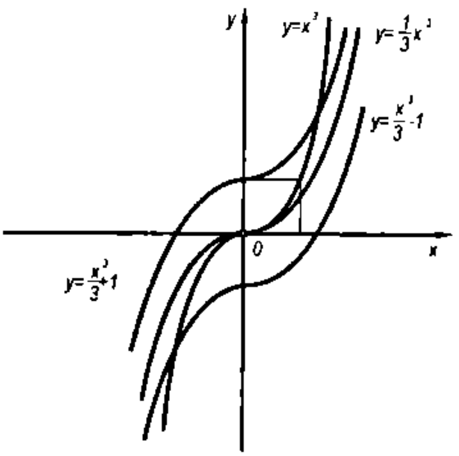
Неважко зробити висновок, що похідна функції $F(x) = \frac{x^3}{3}$ дорівнює x^2, тобто $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Первісною для даної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $\langle a;\ b\rangle$ називається така функція F, похідна якої *для всіх x з інтервалу $(a;\ b)$ дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a;\ b)$.*

Виникає ще одне запитання: чи існують інші функції, похідні яких дорівнюють x^2?

Виявляється, що існують, бо не лише $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, а й $\left(\frac{x^3}{3}+5\right)' = x^2$, $\left(\frac{x^3}{3}-0,2\right)' = x^2$, $\left(\frac{x^3}{3}+\sqrt{5}\right)' = x^2, \ldots$.

Отже існує безліч функцій, похідні яких дорівнюють x^2. Їх можна записати у вигляді однієї множини $\frac{x^3}{3}+C$, де C — довільна стала (число). Якщо $F(x)$ — одна первісна, то $F(x)+C$ — загальний вигляд первісної для функції $y = f(x)$.



Мал. 132

Геометричне тлумачення первісної $F(x) = \frac{x^3}{3}$ для даної функції $y = x^2$ зробити неважко — це кубічна парабола, графік якої дістаємо з графіка функції $y = x^3$, стискаючи його у 3 рази до осі Ox. Загальним виглядом первісної для функції $y = x^2$ є множина кубічних парабол, які дістаємо з графіка $y(x) = \frac{x^3}{3}$, паралельно переносячи його вгору вздовж осі Oy чи вниз на відстань C — залежно від знака C (мал. 132). Отже, у загальному вигляді первісною для $y = x^2$ є множина $\frac{x^3}{3} + C$ кубічних парабол.

Операція знаходження первісної F для даної функції $y = f(x)$ називається *інтегруванням*. Вона є оберненою до операції диференціювання. Отже, операція інтегрування є багатозначною.

Приклад 2. Для функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = -\frac{1}{x}$, бо $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.

Приклад 3. Для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на інтервалі $(0; +\infty)$ первісною є $F(x) = 2\sqrt{x}$, бо $(2\sqrt{x})' = (2x^{\frac{1}{2}})' = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Користуючись таблицею похідних, заповнимо таблицю первісних для функцій, похідні яких відомі (табл. 14).

Таблиця 14

Функція $y = f(x)$	Загальний вигляд первісної $F(x) + C$
k, де k — стала	$kx + C$
x^n, де $n \in Z$, $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}x + C$

Розглянемо дві задачі фізичного і геометричного змісту, які приводять до поняття первісної. Розв'язування цих задач допоможе з'ясувати фізичний та геометричний зміст довільної сталої C.

З а д а ч а 1 (о б е р н е н а д о з а д а ч і, я к а п р и в е л а д о п о н я т т я п о х і д н о ї). Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v = \mathrm{g}t$, де $\mathrm{g} \approx 10$м/с^2. Знайти закон руху, якщо за перші 4 с тіло пройшло 80 м.

Р о з в' я з а н н я. Шуканий закон руху є функцією часу t. Позначимо її через $s = s(t)$. Оскільки швидкість прямолінійного нерівномірного руху є похідною функції $s = s(t)$, то $s'(t) = \mathrm{g}t$.

Отже, треба знайти функцію $s = s(t)$ — таку, що $s'(t) = \mathrm{g}t$, а $s(4) = 80$ м.

Множина функцій, похідні яких дорівнюють $\mathrm{g}t$, має вигляд $s(t) = \frac{\mathrm{g}t^2}{2} + C$, де C — довільна стала (число). Коли б в умові задачі не вказувалось, що за перші 4 с тіло пройшло 80 м, то стала C залишалась би невизначеною. Але, за вказаною додатковою умовою, можна обчислити значення C і тим самим із множини функцій $s(t) = \frac{\mathrm{g}t^2}{2} + C$ вибрати ту, яка відповідає умові задачі.

За умовою, коли $t = 4$, $s(t) = 80$. Підставляючи ці значення t і $s(t)$ у попередню рівність, дістанемо $80 = \frac{10 \cdot 16}{2} + C$, звідки $C = 0$.

Підставляючи знайдене значення C у формулу загального вигляду первісної, дістанемо $s(t) = \frac{\mathrm{g}t^2}{2}$. Це закон руху тіла, що вільно падає.

З а д а ч а 2 (о б е р н е н а д о з а д а ч і п р о п р о в е д е н н я д о т и ч н о ї д о к р и в о ї у п е в н і й т о ч ц і). Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $M(1;\ 2)$, якщо кутовий коефіцієнт проведеної до неї дотичної дорівнює $4x^3$.

Р о з в' я з а н н я. У цій задачі треба знайти формулу, що задає функцію F, похідною якої є функція $f(x) = 4x^3$, тобто треба знайти первісну функції $y = 4x^3$. Крім того, відомо, що графік шуканої функції проходить через задану точку $M(1;\ 2)$.

Множина первісних функцій для функції $y = 4x^3$ має вигляд $F(x) = x^4 + C$. Щоб виділити з цієї множини первісну, графік якої проходить через точку $M(1;\ 2)$, врахуємо, що коли $x = 1$, значення функції $F(1)$ має дорівнювати 2. Підставляючи у рівність $F(x) = x^4 + C$ замість x число 1, а замість $F(x)$ — число 2 дістанемо $2 = 1 + C$, звідки $C = 1$. Підставляючи значення C в ту саму рівність, дістанемо $F(x) = x^4 + 1$ — шукане рівняння кривої, яка проходить через точку $M(1;\ 2)$.

У курсі математичного аналізу доведено таку теорему. Сформулюємо її без доведення.

Теорема. Будь-яка неперервна на відрізку $[a;\ b]$ функція $y = f(x)$ має первісну функцію.

§ 2. Основна властивість первісної

Наведемо без доведення допоміжну лему, яку будемо використовувати при доведенні основної властивості первісної.

Лема. Якщо $F'(x) = 0$ на деякому проміжку $\langle a;\ b\rangle$, то $F(x) = C$ на цьому проміжку, де C — стала.

Геометричне тлумачення цієї леми випливає з геометричного змісту похідної. Оскільки $F'(x) = 0$, то дотична до графіка функції $y = F(x)$ у кожній точці паралельна осі Ox. Тому її графік збігається з відрізком прямої, паралельної осі Ox. Цю лему доведено в курсі математичного аналізу.

Основну властивість первісної сформулюємо і доведемо у вигляді двох теорем.

Теорема 1. Якщо на проміжку $\langle a;\ b\rangle$ функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то на цьому проміжку первісною для $f(x)$ буде також функція $F(x) + C$, де C — довільна стала (число).

Доведення. Нехай $F(x)$ — первісна для $f(x)$. Згідно з означенням первісної, $F'(x) = f(x)$, але тоді і $(F(x) + C)' = f(x)$. Теорему доведено.

Теорема 2. Будь-які дві первісні функції для однієї і тієї самої функції відрізняються одна від одної на сталий доданок.

Доведення. Нехай $F(x)$ і $\Phi(x)$ — дві первісні для однієї і тієї самої функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, тобто, за означенням, $F'(x) = f(x)$ і $\Phi'(x) = f(x)$.

Знайдемо похідну різниці даних функцій:

$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$

Згідно з лемою, функція $\Phi(x) - F(x)$ — стала на проміжку $\langle a;\ b\rangle$, тобто $\Phi(x) - F(x) = C$, де C — довільна стала.

З попередньої рівності випливає, що $\Phi(x) = F(x) + C$.

Теорему доведено.

§ 3. Правила знаходження первісних

Оскільки операція знаходження первісної (операція інтегрування) є оберненою до операції знаходження похідної (операція диференціювання), то правила знаходження первісних випливають з відповідних правил знаходження похідних. Розглянемо три таких правила.

1) Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а $G(x)$ — первісною для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ є первісною для $f(x) + g(x)$.

Справді, оскільки $F'(x) = f(x)$, а $G'(x) = g(x)$, то

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

2) Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k — стале число, то $kF(x)$ є первісною для $kf(x)$.

Справді, оскільки сталий множник можна виносити за знак похідної, то $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

Отже, сталий множник можна виносити за знак первісної.

3) Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k і b — сталі (числа), причому $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною для $f(kx + b)$.

Справді за правилами диференціювання,

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b) \cdot k = f(kx + b).$$

Ці правила використовують для знаходження первісних.

Приклад 1. Знайти загальний вигляд первісної для функцій: 1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$; 2) $x^3 - \sin x$; 3) $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{7x+2}}$.

Розв'язання. 1) Оскільки однією з первісних для функції x^2 є $\frac{x^3}{3}$, а для функції $\frac{1}{x^2}$ — функція $-\frac{1}{x}$, то, за першим правилом знаходження первісних функцій, одна з первісних для функції $x^2 + \frac{1}{x}^2$ дорівнює $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}$, а первісна має загальний вигляд $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

2) Одна з первісних для функції x^3 дорівнює $\frac{x^4}{4}$, тоді, за другим правилом знаходження первісних, одна з первісних функції $2x^3$ дорівнює $\frac{2x^4}{4} = \frac{x^4}{2}$, а одна з первісних для функції $\sin x$ дорівнює $-\cos x$. За першим правилом знаходження первісних одна з первісних для функції $2x^3 - \sin x$ дорівнює $\frac{x^4}{2} - (-\cos x) = \frac{x^4}{2} + \cos x$, а у загальному вигляді первісна дорівнює $\frac{x^4}{2} + \cos x + C$.

3) Одна з первісних для функції $\frac{1}{\cos^2 x}$ дорівнює $\operatorname{tg} x$. Для функції $\frac{1}{\sqrt{x}}$ однією з первісних є $2\sqrt{x}$. За третім правилом знаходження первісних, одна з первісних для функції $\frac{1}{\sqrt{7x+2}}$ дорівнює $\frac{2}{7}\sqrt{7x+2}$.

Отже, за першим правилом, одна з первісних функції $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{7x+2}}$ дорівнює $\operatorname{tg} x + \frac{2}{7}\sqrt{7x+2}$, а загальний вигляд первісної: $\operatorname{tg} x + \frac{2}{7}\sqrt{7x+2} + C$.

Приклад 2. Швидкість руху точки задано рівнянням $v = 7\sin t$. Знайти рівняння руху, якщо в момент часу $t = 0$ точка знаходиться на відстані 12 м від початкового положення.

Розв'язання. Закон руху $s = s(t)$ точки знаходимо, інтегруючи функцію, що виражає швидкість. Первісна для функції $v = 7\sin t$ дорівнює $-7\cos t + C$. Отже, $s(t) = -7\cos t + C$, де C – довільна стала інтегрування. Для обчислення C використаємо умову $s(t) = 12$, коли $t = 0$. Підставимо ці значення t і $s(t)$ у рівняння $s(t) = -7\cos t + C$, дістанемо $12 = -7 + C$. Звідси $C = 19$.

Підставляючи значення C в те саме рівняння, дістанемо шуканий закон руху $s(t) = -7\cos t + 19$.

П р и к л а д 3. Точка рухається вздовж прямої зі сталим прискоренням a. Знайти рівняння руху $s = s(t)$, якщо відомо, що в момент часу $t = 0$ точка знаходилася на відстані s_0 від початкового положення і мала початкову швидкість $v = v_0$.

Р о з в 'я з а н н я. Оскільки прискорення a є похідною від швидкості v, тобто $v' = a$, то $v = at + C_1$, де C_1 — стала інтегрування.

Для обчислення C_1 покладемо в останньому рівнянні $t = 0$ і $v = v_0$. Дістанемо $v_0 = a \cdot 0 + C_1$. Звідси $C_1 = v_0$.

Підставляючи значення C_1 в рівняння $v = at + C_1$, дістанемо $v = v_0 + at$.

Закон руху $s = s(t)$ знайдемо, визначивши первісну функції $v = v_0 + at$. Вона дорівнює $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C_2$. Підставляючи в останнє рівняння замість t значення $t = 0$, а замість s — значення s_0, визначимо C_2. Отже, $s_0 = v_0 \cdot 0 + \frac{a \cdot 0}{2} + C_2$. Звідси $C_2 = s_0$.

Підставляючи значення C_2 в загальний вигляд первісної, дістанемо $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

П р и к л а д 4. Матеріальна точка масою 3 кг рухається вздовж осі Ox внаслідок дії сили F. У момент часу t сила $F(t) = 2t - 1$. Знайти закон руху $x = x(t)$, якщо відомо, що коли $t = 1$ с, швидкість руху точки 5 м/с, а координата $x = 3$, де F — сила у ньютонах, t — час у секундах, x — шлях у метрах.

Р о з в' я з а н н я. За другим законом Ньютона, $F = ma$. Звідси

$$a = \frac{F}{m} \text{ і } a(t) = \frac{2t - 1}{3} = \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}.$$

Оскільки швидкість є первісною для прискорення руху точки, то

$$v(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3}t + C_1 = \frac{t^2}{3} - \frac{1}{3}t + C_1.$$

Щоб знайти C_1, врахуємо, що коли $t = 1$ с, швидкість дорівнює 5 м/с. Підставляючи ці значення у рівняння $v(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{1}{3}t + C_1$, дістанемо $5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + C_1$, звідси $C_1 = 5$. Підставляючи C_1 в те саме рівняння, знайдемо закон зміни швидкості $v(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{1}{3}t + 5$.

Закон руху $x = x(t)$ є первісною для швидкості. Тому

$$x(t) = \frac{t^3}{9} - \frac{t^2}{6} + 5t + C_2.$$

За умовою, коли $t = 1$ с, то $x = 3$. Підставляючи ці значення в останнє рівняння, знаходимо $3 = \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + 5 + C_2$. Звідси $C_2 = -\frac{35}{18}$.

Підставляючи C_2 в те саме рівняння, дістанемо закон руху

$$x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{6} + 5t - \frac{35}{18}.$$

§ 4. Інтеграл

1. Приклади задач, що приводять до поняття інтеграла. До поняття інтеграла, як і багатьох інших математичних понять, привели потреби розв'язування задач геометрії, фізики та багатьох практичних задач. Розглянемо дві такі задачі.

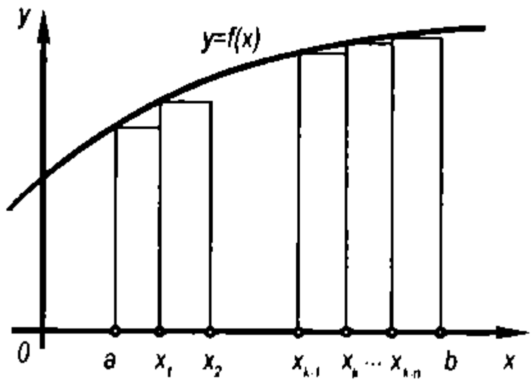
Задача 1 (про площу криволінійної трапеції). У шкільному курсі геометрії розглядаються способи обчислення площ невеликої кількості фігур лише певного виду (многокутників, круга та його частин). Виникає запитання: як обчислити площу плоскої фігури, обмеженої будь-якою кривою? Виявляється, що розв'язування такої задачі можливе за певних умов.

Розглянемо спочатку плоску фігуру, обмежену графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a;\ b]$ функції

$y = f(x)$, відрізком $[a;\ b]$ і прямими $x = a$ і $x = b$ (мал. 133). Ця фігура дістала назву *криволінійної трапеції*. Обчислимо її площу. Для цього розіб'ємо відрізок $[a;\ b]$ на n рівних відрізків точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots\ < x_{k-1} < x_k < \ \ldots$$

$$\ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Мал. 133

Довжини будь-якого з відрізків $[x_{k-1};\ x_k]$, на які розбито відрізок $[a;\ b]$, однакові і дорівнюють

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1},\ \text{де}\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n.$$

Побудуємо на кожному з відрізків $[x_{k-1};\ x_k]$, як на основі, прямокутники з висотою, що дорівнює значенню $f(x_{k-1})$ функції у лівому кінці відрізка. Площа кожного такого прямокутника дорівнює

$$f(x_{k-1}) \cdot \Delta x = f(x_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n},$$

а площа східчастого многокутника, утвореного всіма прямокутниками, дорівнює сумі площ прямокутників

$$S_n = f(x_0) \cdot \frac{b-a}{n} + f(x_1) \cdot \frac{b-a}{n} + \ \ldots\ + f(x_{n-1}) \times$$

$$\times \frac{b-a}{n} = (f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

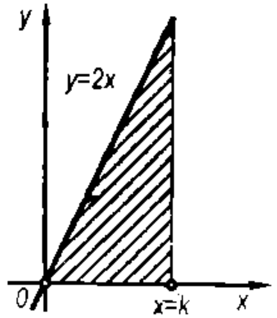
Якщо $n \to \infty$, то $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \to 0$, і оскільки функція $y = f(x)$ неперервна, то східчаста фігура буде все менше відрізнятися від криволінійної трапеції. А тому площа S криволінійної трапеції буде все менше відрізнятися від S_n, тобто $S_n \approx S$. При досить великих n це наближена рівність справджується з будь-якою точністю. Тому природно за площу криволінійної трапеції, за означенням, взяти границю площі східчастого многокутника за умови $n \to \infty$, тобто $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

У курсі математичного аналізу доведено, що для будь-якої неперервної функції $y = f(x)$ (не обов'язково невід'ємної) така границя існує і дорівнює певному числу.

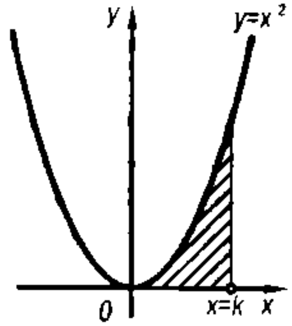
Введений метод обчислення площ плоских фігур можна застосувати і для тих фігур, формули площ яких було введено у шкільному курсі геометрії (многокутники, круг і його частини), але можливості нового розглядуваного методу значно ширші.

Наведемо приклади обчислення за цим методом площ трикутника і фігури, обмеженої параболою.

Приклад 1. Обчислити площу трикутника, обмеженого віссю Ox, прямими $x = k$ і $y = 2x$ (мал. 134).



Мал. 134



Мал. 135

Розв'язання. Тут криволінійна трапеція має вигляд прямокутного трикутника, причому $a = 0$, $b = k$, а функція $y = 2x$, графік якої обмежує трикутник, додатна і неперервна на $[0;\ k]$.

Розіб'ємо відрізок $[0;\ k]$ на n рівних частин. Довжина кожного з утворених при цьому відрізків дорівнює $x_k -$

$x_{k-1} = \Delta x = \dfrac{k}{n}$. Абсцисами правих кінців кожного з відрізків є:

$$x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x,\ x_3 = 3\Delta x, \ldots,$$

$$\ldots, x_k = k\Delta x, \ldots, x_n = n\Delta x = k.$$

Утворимо добутки $f(x_k)\Delta x$ і знайдемо суму

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x,$$

$$S_n = 2\Delta x \cdot \Delta x + 2 \cdot 2\Delta x \cdot \Delta x + 2 \cdot 3\Delta x \cdot \Delta x + \ldots$$

$$\ldots + 2n\Delta x \cdot \Delta x = 2(\Delta x)^2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$$

$$= 2 \cdot \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = k^2 \cdot \frac{n+1}{n},$$

враховуючи, що $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (Останню формулу неважко довести методом математичної індукції.)

Звідси

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = k^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = k^2 \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ (кв. од.).}$$

Обчисливши площу трикутника за відомою з геометрії формулою (площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів), дістанемо той самий результат.

Задача 2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$, віссю Ox і прямою $x = k$ (мал. 135).

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[0;\ k]$ на n рівних частин і обчислимо суму

$$S_n = (\Delta x)^2 \cdot \Delta x + (2\Delta x)^2 \cdot \Delta x +$$

$$+ (3\Delta x)^2 \cdot \Delta x + \ldots + (n\Delta x)^2 \cdot \Delta x =$$

$$= (\Delta x)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = (\Delta x)^3 \times$$

$$\times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{k^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

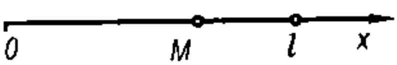
враховуючи, що $1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (Доведіть останню формулу самостійно методом математичної індукції.)

Отже,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{k^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}=$$

$$=\frac{k^3}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{k^3}{6}\cdot 2=\frac{k^3}{3}\text{ (кв. од.).}$$

Задача 3 (про масу неоднорідного стержня). Обчислимо масу неоднорідного стержня, тобто такого, в якого густина змінюється від точки до точки на ділянці $[0;\ l]$ (мал. 136). Якщо позначити через x відстань точки M стержня від лівого його кінця, то кожному значенню x відповідатиме певне значення густини ρ. Отже, густина ρ є функцією від x, яку позначимо $\rho=\rho(x)$.



Мал. 136

Щоб знайти масу стержня, розіб'ємо відрізок $[0;\ l]$ на n рівних частин точками

$$0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots$$

$$\ldots<x_{n-1}<x_n=l.$$

Довжина кожного з утворених відрізків $[x_{k-1};\ x_k]$ дорівнює $x_k-x_{k-1}=\Delta x=\frac{l}{n}$.

Якщо $n\to\infty$, то $\Delta x\to 0$. На досить малій ділянці стержня густину його можна вважати однаковою і такою, що дорівнює, наприклад, значенню функції $\rho=\rho(x)$ на лівому кінці відрізка. Тоді маса кожного з відрізків дорівнює $\rho(x_{k-1})\Delta x$, а сума

$$m_n=\rho(x_0)\Delta x+\rho(x_1)\Delta x+\ldots+\rho(x_{n-1})\Delta x$$

дасть наближене значення маси m всього стержня $[0;\ l]$.

Тому, за означенням, природно вважати, що маса m неоднорідного стержня дорівнює $\lim_{n\to\infty} m_n$, тобто $m = \lim_{n\to\infty} m_n$.

2. Означення інтеграла. Обидві розглянуті задачі розв'язували одним і тим самим методом, яким розв'язують багато інших задач (обчислення роботи змінної сили, кількість електрики та ін.). Узагальнити цей метод можна так.

Розглядають неперервну функцію $y = f(x)$, невід'ємну на відрізку $[a;\ b]$. Відрізок $[a;\ b]$ розбивають на n рівних частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Довжина кожного з відрізків $[x_{k-1};\ x_k]$ дорівнює $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = \Delta x$. Утворюють добутки $f(x_0)\Delta x$, $f(x_1)\Delta x, \ldots, f(x_{n-1})\Delta x$ і знаходять їх суму

$$S_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x.$$

Обчислюють $\lim_{n\to\infty} S_n$.

За означенням, цю границю називають *інтегралом функції* $y = f(x)$ від a до b і позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читають так: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»).

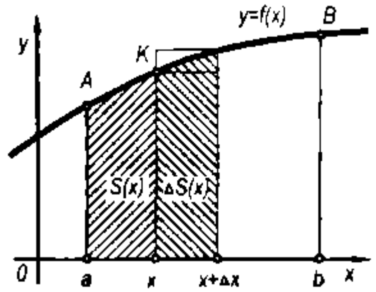
Числа a і b називають *межами інтегрування:* a — нижньою межею, b — верхньою межею. Символ $\int$ називають *знаком інтеграла*, функцію $y = f(x)$ — *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*, змінну x — *змінною інтегрування*. Отже за означенням,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

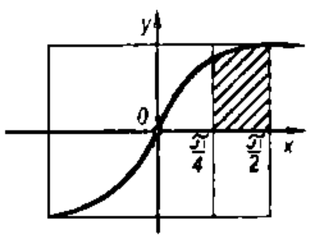
Зазначимо, що відрізок $[a;\ b]$ можна було б ділити на n не обов'язково рівних частин. Але у цьому разі довжина найбільшого з відрізків розбиття повинна прямувати до 0, коли $n \to \infty$.

Застосовуючи поняття інтеграла до двох розглянутих задач, можна стверджувати, що $S = \int_a^b f(x)dx$ — площа криволінійної трапеції, а $m = \int_0^l \rho(x)dx$ — маса неоднорідного стержня.

3. Формула Ньютона – Лейбніца. Безпосередньо за означенням інтеграли легко обчислювати лише для найпростіших функцій, таких, як $y = kx$, $y = x^2$ (див. дві попередні задачі про обчислення площ). Для інших функцій, наприклад тригонометричних, обчислення границь сум ускладнюється.



Мал. 137



Мал. 138

Виникає запитання: чи не можна обчислювати інтеграли іншим способом? Такий спосіб був знайдений ще у XVII ст. англійським ученим Ньютоном і німецьким математиком Лейбніцем. Строге доведення формули Ньютона – Лейбніца дають у курсі математичного аналізу. Ми лише проілюструємо справедливість формули геометричними міркуваннями.

Нагадаємо задачу про площу криволінійної трапеції (мал. 137). Було встановлено, що $S = \int_a^b f(x)dx$.

Виберемо довільну точку $x \in [a; b]$ і проведемо через неї перпендикуляр Kx до осі Ox. Площа фігури $aAKx$ змінюється із змінною x, тобто є функцією від x. Позначимо цю функцію через $S(x)$ і покажемо, що існує її похідна, причому $S'(x) = f(x)$, де $y = f(x)$ — підінтегральна функція, графік якої обмежує криволінійну трапецію. Іншими словами, покажемо, що $S(x)$ є первісною для $f(x)$.

Надамо змінній x приросту Δx, вважаючи (для спрощення міркувань), що $\Delta x > 0$. Тоді і функція $S(x)$ набуде приросту $\Delta S(x)$. У курсі математичного аналізу доводиться, що неперервна на проміжку $[a;\ b]$ функція $y = f(x)$ набуває на цьому найбільшого і найменшого значень. Оскільки підінтегральна функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[x;\ x + \Delta x]$, то вона набуває на цьому проміжку найменшого m і найбільшого M значень. Отже,

$$m\Delta x < \Delta S(x) < M\Delta x.$$

Поділивши всі частини цієї нерівності на $\Delta x > 0$, дістанемо

$$m < \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} < M.$$

Враховуючи неперервність функції $y = f(x)$, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = f(x).$$

Але тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x)$,то $S'(x) = f(x)$, тобто функція $S(x)$ є однією з первісних функції $y = f(x)$.

Позначимо через $F(x)$ будь-яку первісну для функції $y = f(x)$. За основною властивістю первісної, будь-які первісні однієї і тієї самої функції можуть відрізнятися лише сталим доданком C. Тому

$$S(x) = F(x) + C. \tag{1}$$

Якщо $x = a$, криволінійна трапеція вироджується у відрізок aA, тому $S(x) = 0$.

Підставляючи у рівність (1) замість x число a, а замість $S(x)$ — число 0, дістанемо $C = -F(a)$.

Підставивши замість C у рівність (1) його значення, дістанемо

$$S(x) = F(x) - F(a). \tag{2}$$

Якщо $x = b$, площа криволінійної трапеції дорівнює числу $S = S(b)$. Крім того, коли $x = b$ із рівності (2) дістаємо $S(b) = F(b) - F(a)$.

Раніше було встановлено, що площа S криволінійної трапеції дорівнює значенню $\int_a^b f(x)dx$. Тому можна зробити висновок, що

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Це і є формула Ньютона – Лейбніца, яка показує, що значення інтеграла на відрізку $[a;\ b]$ дорівнює різниці значень первісної підінтегральної функції, коли $x = b$ і $x = a$.

Різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)|_a^b$. Тому рівність

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

можна записати так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Розв'язання розглянутих у попередньому параграфі двох задач про площі трикутника і фігури, обмеженої параболою, значно спрощуються, якщо використати формулу Ньютона — Лейбніца. Справді,

$$S_{\Delta OAB} = \int_0^k 2x\,dx = x^2\Big|_0^k = k^2 - 0 = k^2 \text{ (кв. од.)};$$

$$S_{OBC} = \int_0^k x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^k = \frac{k^3}{3} - 0 = \frac{k^3}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

П р и к л а д 1. Обчислимо за формулою Ньютона — Лейбніца площу фігури, обмеженої зверху синусоїдою $y =$

$= \sin x$, знизу — віссю Ox, а з боків — прямими $x = \frac{\pi}{4}$ і $x = \frac{\pi}{2}$ (мал. 138).

Розв'язання.

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (кв. од.).}$$

Запишемо символічно основні властивості інтеграла, які випливають із властивості первісної і формули Ньютона – Лейбніца. Їх неважко довести, користуючись означенням інтеграла:

1) $\int\limits_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b \varphi(x)dx$;

2) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, де $k \in R$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, тобто якщо відрізок $[a;\ b]$ розбито на два відрізки точкою c, то інтеграл на відрізку $[a;\ b]$ дорівнює сумі інтегралів на відрізках $[a;\ c]$ і $[c;\ b]$;

4) $\int\limits_a^b f(kx+p)dx = \frac{1}{k}\int\limits_{ka+p}^{kb+p} f(t)dt$, де $p \in R$, $k \in R$.

Доведіть самостійно перші три властивості. Останню властивість доведено в курсі математичного аналізу.

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x^3 - \cos x)dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x^3 - \cos x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^3 dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} -$$

$$\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^4}{1024} - \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^4}{1024} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,698.$$

П р и к л а д 3. Обчислити $\int\limits_1^2 (x+2)^2 dx$.

Р о з в' я з а н н я.

$$\int\limits_1^2 (x+2)^2 dx = \int\limits_1^2 (x^2+4x+4)dx = \int\limits_1^2 x^2 dx +$$

$$+ \int\limits_1^2 4x dx + \int\limits_1^2 4dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + 4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 4x\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + 2(4-1) + 4(2-1) = \frac{7}{3} + 6 + 4 = 12\frac{1}{3}.$$

П р и к л а д 4. Обчислити $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx$.

Р о з в' я з а н н я.

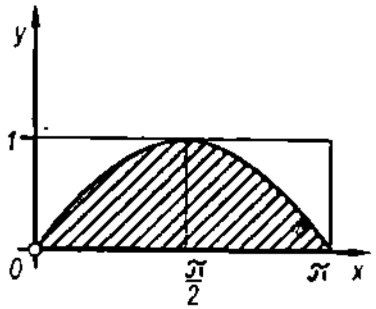
$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} = .$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) =$$

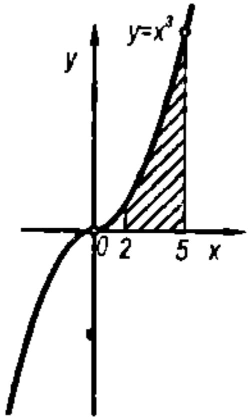
$$= \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0,235.$$

4. Застосування інтеграла. Обчислення площ плоских фігур. Два приклади обчислення площ трикутника і параболічного сегмента ми вже розглянули. Наведемо ще кілька прикладів.

П р и к л а д 5. Обчислити площу фігури, обмеженої: 1) синусоїдою $y = \sin x$ і відрізком $[0;\ \pi]$ осі Ox (мал. 139); 2) кубічною параболою $y = x^3$, віссю Ox та прямими $x = 2$ і $x = 5$ (мал. 140).



Мал. 139

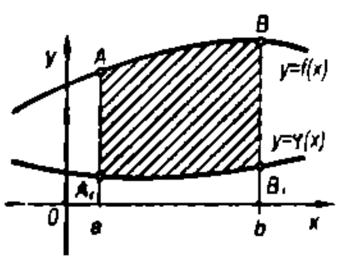


Мал. 140

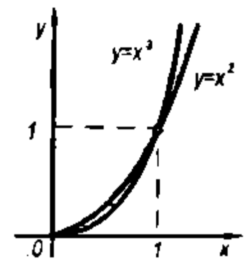
Розв'язання.

1) $S = \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) =$
$= -(-1 - 1) = 2$ (кв. од.).

2) $S = \int\limits_2^5 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^5 = \frac{1}{4}(5^4 - 2^4) = \frac{1}{4}(5^2 - 2^2)(5^2 +$
$+2^2) \approx 152$ (кв. од.).



Мал. 141



Мал. 142

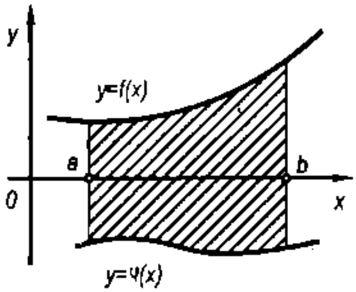
Виникає запитання, як обчислити площу фігури обмеженої графіками двох неперервних функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ (мал. 141)

Неважко помітити, що $S_{A_1ABB_1} = \int\limits_a^b f(x)dx -$
$- \int\limits_a^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$, за першою властивістю інтеграла.

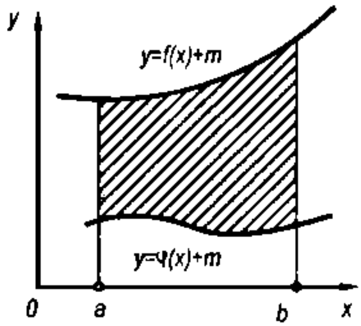
П р и к л а д 6. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = x^2$ і $y = x^3$.

Р о з в' я з а н н я. Побудувавши ескізи графіків функцій (мал. 142), з'ясуємо, площу якої фігури слід знайти, графіки яких функцій її обмежують і визначимо межі інтегрування. У даному випадку $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$, $a = 0, b = 1$.

$$S = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ (кв.од.).}$$



Мал. 143



Мал. 144

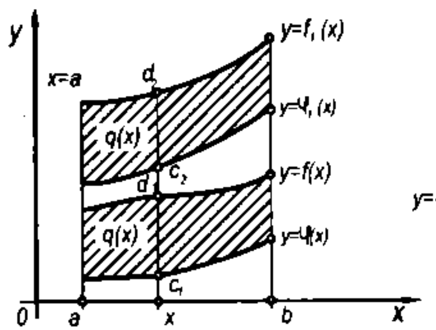
Виникає запитання: чи можна застосувати формулу $S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx$, якщо фігура, площу якої треба обчислити, розташована частково чи повністю під віссю Ox (мал. 143)? Виявляється, що можна. Щоб переконатися в цьому, досить перенести дану фігуру паралельно вздовж осі Oy на відстань m так, щоб вона розмістилася над віссю Ox (мал.144). А таке перетворення означає, що дані функції $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ ми замінили новими функціями $f_1(x) = f(x) + m$ і $\varphi_1 = \varphi(x) + m$. Площа фігури обмеженої графіками цих функцій, дорівнює площі даної фігури. Тому шукана площа

$$S = \int_a^b (f_1(x) - \varphi_1(x))dx = \int_a^b ((f(x) + m) - (\varphi(x) + m))dx =$$

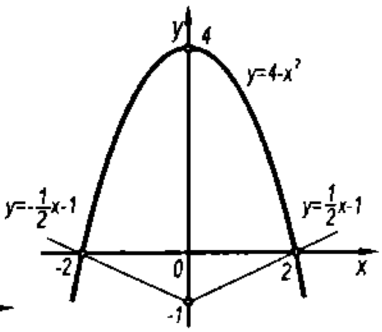
$$= \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx.$$

Якщо позначити $f(x) - \varphi(x) = q(x)$, то $S = \int\limits_a^b q(x)dx$.

Це означає, що для обчислення площі важливою є не форма фігури, а довжина відрізка $q(x)$ ординати, що дорівнює різниці ординат точок графіків відповідних функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$. Отже, якщо взяти дві інші функції $y = f_1(x)$ і $y = \varphi_1(x)$, які задовольняють умову $f_1(x) - \varphi_1(x) = q(x)$ у будь якій точці $x \in [a;\ b]$, то площа фігури, обмеженої графіками цих функцій, дорівнюватиме площі фігури, обмеженої графіками функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ (мал. 145).



Мал. 145



Мал. 146

П р и к л а д 7. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ та прямими $y = -\frac{1}{2}x - 1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$ (мал. 146).

Р о з в' я з а н н я. На відрізку $[-2,\ 0]$

$$q(x) = (4 - x^2) - \left(-\frac{1}{2}x - 1\right) = -x^2 + \frac{1}{2}x + 5,$$

а на відрізку $[0;\ 2]$

$$q_1(x) = (4 - x^2) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = -x^2 - \frac{x}{2} + 5.$$

Шукану площу знаходимо як суму двох інтегралів:

$$S = \int\limits_{-2}^{0} q(x)dx + \int\limits_{0}^{2} q_1(x)dx = \int\limits_{-2}^{0} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + 5\right) dx +$$

$$+\int_0^2\left(-x^2-\frac{1}{2}x+5\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+5x\right)\Bigg|_{-2}^{0}+$$

$$+\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}+5x\right)\Bigg|_{0}^{2}=-\left(\frac{8}{3}+1-10\right)+$$

$$+\left(-\frac{8}{3}-1+10\right)=-\frac{8}{3}-1+10-\frac{8}{3}-1+10=$$

$$=12\frac{2}{3}\ \text{(кв.од.)}.$$

Площу даної фігури можна обчислити раціональніше, якщо звернути увагу на те, що фігура симетрична відносно осі Oy. Тому

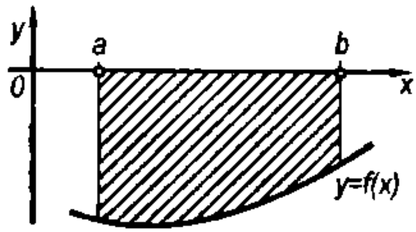
$$S=2\int_0^2 q_1(x)dx=2\int_0^2\left(-x^2-\frac{x}{2}x+5\right)dx=$$

$$=2\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}+5x\right)\Bigg|_0^2=2\cdot\frac{19}{3}=12\frac{2}{3}\ \text{(кв.од.)}.$$

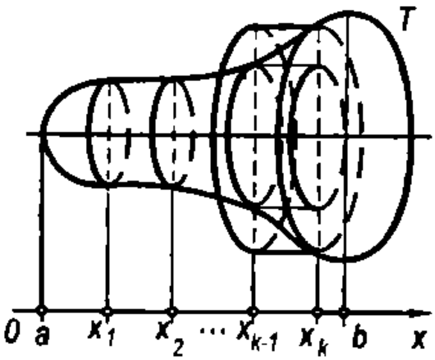
Зазначимо, що коли криволінійна трапеція розміщена під віссю $0x$ (мал. 147), то $\int_a^b f(x)dx$ — від'ємний. Тоді вважатимемо, що $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Обчислення об'ємів тіл. Задача про обчислення об'єму тіла розв'язується аналогічно до задачі про площу криволінійної трапеції.

Нехай задано тіло T і координатна пряма Ox у просторі (мал. 148). Проведено площини, перпендикулярні до прямої Ox так, щоб вони перетинали тіло T або дотикались до нього. Дотичні площини, що обмежують тіло, перетнуть вісь Ox у точках a і b, а будь яка площина між ними перетне її в точці x. Позначимо площу перерізу тіла цією площиною через S. Кожному значенню x з відрізка $[a;\ b]$ відповідатиме певне значення площі перерізу $S=S(x)$. Площина перерізу буде відтинати тіло, об'єм якого є також функцією x, тобто $V = V(x)$. Тому можна стверджувати, що на відрізку $[a;\ b]$ визначена функція $S(x)$. Якщо вона неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то функція $V(x)$ є первісною для функції $S(x)$ і справджується формула $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.



Мал. 147



Мал. 148

Строге доведення цієї формули дано у курсі математичного аналізу. Наведемо лише геометричні міркування, які приводять до вказаної формули.

Розіб'ємо відрізок $[a;\ b]$ на n рівних частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots\ < x_{k-1} < x_k,\ \dots$$

$$\dots\ < x_{n-1} < x_n = b.$$

Позначимо довжини кожного з відрізків розбиття через $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$ де $k = 1,\ 2,\ \dots,\ n$. Через кожну точку розбиття проведено площину, перпендикулярну до осі Ox. Проведені площини розіб'ють тіло T на шари. Об'єм шару, що міститься між площинами, які проходять через точки x_{k-1} і x_k при досить малих Δx (тобто досить великих n), наближено дорівнює добутку площі $S(x_{n-1})$ на Δx. Якщо утворити суму

$$V_n = S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \ \dots\ + S(x_{n-1})\Delta x =$$

$$= (S(x_0) + S(x_1) + \ \dots\ + S(x_{n-1}))\frac{b-a}{n},$$

то $V_n \approx V$. Ця наближена рівність виконується з будь-якою точністю при досить великих n. Отже, цілком природно, що

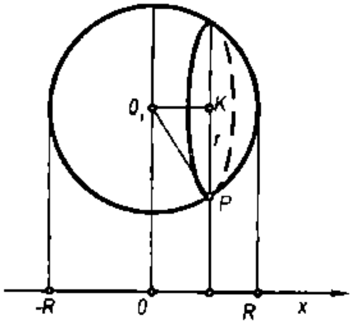
$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}(S(x_0)+S(x_1)+\ldots+S(x_{n-1}))\frac{b-a}{n}.$$

Границю такої суми, як і в задачі про площу криволінійної трапеції, називають інтегралом і позначають $\int\limits_a^b S(x)dx$. Тому $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Наведемо приклади застосування формули для обчислення об'ємів різних тіл.

П р и к л а д 8. Знайти формулу об'єму кулі радіуса R.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки в перерізі кулі утворюється круг, то розмістимо її так, щоб точка O відліку збігалася з проекцією центра O_1 кулі (мал. 149) на координатну пряму.



Мал. 149

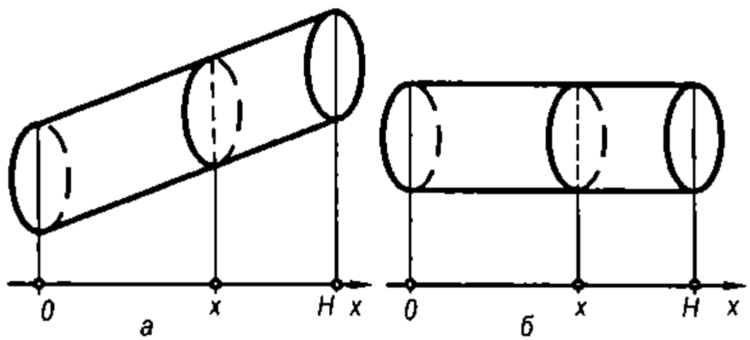
З ΔO_1KP, де $\angle O_1KP = 90°$, за теоремою Піфагора, $KP^2 = O_1P^2 - O_1K^2$. Оскільки $O_1P = R$, $O_1K = x$, $KP = r$ — радіус круга, який утворюється в перерізі, то $r^2 = R^2 - x^2$ а $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Отже,

$$V = \int\limits_{-R}^{R} S(x)dx = \int\limits_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(\int\limits_{-R}^{R} R^2dx - \int\limits_{-R}^{R} x^2dx\right) = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \right.$$

$$-\left(-R^3-\frac{(-R)^3}{3}\right)\right)=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

тобто об'єм кулі дорівнює $\frac{4}{3}\pi R^3$.

П р и к л а д 9. Знайти формулу об'єму кругового циліндра з площею основи S і висотою H.



Мал. 150

Р о з в' я з а н н я. У кругового циліндра (похилого чи прямого) (мал. 150, *а*, *b*) будь-яка площа паралельних перерізів стала і дорівнює S. Тому координатну пряму Ox проведемо перпендикулярно до площини основи, а точку відліку виберемо в точці її перетину з площиною основи. Вісь Ox перетне площину другої основи в точці H, де H — висота циліндра. Тоді

$$V=\int_0^H Sdx=Sx\Big|_0^H=SH.$$

Формула $V=SH$ виявилась однаковою і для похилого, і для прямого кругового циліндра.

П р и к л а д 10. Знайти формулу об'єму піраміди з площею основи S і висотою H.

Р о з в' я з а н н я. Нехай координатна пряма Ox проходить через вершину піраміди перпендикулярно до площини її основи (мал. 151). Виберемо за точку відліку вершину піраміди.

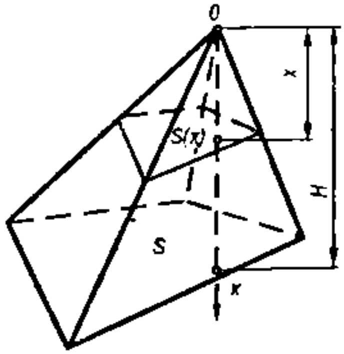
Перетнемо піраміду площиною, паралельною площині основи на відстані x від вершини. Площа перерізу є функцією відстані x. За відомою теоремою з геометрії про відношення площ таких перерізів (вони є многокутниками, подібними основі піраміди),

$$\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2, \quad S(x) = \frac{S}{H^2}x^2. \quad \text{Тому}$$

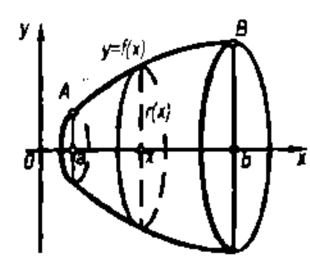
$$V = \int_0^H S(x)dx = \int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx =$$

$$= \frac{S}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{1}{3}SH.$$

Отже, об'єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі основи на висоту.



Мал. 151



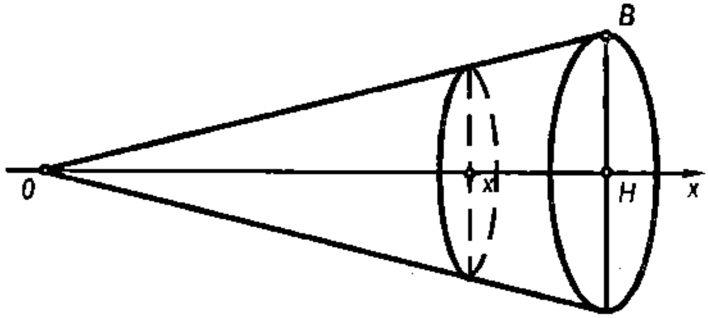
Мал. 152

Приклад 11. Знайти формулу об'єму тіла обертання.

Розв'язання. Розглянемо криволінійну трапецію $aABb$, обмежену графіком неперервної функції $y = f(x)$ (мал. 152).

Під час обертання трапеції навколо осі Ox утвориться тіло обертання. Будь-яким перерізом тіла обертання є круг радіуса $r = f(x)$. Площа перерізу $S(x) = \pi r^2 = \pi f^2(x)$, тому об'єм тіла обертання знайдемо за формулою

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$



Мал. 153

За цією формулою обчислимо, наприклад, об'єм прямого кругового конуса (мал. 153), радіус основи якого дорівнює R, а висота — H.

Для цього слід знайти спочатку рівняння прямої OB, що проходить через точки $O(0; 0)$ і $B(H; R)$. З курсу геометрії відомо, що рівняння прямої має вигляд $ax+by+c=0$.

Оскільки точки O і B належать цій прямій, то їхні координати задовольняють рівняння прямої. Підставляючи координати у рівняння, дістанемо дві рівності:

$$\begin{cases} c = 0, \\ aH + bR + c = 0. \end{cases}$$

Підставляючи $c = 0$ у другу рівність, дістанемо $aH + bR = 0$. Звідси $a = -\frac{bR}{H}$.

Підставимо значення a і c у рівняння прямої. Дістанемо:

$$-\frac{bR}{H}x + by = 0.$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на b, матимемо $-\frac{R}{H}x + y = 0$. Звідси $y = \frac{R}{H} \cdot x$ — рівняння прямої OB.

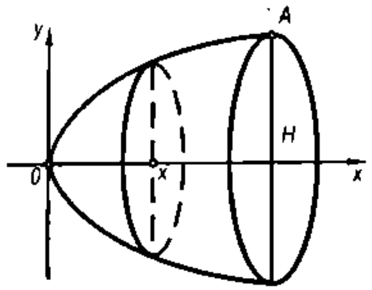
Отже, $f(x) = \frac{R}{H}x$, а

$$V = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

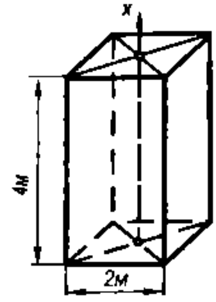
тобто об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі основи πR^2 на висоту H.

За допомогою формули об'єму тіла обертання можна обчислити об'єм кулі і циліндра.

П р и к л а д 12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболічного сегмента з висотою H і основою $2R$ навколо осі симетрії (мал. 154).



Мал. 154



Мал. 155

Р о з в' я з а н н я. При такому виборі осей координат рівняння параболи має вигляд $y^2 = kx$. Щоб знайти k, врахуємо, що точка $A(H;\ R)$ належить параболі, тому її координати задовольняють рівняння параболи. Підставляючи у рівняння замість x число H, а замість y — число R, дістанемо $R^2 = kH$. Звідси $k = \frac{R^2}{H}$. Підставляючи значення x у рівняння параболи, матимемо $y^2 = \frac{R^2}{H}x$.

Шуканий об'єм тіла знайдемо за формулою $V = \pi \int\limits_0^H f^2(x)dx$, де $y = f(x)$:

$$V = \pi \int\limits_0^H \frac{R^2}{H}xdx = \frac{\pi R^2}{H} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H = \frac{\pi R^2}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

Застосування інтеграла у фізиці. Обчислення шляху за відомим законом зміни швидкості. Раніше було встановлено, що $s = s(t)$ є первісною для функції $v = v(t)$, яка виражає закон зміни швидкості. Оскільки шлях, який пройде тіло за інтервал часу від t_1 до t_2, є приростом функції $s = s(t)$ (приріст первісної), який виражається через інтеграл за формулою Ньютона – Лейбніца, то $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ за умови, що функція $v = v(t)$ неперервна.

Наведемо приклад застосування цієї формули.

П р и к л а д 13. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом $v = 2t + 1$ (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

Р о з в' я з а н н я.

$$s = \int_1^3 (2t+1)dt = \left(2 \cdot \frac{t^2}{2} + t\right)\Bigg|_1^3 = (9+3-(1+1)) = 10\ (\text{м}).$$

Обчислення роботи змінної сили. Нехай тіло, що розглядається як матеріальна точка, рухається під дією змінної сили $F(x)$, напрямленої вздовж осі Ox. Знайдемо формулу для обчислення роботи при переміщенні з точки $x = a$ у точку $x = b$.

Нехай $A(x)$ — робота при переміщенні тіла з точки a у точку x. Надамо x приросту Δx. Тоді $A(x+\Delta x) - A(x)$ — робота, яка виконується силою $F(x)$ при переміщенні тіла з точки x у точку $x + \Delta x$. Коли $\Delta x \to 0$, силу $F(x)$ на відрізку $[x;\ x + \Delta x]$ вважатимемо сталою, що дорівнює $F(x)$. Тому $A(x + \Delta x) - A(x) \approx F(x) \cdot \Delta x$, звідси $\dfrac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \approx F(x)$.

Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = F(x),$$

або, за означенням похідної, $A'(x) = F(x)$.

Остання рівність означає, що $A(x)$ є первісною для функції $F(x)$. Тоді за формулою Ньютона – Лейбніца $\int_a^b F(x)dx = A(b) - A(a) = A(b) = A$, оскільки $A(a) = 0$.

Отже, робота змінної сили $F(x)$ при переміщенні тіла з точки a в точку b дорівнює $A = \int_a^b F(x)dx$.

П р и к л а д 14. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з ями глибиною 4 м, що має квадратний переріз із стороною 2 м. Густина води $\rho = 10^3$ кг/м^3.

Р о з в' я з а н н я. Спрямуємо вісь Ox вздовж діючої сили (мал. 155). Значення сили $F(x)$, що діє на переріз прямокутного паралелепіпеда площею 4 м^2, визначають вагою шару води, що знаходиться вище від цього перерізу. Отже,

$$F(x) = 4\rho g(4 - x), \text{ де } x \in [0;\ 4], \ g \approx 9,8 \text{ м/с}^2.$$

$$A = \int_0^4 4\rho g(4 - x)dx = 4\rho g \int_0^4 (4 - x)dx =$$

$$= 4\rho g \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 4\rho g(16 - 8) = 32 \cdot 10^3 \cdot 9,8 =$$

$$= 313,6 \cdot 10^3 \text{ (Дж)} \approx 3,1 \cdot 10^5 \text{ (Дж)}.$$

Обчислення маси неоднорідного стержня. За означенням, лінійна густина ρ неоднорідного стержня дорівнює похідній функції $m = m(l)$, що виражає масу стержня як функцію його довжини. Отже, $\rho = m'(l)$, тобто функція $m = m(l)$ є первісною для $\rho = \rho(l)$. Звідси випливає, що масу стержня на відрізку $[l_1;\ l_2]$ можна обчислити за формулою $m = \int_{l_2}^{l_1} \rho(l)dl$.

П р и к л а д 15. Знайти масу стержня завдовжки 35 см, якщо його лінійна густина змінюється за законом $\rho(l) = (4l + 3)$ (кг/м).

Р о з в' я з а н н я.

$$M = \int_0^{0,35} (4l + 3)dl = (2l^2 + 3l)\Big|_0^{0,35} = 1,295 \approx 1,3 \text{ (кг)}.$$

Обчислення кількості електрики. За означенням, сила струму є похідною від кількості електрики $Q = Q(t)$, де t — час, тобто $I(t) = Q'(t)$. А тоді функція $Q = Q(t)$ є первісною для функції $I = I(t)$, тому кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за час від t_1 до t_2, можна знайти за формулою $Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$.

П р и к л а д 16. Знайти кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за 10 с, якщо сила струму змінюється за законом $I(t) = (4t + 1)(A)$.

Р о з в' я з а н н я

$$Q = \int_0^{10}(4t + 1)dt = (2t^2 + t)\Big|_0^{10} = 210\,(\text{Кл}).$$

Застосування інтеграла в економіці і техніці. Інтеграл широко застосовують під час розв'язування фізико-технічних задач різного характеру, а також задач економічного змісту.

П р и к л а д 17. Експериментально встановлено, що продуктивність праці робітника наближено виражається формулою

$$f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96,$$

де t — робочий час у годинах. Обчислити обсяг випуску продукції за квартал, вважаючи робочий день восьмигодинним, а кількість робочих днів у кварталі — 62. Обсяг випуску продукції протягом зміни є первісною від функції, що виражає продуктивність праці. Тому

$$V = \int_0^8 f(t)dt.$$

Протягом кварталу обсяг випуску продукції становитиме

$$V = 62\int_0^8 f(t)dt = 62\int_0^8(-0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96)dt =$$

$$= 62\left(-0{,}0033\cdot\frac{t^3}{3} - 0{,}089\cdot\frac{t^2}{2} + 20{,}96t\right)\Big|_0^8 =$$

$$= 62(-0{,}001\cdot 512 - 2{,}848 + 167{,}68) = 62\cdot 164{,}27 \approx$$

$$\approx 10185\,(\text{од.}).$$

П р и к л а д 18. Експериментально встановлено, що залежність витрати бензину автомобілем від швидкості на

100 км шляху визначається формулою $Q = 18 - 0,3v + +0,003v^2$, де $30 \leqslant v \leqslant 110$. Визначити середню витрату бензину, якщо швидкість руху 50 – 60 км/год.

Р о з в' я з а н н я. Середня витрата бензину становить

$$m = \frac{\int\limits_{50}^{60}(18 - 0,3v + 0,003v^2)dv}{60 - 50} =$$

$$= \left.\frac{18v - 0,3\frac{v^2}{2} + 0,003\frac{v^3}{3}}{10}\right|_{50}^{60} = \frac{1}{10}(18 \cdot 60 - 0,3 \cdot 1\,800 +$$

$$+0,003 \cdot 72\,000 - 18 \cdot 50 - 0,3 \cdot 1\,250 - 0,003 \cdot 41\,667) =$$

$$= \frac{1}{10}(1\,080 - 540 + 216 - 900 + 375 - 125) = 10,6\,(л).$$

Отже, автомобіль на 100 км шляху, рухаючись зі швидкістю 50 – 60 км/год, витрачає в середньому 10,6 л бензину.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Сформулювати означення первісної для функції $y = f(x)$ на множині $\langle a;\ b\rangle$.

2. Який геометричний зміст загального вигляду первісної?

3. Які задачі фізичного змісту приводять до поняття первісної?

4. Яка задача геометричного змісту приводить до поняття первісної?

5. Сформулювати основну властивість первісної.

6. На яких твердженнях ґрунтується доведення основної властивості первісної?

7. Довести основну властивість первісної.

8. Сформулювати правила знаходження первісних. Довести, що первісною для функції $y = f(kx + b)$ є $\frac{1}{k}F(kx + b)$.

9. Які задачі приводять до поняття інтеграла?

10. Сформулювати означення інтеграла.

11. Записати формулу Ньютона – Лейбніца і прокоментувати її.

12. Назвати властивості інтеграла.

13. Назвати відомі вам застосування інтеграла.

14. Як обчислити за допомогою інтеграла площу плоскої фігури, обмеженої графіками двох функцій?

15. Як обчислити за допомогою інтеграла площу плоскої фігури, якщо вона розміщена під віссю Ox ?

16. Як обчислити за допомогою інтеграла об'єм тіла?

17. Записати формулу об'єму тіла обертання за допомогою інтеграла.

ВПРАВИ

1. Довести, що функція F є первісною для функції f на всій числовій прямій:

1) $F(x) = \frac{1}{16}x^4$, $f(x) = \frac{1}{4}x^3$;
2) $F(x) = 2x + 5$, $f(x) = 2$;
3) $F(x) = x^2 - 3$, $f(x) = 2x$;
4) $F(x) = -4 \cdot \cos 3x + \sqrt{2}$, $f(x) = 12 \cdot \sin 3x$;
5) $F(x) = \sin \frac{1}{2}x - 3$, $f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$;
6) $F(x) = \frac{1}{5x^2} - 1$, $f(x) = -\frac{2}{5x^3}$, якщо $x \in (0;\ +\infty)$.

2. Довести, що функція F є первісною для функції f на вказаному проміжку:

1) $F(x) = \frac{5}{x}$, $f(x) = -\frac{5}{x^2}$, $x \in (0;\ +\infty)$;
2) $F(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} - 1$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$;
3) $F(x) = 7\mathrm{tg}x - 1$, $f(x) = \frac{7}{\cos^2 x}$, $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$;
4) $F(x) = -\frac{3}{2x^2}$, $f(x) = \frac{3}{x^3}$, $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

3. Знайти загальний вигляд первісної для функції f на R :

1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = 2\cos x$; 3) $f(x) = \frac{3}{2}\sin x$;

4) $f(x) = -\dfrac{3}{\cos^2 x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$;

5) $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x \neq n\pi$; 6) $f(x) = \cos 2x$;

7) $f(x) = -\sin 3x$; 8) $f(x) = x^4$.

4. Знайти функцію f, якщо відомий загальний вигляд первісної $F(x) + C$:

1) $F(x) + C = 3x^2 + C$; 2) $F(x) + C = -\operatorname{tg} x + C$;

3) $F(x) + C = -4\sin x + C$; 4) $F(x) + C = \operatorname{ctg} x + C$.

5. Швидкість руху точки задається рівнянням $v = 7x^2 - 1$ (м/с). Знайти рівняння руху $s = s(t)$, якщо $s = 12$ м у момент часу $t = 2$ с.

6. Швидкість руху точки задається рівнянням $v = 3\cos t$ (м/с). Знайти рівняння руху, якщо у початковий момент часу точка знаходилась на відстані 2 м від початкового положення.

7. Точка рухається по прямій зі сталим прискоренням 12 м/с^2. Знайти швидкість руху точки, якщо у початковий момент швидкість $v_0 = 100$ м/с.

8. Точка рухається по прямій зі сталим прискоренням $a = 8$ м/с^2. Знайти рівняння руху $s = s(t)$, якщо відомо, що в момент часу $t = 0$ точка знаходилась на відстані 24 м від початкового положення і мала початкову швидкість 5 м/с.

9. Точка масою m=6 кг рухається по осі Ox під дією сили, спрямованої вздовж осі Ox. У момент часу t ця сила дорівнює $F(t) = 2t - 1$. Знайти закон руху $x = x(t)$, якщо при $t = 3$ с швидкість $v = 2$ м/с, а координата $x = 12$, де F — сила у ньютонах, t — час у секундах, x — шлях у метрах.

10. Обчислити інтеграли:

А

1) $\int\limits_{-1}^{2} (3x - 1)dx$; 2) $\int\limits_{3}^{8} \left(2x + \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$; 3) $\int\limits_{1}^{2} (5x + 1)^2 dx$;

4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 5\sin x dx$; 5) $\int\limits_{0}^{2} (x+2)^3 dx$; 6) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\sin^2 x} dx$;

7) $\int\limits_{1}^{3} (x^2 - 2\sqrt{x}) dx$; 8) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\cos^2 x} dx$; 9) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x dx$.

Б

10) $\int\limits_{1}^{4} \frac{x^2\sqrt{x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}} dx$; 11) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx$;

12) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt$; 13) $\int\limits_{2}^{6} \sqrt{2x-3} dx$; 14) $\int\limits_{0}^{1} (x+1)^5 dx$;

15) $\int\limits_{0}^{4} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}x + 1}} dx$, 16) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{24}} \frac{2dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

В

17) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) dx$;

18) $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2dx}{\sin^2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\cos^2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}$);

19) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{(4-3x)^3} dx$; 20) $\int\limits_{0}^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$,

21) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

22) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) dx$.

11. Обчислити площі плоских фігур, обмежених:

А

1) лініями, зображеними на малюнку 156, *а*, *б*;

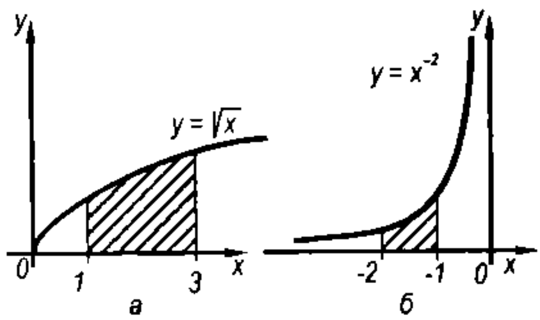
2) лініями $y = x^2$, $y = 4$

3) дугою косинусоїди $y = 2\cos x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

4) лінією $y = x^3$, віссю Ox і прямою $x = 2$;

5) параболою $y = 1 - x^2$ і віссю Ox;

6) параболою $y = x^2$ і прямою $y = x + 1$.



Мал. 156

Б

7) графіком функції $y = -x^2 + 4$ і прямою $x + y = 4$;

8) графіками функцій $y = -x^2 - 2x + 8$, $y = x^2 + 2x + 2$;

9) параболою $y = x^2 + 1$ та прямою $5x + 3y - 25 = 0$;

10) лініями $y = 0$, $y = -x^2 + 3$, $x = 1,5$;

11) кривою $y = x^3$ і прямими $y = 1$, $x = -2$;

12) прямою $y = x$ і параболою $y = 2 - x^2$.

В

13) лініями $y = (x + 1)^2$ і $y = 4 - x$;

14) прямою $y = 4$, параболою $y = 3x^2 - 10x + 7$ та дотичною до цієї параболи, проведеною через точку з абсцисою $x_0 = 2$;

15) параболою $y = x^2 + 2x - 8$ і віссю Ox;

16) графіками функцій $y = -x^3$, $y = \frac{8}{3}\sqrt{x}$ і $y = 8$.

12. Знайти об'єм тіла, утвореного:

1) обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої прямими $y = 2x$, $x = 0$, $y = 5$;

2) обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої синусоїдою і прямими $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{2}$;

3) обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою $y = x^3$ і прямими $x = 1$ і $x = 2$,

4) зрізаного конуса з радіусами основ r_1 і r_2 і висотою H.

13. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$ (м/с). Обчислити шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від t_1 до t_2, якщо:

1) $v(t) = 5t - 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 3$;

2) $v(t) = t^2 - 5t$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$;

3) $v(t) = 1 - 3t$, $t_1 = 2$, $t_2 = 5$;

4) $v(t) = t^2 - 5t + 6$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

14. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати воду з циліндричної цистерни, радіус якої дорівнює R, а висота — H.

15. Обчислити роботу, яку слід затратити, щоб розтягнути пружину на 0,06 м, якщо сила 12 Н розтягує її на 0,01 м.

Вказівка. За законом Гука, сила F пропорційна розтягу або стисканню пружини, тобто $F = kx$, де x — величина розтягу або стискання. З умови задачі можна знайти k. Оскільки при $x = 0,01$ м сила F дорівнює 12 Н, то $k = \frac{12}{0,01} = 1200$. Отже, $F = kx = 1200x$.

16. Обчислити роботу, яку треба затратити для стискання пружини, якщо сила в 4 Н стискає цю пружину на 2 см.

17. Знайти масу неоднорідного стержня завдовжки 40 см, якщо його лінійна густина змінюється за законом $\rho(l) = 2t^2 + 1$ (кг/м).

18. Знайти кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за 20 с, якщо сила струму змінюється за законом $I(t) = 2t + 1$ (А).

19. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни наближено визначається формулою $f(t) = -2,53t^2 + 24,75t + 111,1$, де t — робочий час у годинах. Визначити об'єм продукції, виготовленої бригадою за п'яту робочу годину.

ПОХІДНА І ПЕРВІСНА ПОКАЗНИКОВОЇ, ЛОГАРИФМІЧНОЇ ТА СТУПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЙ

§ 1. Похідна показникової функції

Вивчаючи показникову функцію, ми переконалися в тому, що графіки показникових функцій зображувалися у вигляді гладких кривих (без зламів), до яких у кожній точці можна провести дотичну. Відомо також, що існування дотичної до графіка функції в точці рівносильне її диференційовності у цій точці. У вищій математиці доведено, що показникова функція диференційовна у кожній її точці, і похідну показникової функції за основою e обчислюють дуже просто, а саме:

$$(e^x)' = e^x. \qquad (1)$$

Нагадаємо, що $\ln x$ — натуральний логарифм обчислюється за формулою:

$$\ln x = \log_e x. \qquad (2)$$

За основною логарифмічною тотожністю для будь-якого додатного числа a правильна рівність:

$$a = e^{\ln a}. \qquad (3)$$

Тому будь-яку показникову функцію можна подати у вигляді:

$$a^x = e^{x \ln a}. \qquad (4)$$

Для цього слід піднести до степеня x обидві частини рівності (3). За допомогою формули (4), застосовуючи правило обчислення похідної складеної функції, дістанемо формулу для похідної будь-якої показникової функції для будь-якого показника x :

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a,$$

отже, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Приклади. Знайти похідні функцій.

а) $y = e^{5x}$. Маємо: $y' = (e^{5x})' = e^{5x}(5x)' = 5e^{5x}$;

б) $y = e^{x^3}$. Маємо: $y' = (e^{x^3})' = e^{x^3} \cdot (x^3)' = 3x^2 e^{x^3}$;

в) $y = e^{x^2+1}$. Маємо: $y' = (e^{x^2+1})' = e^{x^2+1}(x^2+1)' =$
$= 2xe^{x^2+1}$;

г) $y = 3^x$. Маємо: $y' = (3^x)' = 3^x \ln 3$;

д) $y = 5^{\sin x}$. Маємо: $y' = (5^{\sin x})' =$
$= 5^{\sin x} \ln 5 (\sin x)' = 5^{\sin x} \ln 5 \cos x$;

е) $y = 7^{3x^2+x+1}$. Маємо: $y' = (7^{x^2+x+1})' =$
$= 7^{x^2+x+1} \ln 7 (3x^2 + x + 1)' = 7^{x^2+x+1} \ln 7 (6x + 1)$.

§ 2. Похідна логарифмічної функції

Розглянемо функцію $y = \ln x$ і знайдемо її похідну. Доведемо, що для будь-якого $x > 0$ виконується рівність

$$x' = (e^{\ln x})'. \quad (1)$$

За основною логарифмічною тотожністю, $x = e^{\ln x}$ для всіх додатних x. У цій рівності зліва і справа стоїть одна й та сама функція (визначена на множині R_+). Тому похідні x і $\ln x$ рівні, тобто

$$x' = (e^{\ln x})'. \quad (2)$$

Для знаходження похідної правої частини рівності скористаємося правилом знаходження похідної складеної функції, тим, що показникова функція e^x диференційовна у кожній точці і $(e^x)' = e^x$.

Переконаємося, що логарифмічна функція диференційовна в кожній точці. Справді, графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = a^x$ симетричні відносно прямої $y = x$. Оскільки показникова функція диференційовна у будь-якій точці, а її похідна не перетворюється на нуль, графік показникової функції має негоризонтальну дотичну в кожній точці. Тому графік логарифмічної функції має невертикальну дотичну в будь-якій точці. А це рівносильно диференційовності логарифмічної функції на області її визначення. Отже, $(e^{\ln x})' = e^{\ln x}\ln' x = x\ln' x$. Взявши до уваги, що $x' = 1$ і підставивши знайдений результат у рівність (2), дістанемо: $1 = x\ln' x$, звідси $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Розглянемо функцію $y = \log_a x$ і доведемо, що $y' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$.

Справді, оскільки $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x') = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.$$

Отже, $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$.

П р и к л а д и. Знайти похідні функції:

а) $y = \ln 3x$, $y' = (\ln 3x)' = \frac{1}{3x}(3x)' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$;

б) $y = \ln(3x+5)$, $y' = (\ln(3x+5))' =$
$= \frac{1}{3x+5}\cdot 3 = \frac{3}{3x+5}$;

в) $y = \ln(x^2+3x+9)$, $y' = (\ln(x^2+3x+9))' =$
$= \frac{(x^2+3x+9)'}{x^2+3x+9} = \frac{2x+3}{x^2+3x+9}$;

г) $y = (x^2+3)\ln(2x+1)$, $y' = (x^2+3)'\ln(2x+1)+$
$+(x^2+3)(\ln(2x+1))' = 2x\ln(2x+1)+$
$+(x^2+3)\cdot\frac{(2x+1)'}{2x+1} = 2x\ln(2x+1) + \frac{(x^2+3)\cdot 2}{2x+1}$;

д) $y = \log_5 x$, $y' = (\log_5 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 5}\right)' = \frac{1}{x\ln 5}$;

е) $y = \log_3 4x$, $y' = (\log_3 4x)' = \left(\frac{\ln 4x}{\ln 3}\right)' = \frac{4}{4x\ln 3} =$
$= \frac{1}{x\ln 3}$;

є) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Функція визначена при x, для яких $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > 0$, тобто коли $k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Обчислимо похідну:

$$y'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin x}.$$

§ 3. Первісна показникової й логарифмічної функцій

Функція e^x є первісною для функції e^x на R. Функція $\frac{a^x}{\ln a}$ є первісною для функції a^x на R.

Справді, $\ln a$ — стала. Тому $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \ln a = a^x$ для будь-яких x. Цим доведено, що $\frac{a^x}{\ln a}$ є первісною для функції a^x на R.

З рівності $(e^x)' = e^x$ випливає, що e^x є первісною для функції e^x на R.

Приклади.

1. Знайти первісні для функцій

а) 3^x; б) $5 \cdot 2^x$; в) $2e^{3x} + 7 \cdot \frac{0,2^x}{\ln 0,2}$.

Розв'язання. Застосовуючи подані вищі залежності дістанемо:

а) $\frac{3^x}{\ln 3}$; б) $\frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2}$; в) $\frac{2}{3}e^{3x} + 7 \cdot \frac{0,2^x}{\ln 0,2}$.

2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 2^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 3$.

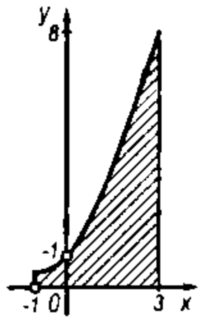
Розв'язання. Розглядувана фігура є криволінійною трапецією (мал. 157). Знаходимо її площу S за формулою площі криволінійної трапеції:

$$S = \int_{-1}^{3} 2^x dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_{-1}^{3} = \frac{8}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} = \frac{8}{\ln 2} -$$

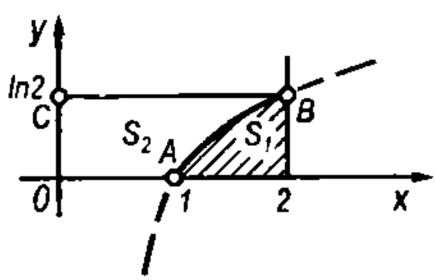
$$-\frac{1}{2\ln 2} = \frac{15}{2\ln 2}.$$

Раніше було розглянуто похідну функції $f(x) = \ln x$ для будь-яких x і встановлено, що $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Остання залежність показує, що для функції $\frac{1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$ будь-яку первісну можна записати у вигляді $\ln x + C$. Функція $\frac{1}{x}$ має первісну $\ln(-x)$ і на проміжку $(-\infty; 0)$.

Справді, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Оскільки, $|x| = x$, якщо $x > 0$ і $|x| = -x$, якщо $x < 0$, то на будь-якому проміжку, який не містить точку 0, первісною для функції $\frac{1}{x}$ є функція $\ln|x|$.



Мал. 157



Мал. 158

3. Знайти первісні для функцій:

а) $f(x) = \frac{1}{x+5}$. Первісні для цієї функції дорівнюють $\ln|x+5| + C$ на будь-якому проміжку, який не містить точку (-5);

б) $f(x) = \frac{1}{5-2x}$. Маємо: $\frac{1}{-2}\ln|5-2x| + C$ на будь-якому проміжку, який не містить точку $\frac{5}{2}$ (точку, де $5 - 2x = 0$).

4. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \ln x$, прямою $x = 2$ і віссю Ox.

Р о з в' я з а н н я. Функцією, оберненою до $y = \ln x$, є $x = e^y$. З малюнка 158 випливає, що площа заштрихованої фігури S_1 дорівнює різниці площ S (прямокутника зі сторонами 2 і $\ln 2$) і S_2 (криволінійної трапеції $OABC$).

Отже, $S_2 = \int\limits_0^{\ln 2} e^y dy = e^y \Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1.$

$S = 2\ln 2$. Шуканою площею є: $S_1 = S - S_2 = 2\ln 2 - 1$.

§ 4. Дослідження показникової й логарифмічної функцій

Нагадаємо достатню умову монотонності функції. Нехай функція $f(x)$ визначена і диференційовна на проміжку $(a;\ b)$. Для того щоб функція була зростаючою на проміжку $(a;\ b)$, достатньо виконання умови $f'(x) > 0$ при будь-якому x, що належить проміжку $(a;\ b)$.

Точки, які належать проміжку $(a;\ b)$ і в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називається *критичними точками функції* $y = f(x)$. З означення критичної точки випливає, що функція змінює знак лише при переході через критичну точку. Таким чином, проміжки спадання, зростання (проміжки монотонності) функції $f(x)$ обмежені критичними точками. Отже, щоб знайти проміжки монотонності функції, необхідно: 1) знайти критичні точки $f(x)$; 2) визначити знак похідної $f'(x)$ всередині проміжків, обмеженими критичними точками.

Приклад 1. Дослідити на зростання і спадання функцію $f(x) = xe^{-3x}$.

Розв'язання. Знаходимо похідну

$$f'(x) = (xe^{-3x})' = e^{-3x} - 3xe^{-3x} = e^{-3x} \cdot (1 - 3x).$$

Похідна $f'(x)$ існує на всій числовій прямій і перетворюється на нуль у точці $x = \frac{1}{3}$. Точка $x = \frac{1}{3}$ ділить числову пряму на дві проміжки: $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$ і $\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. Оскільки функція e^{-3x} завжди додатна, то знак похідної визначає другий множник.

Отже, на проміжку $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$ $f'(x) > 0$ ($f(x)$ зростає), а на $\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ $f'(x) < 0$ ($f'(x)$ спадає).

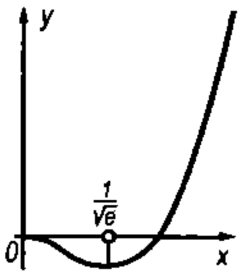
П р и к л а д 2. Дослідити функцію $y = x^2 \ln x$ на зростання (спадання), екстремум і побудувати її графік.

Р о з в' я з а н н я. Функція визначена, якщо $x > 0$; $y = 0$, якщо $x = 1$.

Знайдемо похідну:

$$y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = 2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right).$$

Оскільки $x > 0$, знак y збігається із знаком $\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)$. Звідси випливає, що $y' > 0$, на проміжку $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty\right)$ і тому на проміжку $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty\right)$ функція зростає; на проміжку $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ похідна y' від'ємна, тому y спадає на проміжку $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$. У точці $\frac{1}{\sqrt{e}}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс. Отже, це точка мінімуму. На малюнку 159 зображено графік функції $y = x^2 \ln x$.



Мал. 159

П р и к л а д 3. Знайти найбільше значення функції

$$f(x) = 7 + 2x \ln 25 - 5^{x-1} - 5^{2-x}.$$

Р о з в' я з а н н я. Дана функція диференційовна в кожній точці $x \in R$. Знайдемо точки, в яких похідна цієї функції дорівнює нулю:

$$f'(x) = 2 \ln 25 - 5^{x-1} \ln 5 + 5^{2-x} \ln 5,$$

$$f'(x) = 0, \ (4 - 5^{x-1} + 5^{2-x}) \ln 5 = 0,$$

$$4 - \frac{5x}{5} + \frac{25}{5^x} = 0; \ 5^{2x} - 20 \cdot 5^x - 125 = 0.$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння відносно 5^x, дістанемо $5^x = 25$ або $5^x = -5$. Друге з цих рівнянь розв'язків не має, а перше має єдиний розв'язок $x = 2$. Оскільки похідна

$$f'(x) = -\frac{\ln 5}{5^{x+1}}(5^x + 5)(5^x - 25)$$

додатна, коли $x < 2$, і від'ємна, коли $x > 2$, то на проміжку $(-\infty; 2)$ функція $f(x)$ монотонно зростає, а на проміжку $(2; +\infty)$ — монотонно спадає. Отже, в точці $x = 2$ дана функція досягає найбільшого значення $f(2) = 1 + 8\ \ln 5$.

§ 5. Похідна степеневої функції

Нехай $y = x^p$, де p — довільна стала. Відомо, що будь-якому додатному x відповідає число x^p. Тим самим на проміжку $(0; \infty)$ при фіксованому p визначена функція f задана формулою $f(x) = x^p$. Вона називається *степеневою* (з показником степеня p). Якщо $p > 0$, то степенева функція визначена і для $x = 0$, бо $0^p = 0$. Для цілих p степенева функція визначена і для $x < 0$. Для парних p це парна функція, а для непарних p — непарна. Тому дослідження степеневої функції достатньо провести лише на проміжку $(0; \infty)$.

Раніше було виведено формули для похідної функції $f(x) = x^p$ при цілих показниках степеня і при $p = \frac{1}{2}$. Виведемо формулу для похідної степеневої функції при довільному дійсному показнику p. Якщо подати x у вигляді $x = e^{\ln x}$, то можна записати

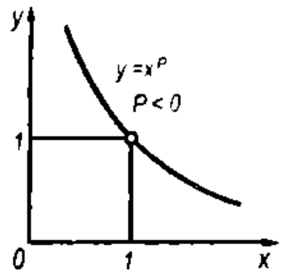
$$f(x) = x^p = (e^{\ln x})^p = e^{p \ln x}.$$

Знайдемо похідну здобутої складеної функції:

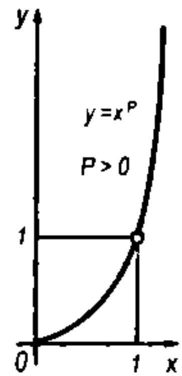
$$f'(x) = (e^{p \ln x})' = e^{p \ln x}(p \ln x)' = x^p \cdot p \cdot \frac{1}{x} = px^{p-1}.$$

Отже, $(x^p)' = px^{p-1}$.

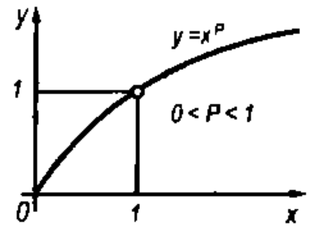
Якщо $p < 0$, степенева функція спадає на проміжку $(0; \infty)$, бо її похідна px^{p-1} на цьому проміжку від'ємна (мал. 160). Нагадаємо, що коли $x = 0$, степенева функція дорівнює 0 і $x^p \to 0$ при $x \to 0$ і $p > 0$. Тому точку 0 приєднують до проміжку зростання, тобто для $p > 0$ степенева функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Графіки степеневих функцій зображено на малюнках 160—162.



Мал. 160



Мал. 161



Мал. 162

П р и к л а д и. Знайти похідні степеневих функцій:

а) $y = x$, $y' = x' = 1 \cdot x^{1-1} = 1$;

б) $y = x^7$, $y' = (x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6$;

в) $y = \sqrt{x}$, $y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

г) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y' = (x^{\sqrt{3}})' = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$;

д) $y = \sqrt[5]{x^4}$, $y' = (\sqrt[5]{x^4})' = (x^{\frac{4}{5}})' = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}$;

е) $y = \frac{1}{3\sqrt{x+1}}$, $y' = \left(\frac{1}{3\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{1}{3}\left((x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$

$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{1}{2}-1}(x+1)' = -\frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 =$

$= -\frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$.

Якщо $p \neq -1$, то первісна степеневої функції $f(x) = x^p$ має загальний вигляд $\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$; якщо $p = -1$, первісною функції f є функція виду $\ln|x| + C$. Розглянемо функцію $f(x) = x^{\alpha}$ і скористаємося формулою

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$

Якщо $x_0 = 1$, то $x = 1 + \Delta x$.

Дістанемо $f(x_0) = f(1) = 1$ і $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, звідси $f'(x_0) = f'(1) = \alpha$, $1^{\alpha-1} = \alpha$. За формулою (1)

$$f(x) = (1 + \Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha \Delta x. \qquad (2)$$

Наближення буде тим точніше, чим менше Δx. Формулу (2) застосовують, зокрема, для обчислення коренів. Поклавши $\alpha = \frac{1}{n}$, знаходимо:

$$\sqrt[n]{1 + \Delta x} = (1 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}. \qquad (3)$$

Приклади. Обчислити наближене значення:

а) $\sqrt[5]{1,03}$. Маємо: $\sqrt[5]{1,03} = (1 + 0,03)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5} \times$ $\times 0,03 = 1 + 0,2 \cdot 0,03 = 1 + 0,006 \approx 1,006$.

б) $\sqrt[3]{64,03} = \sqrt[3]{64\left(1 + \frac{0.03}{64}\right)} = 4\sqrt[3]{1 + \frac{0.03}{64}} \approx 4 \times$ $\times \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0.03}{64}\right)$ (Продовжити обчислення за допомогою калькулятора).

§ 6. Диференціальні рівняння

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться знаходити невідому функцію з рівняння, яке містить поряд з цією невідомою функцією її похідні.

Рівняння, яке містить невідому функцію та її похідні, називається диференціальним. Порядок найвищої похідної, яка входить до диференціального рівняння, називається його *порядком*. Наприклад, рівняння $y'' + 4y = 0$ є диференціальним рівнянням другого порядку.

Якщо до рівняння входить незалежна змінна, невідома функція і її похідна, то це рівняння називається деференціальним рівнянням першого порядку. Якщо, крім того, в рівняння входить похідна другого порядку від шуканої функції, то рівняння називається диференціальним рівнянням другого порядку і т. д.

Будь-яку функцію, що задовольняє диференціальне рівняння, називають *розв'язком*, або *інтегралом цього рівняння*, а розв'язування диференціального рівняння —

рій на момент часу t. Тоді $x'(t)$ є швидкістю розмноження, яка пропорційна кількості бактерій. Існує таке k, що $x'(t) = kx$ (1).

За умовою, $x(t)$ і $x'(t)$ — невід'ємні. Розглянемо лише випадок, коли $k > 0$, бо якщо $k = 0$, то ніякого розмноження не відбувається.

Неважко перевірити, що будь-яка функція $x = Ce^{kt}$ (2), де C — деяка стала, є розв'язком рівняння (1).

Справді,

$$x'(t) = (Ce^{kt})' = Cke^{kt} = k(Ce^{kt}) = kx.$$

Функція $x = Ce^{kt}$ є загальним розв'язком рівняння (1).

Коефіцієнт k залежить від виду бактерій і від зовнішніх умов. Якщо відомі значення коефіцієнта k і маса бактерій у деякий момент часу t_0, то за формулою (2) знайдемо масу бактерій у будь-який момент часу t.

Отже, $x(t_0) = m_0$, тоді $m_0 = Ce^{kt_0}$.

$$C = m_0 e^{-kt_0}, \ x(t) = m_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Розв'язування багатьох задач у фізиці, техніці і біології, соціальних науках зводиться до математичної задачі знаходження функції f, яка задовольняє рівняння

$$f'(x) = kf(x), \qquad (3)$$

де k — деяка константа.

За властивостями похідних показникової функції знаходимо, що розв'язком рівняння (1) буде будь-яка функція виду

$$f(x) = Ce^{kx}, \qquad (4)$$

де C — стала. Оскільки C — довільне, то розв'язків у диференціального рівняння (1) нескінченно багато. Доведено, що інших розв'язків, крім функцій виду (2), у рівнянні (1) немає.

Приклад 2 (рівняння механічного руху).

Нехай матеріальна точка маси m рухається під дією сили F уздовж осі x. Позначимо через t — час її руху, v — швидкість, a — прискорення. Другий закон Ньютона, $a = \frac{F}{m}$ матиме вигляд диференціального рівняння, якщо записати прискорення як другу похідну: $a = x''(t)$.

Рівняння $mx''(t) = F$ називають рівнянням механічного руху, де $x(t)$ — невідома функція, m і F — відомі величини.

Залежно від умов задач по-різному записуються різні диференціальні рівняння. Наприклад:

а) сила F стала (F =const), тоді рівняння руху має вигляд $x''(t) = \frac{F}{m} = a$ (де a =const);

б) сила періодично змінюється з часом, наприклад, за законом $F = F_0 \sin \omega t$. Тоді рівнянням руху є $x''(t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$;

в) сила пропорційна зміщенню (рух ідеально пружної пружини): $F- = -kx$, $k > 0$ (знак мінус вказує на те, що напрям сили протилежний напряму зміщення). Маємо таке рівняння руху: $x''(t) = -\frac{k}{m}x$;

г) сила, обернено пропорційна квадрату відстані (вільний політ). Тоді рівняння руху має вигляд $x''(t) = -\frac{k}{x^2}$.

Приклад 3 (диференціальне рівняння радіоактивного розпаду). Нехай у початковий момент часу маса радіоактивної речовини дорівнює

$$m(0) = m_0. \tag{5}$$

Відомо, що швидкість зменшення маси речовини $m(t)$ з часом пропорційна її кількості, тобто виконується рівняння

$$m'(t) = -km(t), \quad \text{де } k > 0. \tag{6}$$

Скористаємося (без доведення) встановленою залежністю $m(t) = Ce^{-kt}$.

Константу C знаходимо з умови (5). Маємо: $m(0) = Ce^0$, тобто $C = m(0) = m_0$, звідси $m(t) = m_0e^{-kt}$.

Нагадаємо, що інтервал часу T, за який маса радіоактивної речовини зменшується вдвічі, називають періодом піврозпаду цієї речовини. Отже, k і T пов'язані рівнянням $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, з якого дістанемо: $e^{kT} = 2$, $kT = \ln 2$, $k = \frac{\ln 2}{T}$. Для радію $T \approx 1550$ років, тому $k = \frac{\ln 2}{1550} \approx$

$\approx 0,000447$. Через мільйон років від початкової маси радію m_0 залишиться

$$m(10^6) = m_0 e^{-447} \approx 0,6 \cdot 10^{-194} m_0.$$

Приклад 4 (рівняння гармонічних коливань). Розглянемо рівняння

$$x'' + \omega^2 x = 0, \tag{7}$$

де ω — деяке додатне число.

Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що функція

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{8}$$

для будь-яких сталих A і α є розв'язком рівняння (7). Можна показати, що інших розв'язків рівняння (7) не має. Таким чином, функція (8) задає загальний розв'язок рівняння (7).

Функція (8) для будь-яких заданих A, ω і α описує гармонічний коливальний процес. Число $|A|$ називається амплітудою, а число α — початковою фазою, або просто фазою коливання (8). Рівняння (7) називають рівнянням гармонічних коливань. Додатне число ω називають частотою коливання.

Число коливань за одиницю часу визначають за формулою $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Як бачимо, загальний розв'язок (8) рівняння (7) містить дві довільні сталі: амплітуду A і початкову фазу α. Для їх визначення слід задати дві умови, наприклад,

$$x(t_0) = x_0, \;\; x'(t_0) = v_0. \tag{9}$$

Тоді для визначення сталих A і α дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} A\cos(\omega t_0 + \alpha) = x_0, \\ -A\sin(\omega t_0 + \alpha) = \dfrac{v_0}{\omega}. \end{cases} \tag{10}$$

Звідси $A^2\cos^2(\omega t_0 + \alpha) + A^2\sin^2(\omega t_0 + \alpha) = x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}$,

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Можна вважати, що $A > 0$, тоді $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$. Знаючи амплітуду A, з системи (10) за формулами тригонометрії визначають початкову фазу α.

З формули (8) можна дістати інший вигляд загального розв'язку рівняння (7).

Справді, $x = A(\cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha) = A\cos\alpha \times \times \cos\omega t - A\sin\alpha\sin\omega t$. Поклавши $C_1 = A\cos\alpha$, $C_2 = = -A\sin\alpha$, дістанемо

$$x_1 = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$$

До такого диференціального рівняння приводять, наприклад, дві різні, на перший погляд, задачі фізики — коливання пружної пружини і розряд конденсатора через котушку.

Зазначимо, що рівняння гармонічних коливань розглянуто нами за умов, які реально не виконуються. Так, для описання коливання пружини треба враховувати тертя, а для описання розряду конденсатора — внутрішній опір. При цьому в рівнянні коливань з'являється доданок, що залежить від першої похідної (швидкості).

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. За якою формулою обчислюють похідну показникової функції за основою e?

2. Пояснити зміст рівності $a^x = e^{x\ln a}$.

3. За якою формулою обчислюють похідну показникової функції для будь-якого показника x?

4. За якою формулою обчислюють похідну логарифмічної функції? Пояснити зміст рівності $\ln' x = \frac{1}{x}$.

5. Яка функція є первісною для функції e^x на R?

6. Пояснити, чому функція $\frac{a^x}{\ln a}$ є первісною для функції a^x на R?

7. Який вигляд має первісна функції $\frac{1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$?

8. Як дослідити показникову функцію на зростання і спадання?

9. Навести схему дослідження логарифмічної функції за допомогою похідної.

10. Прокоментувати рівності: а) $x = e^{\ln x}$, б) $x^p = e^{p \ln x}$.

11. Чому говорять, що коли $p > 0$, степенева функція $f(x) = x^p$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$, тобто точка 0 приєднується до проміжку зростання?

12. Який вигляд має первісна степеневої функції $f(x) = x^p$, якщо $p \neq -1$; якщо $p = -1$?

ВПРАВИ

1. Обчислити наближені значення виразів:

А

1) $\sqrt[3]{1,01}$; 2) $\sqrt[4]{81,03}$; 3) $48^{\frac{1}{2}}$.

Б

4) $\sqrt[10]{1020}$; 5) $\sqrt[4]{625,3}$; 6) $\sqrt[3]{30}$;

В

7) $\sqrt[5]{240}$; 8) $\sqrt{9,02}$; 9) $\sqrt[4]{3}$.

2. Знайти похідні функцій:

А

1) $y = e^x$; 2) $y = e^{7x}$; 3) $y = e^{-x}$; 4) $y = e^{x^4}$;
5) $y = e^{x^3-1}$; 6) $y = e^{2-3x}$; 7) $y = 5^x$; 8) $y = 10^{1-x}$;
9) $y = 3^{2x+1}$; 10) $y = 3 \cdot 7^x$; 11) $y = 2,1^{3+4x}$;
12) $y = 2^{5x^2+x-1}$; 13) $y = \ln 2x$; 14) $y = \ln(2x-3)$;
15) $y = x^3 \ln x$; 16) $y = \log_7 x$; 17) $y = \log_5 7x$;
18) $y = \log_{0,3} x$.

Б

19) $y = e^{-2x}$; 20) $y = e^{3-7x}$; 21) $y = e^{\frac{x}{2}}$;

22) $y = e^{3x^2-4x-2}$; 23) $y = 3e^{2x} - e^x$; 24) $y = \dfrac{x^2+1}{e^x}$;

25) $y = 5^{3x}$; 26) $y = 6 \cdot 2^x$; 27) $y = 7^{1-x}$;

28) $y = 12^{5-7x}$; 29) $y = 2,3^{4+5x}$; 30) $y = 2^x \cos x$;

31) $y = \ln(1+3x)$; 32) $y = x^3 \ln x$; 33) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

34) $y = \dfrac{\ln(3+2x)}{x^2+1}$; 35) $y = \sqrt{x}\ln x$; 36) $y = \ln\cos x$;

37) $y = \log_2 7x$; 38) $y = \log_9(3-2x)$;

39) $y = \lg(3+4x)$; 40) $y = \log_{0,5}(7x+2)$;

41) $y = \lg 5x$; 42) $y = \sqrt{x}\ \lg\ x$;

В

43) $y = e^{2x} + 4e^{\frac{x}{2}}$; 44) $y = (x+1)e^x$; 45) $y = \dfrac{5x+1}{e^x}$;

46) $y = x^2 e^{-x^2}$; 47) $y = 5e^{7x} - 3e^{3x}$; 48) $y = e^{\cos 5x}$;

49) $y = 2^{3x+x^2}$; 50) $y = (3x+5x^2+x^3)\cdot 4^x$;

51) $y = \dfrac{x^3}{4^x+5}$; 52) $y = x^2 \cdot 2^{-x}$; 53) $y = 3^{5x} - 7\cdot 2^{5-7x}$;

54) $y = \dfrac{0,3^{-x}}{\sqrt{x}+0,5}$; 55) $y = \ln(x^2+3x+2)$;

56) $y = \dfrac{x^2}{3\ln x}$; 57) $y = e^{x+1}\ln(x+5)$;

58) $y = a^{x^2}\ln(x^2+4x+12)$; 59) $y = \log_7(2+3x)$;

60) $y = \log_{0,2}(7+3x)$; 61) $y = (3x+4)\log_5(x^2+x+1)$;

62) $y = \log_{11}(x^3+4\sqrt{x}+5)$; 63) $y = \lg(\sin x + 2^x)$;

64) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x+6)$.

3. Знайти первісні для функцій:

А

1) e^{2x}; 2) 4^x; 3) $3\cdot 5^x$; 4) $3e^x - 6\cdot 0,3^x$;

5) $\frac{1}{x+3}$; 6) $\frac{1}{2x-5}$; 7) $\frac{1}{3x+1}$.

Б

8) $7\cdot 3^x$; 9) $5\cdot e^{4x}$; 10) $4\cdot e^{3x}-5\cdot 0,2^x$;
11) $\frac{3}{5x-8}$; 12) $\frac{1}{4x-1}$; 13) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}$.

В

14) e^{7x}; 15) $e^x(x-1)$; 16) $\frac{a^x}{\ln a}\left(x-\frac{1}{\ln a}\right)$;
17) $-e^{-x}(x+1)$.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

А

1) $y=2^x,\ x=1,\ x=3,\ y=0$;
2) $y=\frac{1}{x},\ x=1,\ x=4,\ y=0$.

Б

3) $y=\frac{1}{x},\ x=3,\ x=6,\ y=0$;
4) $y=3^x,\ x=-2,\ x=2,\ y=0$.

В

5) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y=0,\ x=-3,\ x=2$;
6) $y=\frac{2}{x},\ y=0, x=-2,\ x=1$.

5. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^3\frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_1^a\frac{dx}{x}\ (a>0)$; 3) $\int\limits_{-4}^0\frac{dx}{0,5x+3}$.

6. Записати рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x)=2e^x$ у точці з абсцисою $x_0=0$;

2) $f(x) = 3 \cdot 2^x$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

7. Знайти проміжки зростання і спадання та екстремум функції:

А

1) $f(x) = 2xe^{-x}$; 2) $f(x) = x^2e^{-x}$;

3) $f(x) = \ln x$, $x \in \left(\frac{1}{e}; e\right)$;

4) $f(x) = x - \ln x$, $x \in \left(\frac{1}{e}; e\right)$.

Б

5) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; 6) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$;

7) $f(x) = x \ln x$; 8) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

В

9) $f(x) = 3x + e^x$, $x \in (-1; 1)$; 10) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$;

11) $f(x) = 3x - \frac{\ln x}{3}$;

12) $f(x) = 2x^2 - \ln x$, $x \in \left(\frac{1}{e}; 1\right)$.

8. Знайти похідні степеневих функцій:

А

1) $y = x^{100}$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$; 3) $y = x^{\sqrt{2}}$;

4) $y = x^{0,1}$; 5) $y = x^{\pi}$; 6) $y = -x^5$.

Б

7) $y = -x^{20}$; 8) $y = \sqrt[10]{x^7}$; 9) $y = \frac{10}{x}$;

10) $y = 2x^2\sqrt{x}$; 11) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 12) $y = \frac{x^2 + 3x + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

В

13) $y=\dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$; 14) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{2}$; 15) $y=\sqrt{x}(2x+5)$;

16) $y=(3x^3+8x^2-5)^2$; 17) $y=\dfrac{1}{5\sqrt{11x}}$;

18) $y=5x^3\sqrt[3]{x}$; 19) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}+5$;

20) $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$; 21) $y=\sqrt[7]{(3x^2+5x^3)^4}$;

22) $y=\left(\dfrac{1}{5}x^5+7\right)^2\cdot 4\sqrt[3]{x^2}$;

23) $y=(ax^3+bx)^5$; 24) $y=\left(\ln\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$.

9. Перевірити, чи є розв'язками даних диференціальних рівнянь записані поряд з ними функції:

1) $xy''+2y'-xy=0$, $xy=C_1e^x+C_2e^{-x}$;

2) $y''-2y+y=0$, $y=x^4$.

10. Знайти окремі розв'язки рівнянь:

1) $(1+x^2)y''-2xy'=0$, якщо $y(0)=0$, $y'(0)=3$;

2) $yy''+y'^2=1$, якщо $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

11. Відомо, що за 1 рік маса бактерій подвоюється, а швидкість розмноження прямо пропорційна наявній кількості бактерій. Скласти диференціальне рівняння розмноження бактерій і знайти його загальний розв'язок.

12. Відомо, що за 1 годину маса радіоактивної речовини зменшується на 1%. Скласти диференціальне рівняння піврозпаду і знайти його загальний розв'язок.

13. Знайти період піврозпаду радіоактивної речовини за умовою попередньої задачі.

14. Період піврозпаду речовини становить дві доби. Через який час її маса зменшиться в 1000 раз?

15. Від a мг речовини через t хв радіоактивного розпаду залишалося b мг. Знайти її період піврозпаду.

Розділ XI

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

§ 1. Розширення множини дійсних чисел. Поняття про комплексне число

У багатьох розділах математики та її застосуваннях неможливо обмежитися розглядом лише дійсних чисел. Вже досить давно під час розв'язування різних задач виникла потреба добувати квадратний корінь з від'ємних чисел. Але чисел, які при піднесенні до квадрата дають від'ємні числа, тоді не знали і тому вважали, що квадратні корені у від'ємних чисел не існують, тобто задачі, які до них приводять, не мають розв'язків. Зокрема, так було під час розв'язування квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом, наприклад:

$$x^2 - 4x + 10 = 0, \ x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-6}.$$

Тому природно постало питання про розширення множини дійсних чисел, приєднанням до неї нових так, щоб у розширеній множині, крім чотирьох арифметичних дій — додавання, віднімання, множення і ділення (за винятком ділення на нуль), можна було виконувати дію добування кореня. Це питання було успішно розв'язане лише у XIX ст. Відповідно до прийнятих у математиці принципів розширення поняття числа при розширенні множини дійсних чисел мають задовольнятися такі вимоги:

1) означення нових чисел мусить спиратися на поняття дійсного числа, і нова множина має містити всі дійсні числа;

2) для нових чисел повинні виконуватися п'ять законів прямих арифметичних дій (пригадайте ці закони);

3) у новій числовій множині мусить мати розв'язок рівняння $x^2 = -1$, бо в цій множині має виконуватися дія, обернена до піднесення до степеня.

Оскільки існує вимога, щоб у новій числовій множині рівняння $x^2 = -1$ мало розв'язок, необхідно ввести деяке нове число, вважаючи його розв'язком цього рівняння. Число, квадрат якого дорівнює -1, позначають буквою i і називають *уявною одиницею* (i — перша буква латинського слова *imaginarius* — уявний). Підкреслимо, що рівність $i^2 = -1$ приймається за означенням і не доводиться. До нової множини мають належати числа виду bi (добуток дійсного числа на уявну одиницю) і числа виду $a + bi$ (сума дійсного числа a і добутку дійсного числа b на уявну одиницю).

Отже, нова множина чисел повинна містити всі числа виду $a + bi$. Числа виду $a + bi$, де a і b — довільні дійсні числа, а i — уявна одиниця, називають *комплексними*. Слово «комплексний» означає складений. Число a називають дійсною частиною комплексного числа $a + bi$, а вираз bi — уявною.

Число b називають коефіцієнтом при уявній частині. Наприклад, у числі $6 + 7i$ дійсна частина 6, уявна $7i$. Коефіцієнт при уявній частині дорівнює 7. Дійсною частиною числа $0 + 3i$ є число нуль, а уявною — вираз $3i$; коефіцієнт при уявній частині дорівнює 3. Числа виду $a + 0i$ ототожнюються з дійсними числами, а саме вважають, що $a+0i = a$. Далі ми скрізь замість $a+0i$ писатимемо просто a, зокрема $0 + 0i = 0$. Таким чином виконується обов'язкова для будь-якого розширення поняття числа вимога, щоб попередній числовий «запас» входив до нової числової множини як її частина. Множина дійсних чисел є частиною (підмножиною) множини комплексних чисел. Відповідно до вимог, що ставляться при будь-якому розширенні поняття числа, при побудові множини комплексних чисел треба ввести за означанням умову рівності цих чисел і правила виконання прямих дій — додавання і множення.

Два комплексних числа $a + bi$ і $c + di$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли $a = c$ і $b = d$, тобто коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявних частинах.

Поняття «більше» і «менше» для комплексних чисел не має смислу. Ці числа за величиною не порівнюють. Тому не можна, наприклад, сказати, яке з двох чисел більше $10i$ чи $3i$, $2 + 5i$, чи $5 + 2i$.

Важливим є поняття про *спряжені комплексні числа*. Числа $a + bi$ та $a - bi$, дійсні частини яких рівні, а коефіцієнти при уявних частинах рівні за модулем, але протилежні за знаком, називають *спряженими*. Можна сказати простіше: числа $a + bi$ і $a - bi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються спряженими.

Наприклад, спряженими є комплексні числа $4 + 3i$ та $4-3i$; $2-i$ та $2+i$; $-8+7i$ та $-8-7i$; $-5-i$ та $-5+i$. Якщо дане число $6i$, то спряжене до нього буде $-6i$. До числа 11 спряженим буде 11, бо $11 + 0i = 11 - 0i$.

§ 2. Дії над комплексними числами

Додавання комплексних чисел.

Означення. *Сумою двох комплексних чисел* $a+bi$ та $c+di$ називається комплексне число $(a+c)+(b+d)i$, *дійсна частина якого і коефіцієнт при уявній частині дорівнюють відповідно сумі дійсних частин і коефіцієнтів при уявних частинах доданків, тобто* $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Приклади. Виконати додавання комплексних чисел:

а) $(3 + 2i) + (-1 - 5i) = (3 - 1) + (2 - 5)i = 2 - 3i$;

б) $(4 - 5i) + (2 - i) = (4 + 2) + (-5 - 1)i = 6 - 6i$;

в) $(2 + 3i) + (6 - 3i) = (2 + 6) + (3 - 3)i = 8$;

г) $(10 - 3i) + (-10 + 3i) = (10 - 10) + (-3 + 3)i = 0 + 0i = 0$.

З наведених прикладів випливає, що додавання комплексних чисел ми виконуємо за правилом додавання многочленів. У множині дійсних чисел справедлива рівність $a + 0 = a$. У множині комплексних чисел нулем є число $0 + 0i$. Справді, яке б не було число $a + bi$, справджується рівність

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi.$$

За аналогією з дійсними числами, для комплексних чисел вводиться поняття про протилежні числа: два числа $a + bi$ та $-a - bi$, сума яких дорівнює 0, називають *протилежними.*

Додавання комплексних чисел підлягає переставному і сполучному законам. Доведемо, наприклад, справедливість переставного закону додавання комплексних чисел. Нехай, $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тоді $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, $z_2 + z_1 = (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i$. Оскільки для додавання дійсних чисел справджується переставний закон, тобто $a + c = c + a$; $b + d = d + b$, то $(a+c)+(b+d)i = (c+a)+(d+b)i$. Отже, $z_1+z_2 = z_2+z_1$, що й треба було довести. Означення суми комплексних чисел поширюється і на випадок трьох і більше доданків.

Пропонуємо самостійно довести справедливість сполучного закону додавання для трьох комплексних чисел $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_3 = l + fi$.

Віднімання комплексних чисел. Віднімання комплексних чисел означають як дію, обернену до дадавання, коли за даною сумою й одним з доданків знаходять другий, невідомий доданок.

Означення. *Різницею двох комплексних чисел $z_1 = a + bi$ і $z_2 = c + di$ називається таке комплексне число $z_3 = x + yi$ яке в сумі з z_2 дає z_1.*

Отже, $z_1 - z_2 = z_3$, якщо $z_3 + z_2 = z_1$. Можливість дії віднімання комплексних чисел та її однозначність потребує доведення.

Доведемо, що для будь-яких комплексних чисел $z_1 = a + bi$ і $z_2 = c + di$ різниця $z_1 - z_2$ визначена і до того ж однозначно. Доведемо, що існує, і до того ж єдине, комплексне число $z_3 = x + yi$, яке в сумі з z_2 дорівнює z_1.

За означенням дії віднімання, $(c + di) + (x + yi) = a + bi$. Виконавши додавання в лівій частині рівності, дістанемо:

$$(c + x) + (d + y)i = a + bi. \qquad (1)$$

З умови рівності двох комплексних чисел маємо·

$$\begin{cases} c + x = a, \\ d + y = b. \end{cases}$$

Ця система має розв'язок і до того ж єдиний: $x = a - c$, $y = b - d$. Отже, існує, і до того ж єдина, пара дійсних чисел (x, y), яка задовольняє рівняння (1), що і треба було довести. З доведеного випливає, що віднімання комплексних чисел виконують за таким правилом:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

тобто дійсна частина різниці двох комплексних чисел дорівнює різниці дійсних частин зменшуваного і від'ємника, а коефіцієнт при уявній частині — різниці коефіцієнтів при уявних частинах зменшуваного і від'ємника.

Приклади. Виконати віднімання комплексних чисел:

а) $(3 + 4i) - (1 + 2i) = (3 - 1) + (4 - 2)i = 2 + 2i$;

б) $(-5 + 2i) - (2 + i) = (-5 - 2) + (2 - 1)i = -7 + i$;

в) $(6 + 7i) - (6 - 5i) = (6 - 6) + (7 + 5)i = 12i$;

г) $(0,3 + 2,5i) - (-0,75 + 1,5i) = (0,3 + 0,75) + (2,5 - 1,5)i = 1,05 + i$;

д) $(\sqrt{2} - 2i) - (\sqrt{2} + 3i) = (\sqrt{2} - \sqrt{2}) + (-2 - 3)i = -5i$;

е) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{5}i\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}i\right)i = \frac{1}{12} + 1\frac{1}{10}i.$

Під час розв'язування прикладів на сумісне додавання і віднімання комплексних чисел можна користуватися правилами додавання і віднімання многочленів.

Приклади. Виконати дії: а) $(7 + 3i) + (-8 - 5i) - (4 - 9i) - (1 + i) = (7 - 8 - 4 - 1) + (3 - 5 + 9 - 1)i = -6 + 6i$;

б) $(2,3 + 1,5i) - (0,9 - 2,4i) + (-5,8 + i) - (-7,8 - 3,4i) = (2,3 - 0,9 - 5,8 + 7,8) + (1,5 + 2,4 + 1 + 3,4)i = 3,4 + 8,3i$.

Множення комплексних чисел.

О з н а ч е н н я. *Добутком двох комплексних чисел* $a+bi$ та $c+di$ *називається комплексне число* $(ac-bd)+$ $+(ad+bc)i$. Суть і доцільність цього означення стане зрозумілою, якщо взяти до уваги, що цей добуток утворений так, як виконується множення двочленів з дійсними коефіцієнтами, а саме: $(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 =$ $= ac+(ad+bc)i+bdi^2$. Замінюючи, за означанням, i^2 на -1, дістанемо: $bdi^2 = -bd$. Відокремивши дійсну частину від уявної, остаточно матимемо:

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i. \qquad (2)$$

Формулу (2) не слід намагатися механічно запам'ятати. Під час множення комплексних чисел треба користуватися відомим правилом множення двочленів $a+bi$ та $c+di$ з наступною заміною i^2 на -1.

П р и к л а д и. Виконати множення комплексних чисел:

а) $(4-5i)\cdot(3+2i) = 12+8i-15i-10i^2 = 12+10-7i =$ $= 22-7i$;

б) $(\sqrt{3}-i)\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5}i) = \sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{15}i-\sqrt{5}i^2 =$ $= (\sqrt{6}+\sqrt{5})+(\sqrt{15}-\sqrt{2})i$;

в) $8i\cdot 3i\cdot\sqrt{3} = -24\sqrt{3}$;

г) $(2-i)\cdot(-5) = -10+5i$;

д) $(-4-3i)\cdot(-6i) = -18+24i$.

Дія множення комплексних чисел підлягає основним законам множення, встановленим для дійсних чисел: переставному і сполучному. (Пропонуємо самостійно довести ці закони.)

Знайдемо добуток двох спряжених комплексних чисел. Маємо: $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2i^2 = a^2+b^2$, тобто $(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2$. Отже, добуток двох спряжених комплексних чисел є дійсне невід'ємне число, яке дорівнює сумі квадратів дійсної частини якогось з даних чисел та коефіцієнта при уявній одиниці. Тому далі під час множення спряжених комплексних чисел відразу писатимемо результат.

П р и к л а д и. Обчислити добутки:

а) $(3+5i)\cdot(3-5i)=3^2+5^2=34$;

б) $(2+i)\cdot(2-i)=2^2+1^2=5$;

в) $(4+\sqrt{3}i)\cdot(4-\sqrt{3}i)=4^2+(\sqrt{3})^2=16+3=19$;

г) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)=(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2=x+y$.

д) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}i\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}i\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{4}{25}=\frac{289}{400}$.

Читаючи рівність $(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$ справа наліво, робимо висновок, що суму квадратів будь-яких двох чисел можна подати у вигляді добутку комплексно-спряжених множників.

Приклади. Розкласти на множники двочлен:

а) $a^2+9=(a+3i)\cdot(a-3i)$;

б) $16m^2+25n^2=(4m+5ni)(4m-5ni)$;

в) $49+36=(7+6i)(7-6i)$;

г) $a+16=(\sqrt{a}+4i)(\sqrt{a}-4i)$;

д) $b+7=(\sqrt{b}+\sqrt{7}i)(\sqrt{b}-\sqrt{7}i)$.

Ділення комплексних чисел. Ділення комплексних чисел означають як дію, обернену до дії множення, коли за даним добутком і одним із множників знаходять другий невідомий множник. Причому в множині комплексних чисел залишається вимога, щоб дільник був відмінний від нуля.

Означення. *Часткою комплексних чисел $z_1=a+bi$ та $z_2=c+di$ називається таке комплексне число $z_3=x+yi$, яке при множенні на z_2 дає z_1.*

Можливість ділення комплексних чисел і його однозначність потребує доведення.

Доведемо, що частка комплексних чисел $z_1=a+bi$ та $z_2=c+di$ визначена і до того ж однозначно, якщо $c+di\neq 0+0i$. Отже, доведемо, що за умови $c+di\neq 0+0i$ існує, і до того ж єдине, комплексне число $z_3=x+yi$, яке при множенні на z_2 дає z_1. За означенням дії ділення, $(c+di)\cdot(x+yi)=a+bi$. Виконавши в лівій частині цієї рівності дію множення, дістанемо: $(cx-dy)+(cy+dx)i=a+bi$.

З умови рівності двох комплексних чисел випливає:

$$\begin{cases} cx-dy=a, \\ dx+cy=b. \end{cases}$$

Система має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Із доведення випливає, що ділення комплексних чисел виконується за таким правилом:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Цей результат можна дістати, помноживши ділене і дільник на число, спряжене до дільника. Покажемо це:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)\cdot(c - di)}{(c + di)\cdot(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Цим прийомом користуються під час розв'язування вправ на ділення комплексних чисел.

Приклади. Знайти частку комплексних чисел:

а) $\frac{2 + 5i}{3 - 2i} = \frac{(2 + 5i)\cdot(3 + 2i)}{(3 - 2i)\cdot(3 + 2i)} =$

$= \frac{(6 - 10) + (4 + 15)i}{9 + 4} = \frac{-4 + 19i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{19}{13}i;$

б) $\frac{3 + i}{i} = \frac{(3 + i)(-i)}{i(-i)} = -3i - i^2 = 1 - 3i;$

в) $\frac{5}{1 - 2i} = \frac{5(1 + 2i)}{(1 - 2i)\cdot(1 + 2i)} = \frac{5 + 10i}{5} = 1 + 2i;$

г) $\frac{4i}{3 - 2i} = \frac{4i(3 + 2i)}{(3 - 2i)\cdot(3 + 2i)} = \frac{-8 + 12i}{9 + 4} = -\frac{8}{13} + \frac{12}{13}i;$

д) $\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)\cdot(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - 2i + i^2}{2} = \frac{1 - 2i - 1}{2} = -i;$

е) $\frac{-2\sqrt{3} + i}{1 + 2\sqrt{3}i} = \frac{(-2\sqrt{3} + i)(1 - 2\sqrt{3}i)}{(1 + 2\sqrt{3}i)(1 - 2\sqrt{3}i)} =$

$= \frac{-2\sqrt{3} + 12i + i + 2\sqrt{3}}{1 + 12} = \frac{13i}{13} = i.$

Піднесення комплексних чисел до степеня. За означенням, $i^1 = i$, $i^2 = -1$.

Користуючись рівністю $i^2 = -1$, визначимо кілька послідовних степенів уявної одиниці: $i^3 = i^2 i = -1 \cdot i = -i$; $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$; $i^5 = i^4 \cdot i = i$; $i^6 = i^5 \cdot i = -1$; $i^7 = i^6 \cdot i = -i$; $i^8 = i^7 \cdot i = 1$. Оскільки $i^4 = 1$, то значення степенів періодично повторюються зі збільшенням показника на 4. Так, $i^2 = i^6 = -1$; $i^3 = i^7 = -i$; $i^4 = i^8 = 1$ і т.д.

О з н а ч е н н я. *Щоб піднести число і до степеня з натуральним показником n, треба показник степеня поділити на 4 і піднести до степеня, показник якого дорівнює остачі від ділення.* В загальному вигляді це можна подати так:

$$i^{4m} = 1;\ \ i^{4m-1} = i;\ \ i^{4m+2} = -1;\ \ i^{4m+3} = i^3 = -i.$$

П р и к л а д и. Піднести до степеня:

а) $i^{19} = i^{4\cdot4+3} = i^{16+3} = i^{16} \cdot i^3 = -i$;

б) $i^{34} = i^{4\cdot8+2} = i^{32+2} = i^2 = -1$;

в) $i^{55} = i^{52+3} = 1 \cdot i^3 = -i$.

Правила піднесення до степеня уявної одиниці застосовуються при піднесенні до степеня комплексних чисел.

П р и к л а д и. Піднести до степеня двочлени:

а) $(2+5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = -21 + 20i$;

б) $(3+2i)^3 = 27 + 54i + 36i^2 + 8i^3 = -9 + 46i$;

в) $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$;

г) $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$;

д) $(1-i)^4 = ((1-i)^2)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$;

е) $(1+i)^6 = ((1+i)^2)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i$;

є) $(1-i)^{10} = ((1-i)^2)^5 = (-2i)^5 = -32i^5 = -32i$.

Рівності $(1+i)^2 = 2i$, $(1-i)^2 = -2i$ корисно запам'ятати, бо їх часто використовують.

Добування квадратного кореня з від'ємних чисел. Розв'язування квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом. При побудові множини комплексних чисел було забезпечено виконуваність дії добування квадратного кореня з від'ємних чисел. Розглянемо цю дію. Зауважимо, що існують два і тільки два значення квадратного кореня з -1, а саме: i та $-i$. Умовно це записують так $\sqrt{-1} = \pm i$. Аналогічно існує два і тільки два значення квадратного кореня з числа $-a$, а саме: $\sqrt{a}i$ та $-\sqrt{a}i$, де під $\sqrt{a}$ розуміють арифметичний корінь. Умовно це записують так: $\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}i$, наприклад $\sqrt{-64} = \pm 8i$; $\sqrt{-0,0144} = \pm 0,12i$.

Розглянемо тепер розв'язування квадратних рівнянь з від'ємними дискримінантами. Нагадаємо, що до введення множини комплексних чисел вважалося, що такі рівняння не мають коренів.

Нехай дано рівняння $x^2 + 8x + 17 = 0$. Маємо: $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 17}$ або $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{-1}$. Враховуючи попереднє, це можна записати так: $x_1 = -4 + i$, $x_2 = -4 - i$. Корені x_1 та x_2 є спряженими комплексними числами. Взагалі, будь-яке квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами і від'ємним дискримінантом має два комплексних спряжених корені. Можна довести, що й для таких рівнянь справедлива теорема Вієта. Наприклад, для розглянутого вище рівняння $x_1 + x_2 = (-4 + i) + (-4 - i) = -8$; $x_1 x_2 = (-4 + i)(-4 - i) = 16 + 1 = 17$, тобто сума коренів дорівнює коефіцієнту при x з протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену.

Приклади. Розв'язати рівняння:

а) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Маємо: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm \sqrt{-1}$; $x_{1,2} = 2 \pm i$.

б) $z^2 + 6z + 13 = 0$.

Маємо: $z_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 13} = -3 \pm \sqrt{-4}$; $z_{1,2} = -3 \pm 2i$.

в) $4x^2 + 3x + 1 = 0$.

Маємо: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{8} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{8}$,

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{8} = -\frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{7}}{8}i.$$

Розглянемо приклад на складання квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами за його коренями.

Нехай

$$x_1 = 3 - \frac{1}{2}i, \;\; x_2 = 3 + \frac{1}{2}i.$$

$$x_1 + x_2 = \left(3 - \frac{1}{2}i\right) + \left(3 + \frac{1}{2}i\right) = 6;$$

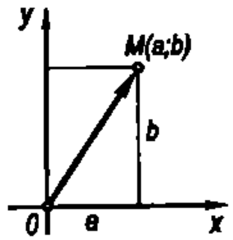
$$x_1x_2 = \left(3 - \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{2}i\right) = 9 - \frac{1}{4}i^2 = 9\frac{1}{4}.$$

Числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - 6x + 9\frac{1}{4}$. Отже, шуканим є рівняння $4x^2 - 24x + 37 = 0$.

§ 3. Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Вивчаючи комплексні числа, можна використовувати геометричну термінологію і геометричні міркування, якщо встановити взаємно однозначну відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок координатної площини. Цю відповідність можна встановити так. Кожному комплексному числу $a + bi$ поставимо у відповідність точку $M(a; b)$ координатної площини, тобто точку, абсциса якої дорівнює дійсній частині комплексного числа, а ордината — коефіцієнту уявної частини. Кожній точці $M\ (a, b)$ координатної площини поставимо у відповідність комплексне число $a + bi$ (мал. 163)). Очевидно, що така відповідність є взаємно однозначною. Вона дає можливість інтерпретувати комплексні числа як точки деякої площини, на якій вибрано систему координат. Координатну площину називають при цьому *комплексною*, вісь абсцис — *дійсною віссю*, бо на ній розміщені точки, що відповідають комплексним числам $a + 0i$, тобто відповідають дійсним числам. Вісь ординат називається *уявною віссю* — на ній лежать точки, які відповідають уявним комплексним числам $0 + bi$.

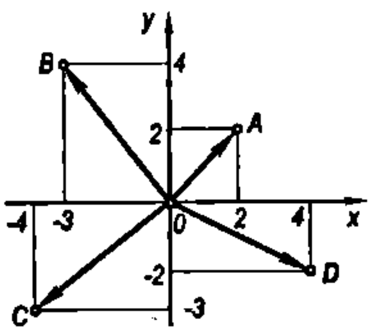
Зручною є також інтерпретація комплексного числа як вектора $\overrightarrow{OM}$ (див. мал. 163). Поставимо у відповідність кожному комплексному числу вектор з початком у точці $O(0; 0)$ і кінцем у точці $M(a; b)$. Ви знаєте, що такий вектор називають радіусом-вектором, а його проекції на осі координат є координатами вектора. Отже, можна сказати, що геометричним зображенням комплексного числа $z = a + bi$ є радіус-вектор з координатами a і b. Відповідність між множиною комплексних чисел, з одного боку, і множиною точок або векторів площини, з іншого, дає змогу комплексні числа називати точками або векторами і говорити, наприклад, про вектор $a + bi$ або про точку $a + bi$.



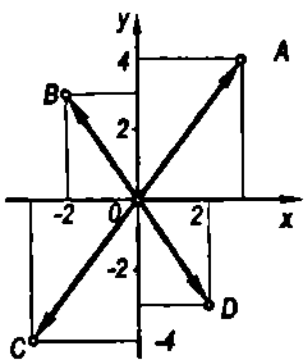
Мал. 163

На малюнку 164 вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ є відповідно геометричними зображеннями комплексних чисел $z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = -3 + 4i$; $z_3 = -4 - 3i$; $z_4 = 4 - 2i$.

Протилежним комплексним числам відповідають протилежні вектори. На малюнку 165 зображено дві пари протилежних векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OD}$, що відповідають парам протилежних чисел $3 + 4i$ та $-3 - 4i$; $-2 + 3i$ та $2 - 3i$.



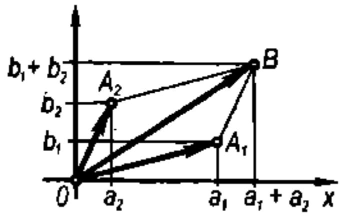
Мал. 164



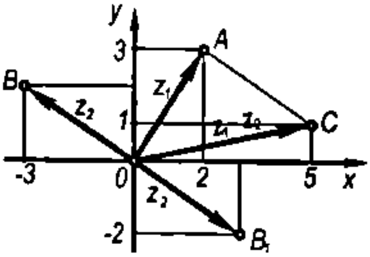
Мал. 165

Обидва способи геометричного зображення комплексних чисел рівноцінні, бо будь-якій точці A координатної площини відповідає певний радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$. Навпаки, кожному радіусу-вектору $\overrightarrow{OA}$ відповідає певна точка — кінець радіуса-вектора.

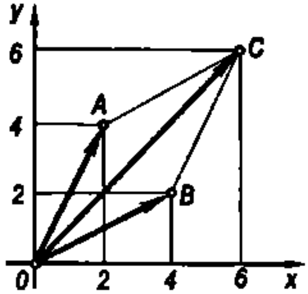
Геометричне зображення суми і різниці двох комплексних чисел. З геометричної інтерпретації комплексних чисел у вигляді векторів випливає можливість геометричного зображення додавання комплексних чисел. Воно зводиться до знаходження суми двох векторів за відомим правилом паралелограма.



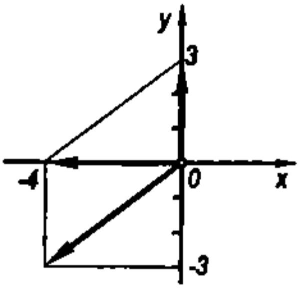
Мал. 166



Мал. 167



Мал.168

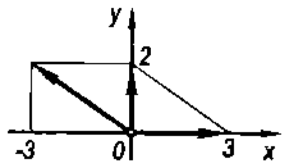


Мал.169

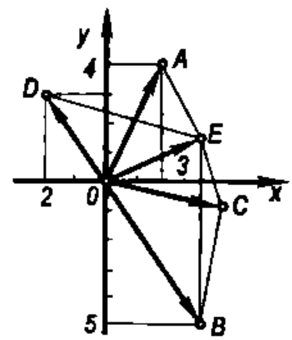
Нехай дано два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$, яким відповідають радіуси-вектори $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OA_2}$ (мал. 166). Побудуємо на цих векторах як на сторонах паралелограм. Тоді зображенням суми комплексних чисел z_1 і z_2 буде вектор $\overrightarrow{OB}$ (діагональ паралелограма). Справді, при додаванні векторів їх відповідні координати додають. Тому, якщо вектор $\overrightarrow{OA_1}$ має координати $(a_1;\ b_1)$, а вектор $\overrightarrow{OA_2}(a_2; b_2)$, то їх сума — вектор $\overrightarrow{OB}$ — матиме координати $(a_1 + a_2;\ b_1 + b_2)$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ відповідає комплексному числу $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, яке є сумою чисел z_1 і z_2.

Віднімання двох комплексних чисел геометрично означає віднімання відповідних їм радіусів-векторів. Віднімання векторів, що мають спільний початок, полягає в додаванні до вектора-зменшуваного вектора, протилежного від'ємнику.

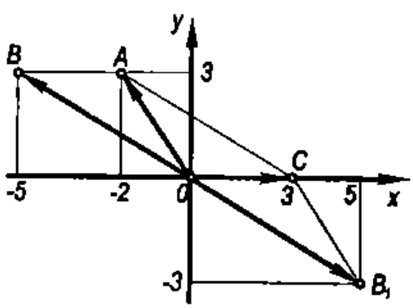
Нехай, наприклад, треба знайти геометричне зображення різниці $z_1 - z_2$ комплексних чисел $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = -3 + 2i$. Будуємо вектор $\overrightarrow{OA}$, що є зображенням числа z_1, і додаємо до нього вектор $\overrightarrow{OB}$, який зображає число $z_2 = 3 - 2i$, протилежне від'ємнику $z_2 = -3 + 2i$ (мал.167). Шукану різницю зображають вектором $\overrightarrow{OC}$, що є сумою векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB_1}$. Йому відповідає комплексне число $5 + i$.



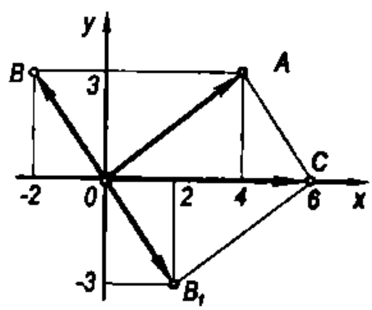
Мал. 170



Мал. 171



Мал.172



Мал.173

Приклади. Подати геометричне зображення суми і різниці двох комплексних чисел: а) $(2 + 4i) + (4 + 2i)$.

Розв'язання випливає з малюнка 168. Доданкам відповідають радіуси-вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, а сумі — радіус-вектор $\overrightarrow{OC}$.

б) $3i + (-4 - 3i)$ (мал.169);

в) $(-3 + 2i) + 3$ (мал.170);

г) $(2 + 4i) + (3 - 5i) + (-2 + 3i)$.

Р о з в' я з а н н я. Будуємо вектор $\overrightarrow{OC}$, що відповідає сумі двох перших доданків, і додаємо до нього вектор $\overrightarrow{OD}$, що зображує третій доданок. Сумі даних комплексних чисел відповідає вектор $\overrightarrow{OE}$ (мал. 171).

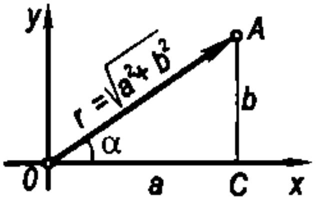
д) $(-2 + 3i) - (-5 + 3i)$ (мал. 172);

е) $(4 + 3i) - (-2 + 3i)$ (мал.173).

§ 4. Тригонометрична форма запису комплексних чисел

Запис числа z у вигляді $a + bi$ називається *алгебраїчною формою запису комплексного числа.* Крім алгебраїчної форми використовуються й інші форми запису комплексних чисел — *тригонометрична* і *показникова.* Розглянемо тригонометричну форму запису, а для цього введемо поняття про модуль і аргумент комплексного числа.

Модуль комплексного числа. Побудуємо радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$, що є геометричним образом комплексного числа $z = a + bi$ (мал. 174). Модулем комплексного числа $z = a + bi$ називається значення $\sqrt{a^2 + b^2}$. Число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ перетворюється на нуль тільки за умов $a = 0,\ b = 0$.



Мал. 174

Модуль комплексного числа $a + bi$ позначається символом $|a + bi|$. Отже, $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Якщо комплексні числа мають один і той самий модуль, то кінці векторів, які зображують ці числа, лежать на колі з центром у початку координат і радіусом, що дорівнює їх модулю.

П р и к л а д и. Знайти модулі даних комплексних чисел:

а) $|5 + 7i| = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$;

б) $|-2 - 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$;

в) $|8 + 0i| = \sqrt{8^2 + 0} = 8$;

г) $|5i| = 5$.

Аргумент комплексного числа. Нехай радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$ зображує комплексне число $z = a + bi$ (див. мал.174). Позначимо α кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OA}$ з додатним напрямом осі Ox. Числове значення кута α, виміряного в радіанах, називається аргументом комплексного числа $a + bi$. Якщо комплексне число дорівнює нулю, то вектор $\overrightarrow{OA}$ перетворюється в точку (нуль-вектор), і говорити про його напрям немає сенсу. Тому вважають, що число нуль не має аргументу. Кожне відмінне від нуля комплексне число має нескінченну множину значень аргументу, які відрізняються одне від одного на ціле число повних обертів, тобто на величину $2\pi n$, де n — довільне ціле число. Значення аргументу, взяте в межах першого кола, тобто від 0 до 2π, називається *головним*. Головне значення аргументу α комплексного числа $a + bi$ можна визначити з рівності $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Справді, за знаками a і b можна встановити, в якій чверті міститься кут α, і за значенням $\operatorname{tg}\alpha$, використовуючи таблиці, знайти значення кута α.

П р и к л а д и. Знайти головне значення аргументу α даних комплексних чисел:

а) $z = 1 + i$;

Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Оскільки $a = 1$ та $b = 1$, радіус-вектор, який відповідає даному комплексному числу, належить I чверті і тому α — гострий кут. Отже, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

б) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$;

Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$. Тут $a = -2,\ b = 2\sqrt{3}$, тобто радіус-вектор, який відповідає даному комплексному числу, належить II чверті. Отже, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

в) $z = -1 - i$;

Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Радіус-вектор, що відповідає даному комплексному числу, належить III чверті. Отже, $\alpha = \frac{5}{4}\pi$.

г) $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$. Тут $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$. Радіус-вектор, що відповідає даному комплексному числу, належить IV чверті. Отже, $\alpha = \frac{5}{3}\pi$.

Тригонометрична форма комплексного числа. Нехай вектор $\overrightarrow{OA}$ є геометричним зображенням комплексного числа $z = a + bi$ (див. мал.174), модуль якого дорівнює r, а аргумент α.

У прямокутноку трикутнику AOC: $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$. Підставляючи у запис комплексного числа замість a і b їхні значення, виражені через модуль і аргумент, дістанемо:

$$z = r\cos\alpha + r\sin\alpha i = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Вираз $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *називається тригонометричною формою комплексного числа.* Будь-яке число $a + bi$, дане в алгебраїчній формі, можна подати в тригонометричній формі. Модуль r знаходимо за формулою $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а кут α визначаємо із залежності $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, яка випливає з формул $\cos\alpha = \frac{a}{r}$ і $\sin\alpha = \frac{b}{r}$.

П р и к л а д и. Записати дані комплексні числа в тригонометричній формі:

а) $z = -2 + 3i$;

Маємо: $r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(a < 0,\ b > 0,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right).$$

За таблицями або за допомогою калькулятора знаходимо $\alpha \approx 124^\circ$. Отже, $z = \sqrt{13}(\cos 124^\circ + i\sin 124^\circ)$.

б) $z = -1 - \sqrt{3}i$;

Маємо: $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Через те, що радіус-вектор, який зображує число $z = -1 - \sqrt{3}i$, розміщений у III чверті комплексної площини, то за аргумент беремо $\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi$. Отже, $-1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

в) $z = 3 - 3i$;
Маємо: $r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
Знайдемо $\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ · $\cos\alpha > 0$, а $\sin\alpha < 0$. Тому кут α належить IV чверті, $\alpha = \frac{7\pi}{4}$. Отже, $3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

г) $z = -2\sqrt{3} - 2i$; Маємо $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$.
Знайдемо $\cos\alpha < 0$ і $\sin\alpha < 0$. Тому кут α належить III чверті.
Отже, $-2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

д) $z = i$;

Тут $a = 0, b = 1$, отже, $r = 1$. Вектор, що зображує число i, утворює з віссю абсцис кут $\frac{\pi}{2}$ (поясніть чому). Отже, $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

е) $z = 3$.

Тут $a = 3, b = 0$, отже, $r = 3$.

$$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0).$$

Розглянемо приклади переходу від тригонометричної форми комплексного числа до алгебраїчної.

Приклади. а) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}2}{i}\right) = 1 + \sqrt{3}i$;

б) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}2}{i}\right) = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі. Тригонометрична форма запису комплексних чисел виявляється дуже зручною під час множення і ділення чисел. Нехай $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ — два числа, що записані в тригонометричній формі. Тоді

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 +$$
$$+ i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1\sin\alpha_2),$$

або $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$. Отже, справедливим є таке твердження: під час множення комплексних чисел у тригонометричній формі модулі їх перемножуються, а аргументи додаються. Для знаходження частки множимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2)}{r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\cdot(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\cos^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)).$$

Отже, під час ділення комплексних чисел їх модулі діляться, а аргументи віднімаються.

П р и к л а д и. Виконати множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі:

а) $z_1 = 3(\cos 7^\circ + i\sin 7^\circ)$, $z_2 = 8(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$. Знайдемо $z = z_1\cdot z_2$. Маємо: $|z| = 3\cdot 8 = 24$; $7^\circ + 15^\circ = 22^\circ$, тобто $z = 24(\cos 22^\circ + i\sin 22^\circ)$.

б) $z_1 = \sqrt{7}(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$, $z_2 = 3\sqrt{14}(\cos 28^\circ + i\sin 28^\circ)$, $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{7}(\cos 92^\circ + i\ \sin 92^\circ)$.

Знайдемо $z = z_1\cdot z_2\cdot z_3$. Маємо: $|z| = \sqrt{7}\cdot 3\sqrt{14}\frac{\sqrt{2}}{7} = 6$; $50^\circ + 28^\circ + 92^\circ = 170^\circ$, тобто $z = 6(\cos 170^\circ + i\ \sin 170^\circ)$.

в) $$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

Знайдемо модуль шуканого числа $1\cdot 2 : \sqrt{2} = \sqrt{2}$ і аргумент $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12}\pi$.

Отже, $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right)$.

Подаємо без доведення правила піднесення до степеня комплексного числа, записаного в тригонометричній формі, і добування кореня з комплексного числа.

При будь-якому натуральному n

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Це твердження називається формулою Муавра.

Корінь n-го степеня з числа $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ обчислюють за формулою

$$\omega = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),$$

де k — деяке ціле число ($k \in \mathrm{Z}$).

Підставляючи замість k значення $0, 1, 2, \ldots n - 1$, дістанемо n різних значень кореня. Так, якщо $n = 2$, $k = 2$, матимемо $\sin\frac{\alpha + 4\pi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$ і т.д.

Приклади. Виконати дії піднесення до степеня і добування кореня з даних комплексних чисел.

а) $z = \sqrt{3} - i$. Обчислити z^9.

Модуль даного числа дорівнює $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, аргумент $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, отже модуль числа z^9 дорівнює 2^9, аргумент $9\alpha = -\frac{3}{2}\pi$. Таким чином,

$$(\sqrt{3} - i)^9 = 2^9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 512i.$$

б) Знайти всі значення $\sqrt[5]{1}$.

Оскільки $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, то

$$\sqrt[5]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = 1\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{5}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Надаючи k послідовно значень $0, 1, 2, 3, 4, 5$, відповідно дістанемо:

$$z_1 = 1, \quad \text{якщо} \quad k = 0;$$

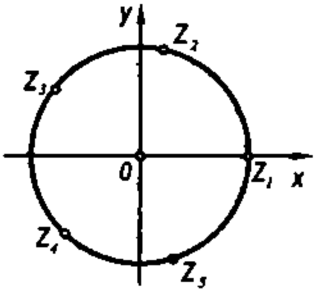
$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}, \quad \text{якщо} \quad k = 1;$$

$$z_3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}, \quad \text{якщо} \quad k = 2;$$

$$z_4 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}, \quad \text{якщо} \quad k = 3;$$

$$z_5 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}, \quad \text{якщо} \quad k = 4.$$

Цікавий такий факт. Модулі всіх значень $\sqrt[5]{1}$ дорівнюють 1. Отже, точки z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 лежать на колі радіуса 1 з центром у початку координат. Побудувавши аргументи значень $z_1, \ldots, z_5$, помітемо, що точки, які зображують числа $z_1, \ldots, z_5$ є вершинами правильного п'ятикутника (мал.175).



Мал. 175

Взагалі точки, які відповідають значенням кореня n-го степеня з комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, розміщуються у вершинах правильного n-кутника з центром у точці O.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Чи завжди можна добути корінь у множині раціональних чисел? У множині дійсних чисел?

2. Сформулювати вимоги, яких слід дотримуватися при розширенні множини дійсних чисел.

3. Сформулювати закони додавання і множення чисел, дотримання яких є обов'язковим на всіх етапах розширення поняття числа.

4. Чим викликана потреба розширення множини дійсних чисел?

5. Дати означення комплексного числа. Показати, що множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел.

6. Сформулювати умову рівності двох комплексних чисел. Чи можна довести цю умову?

7. Дати означення спряжених комплексних чисел і навести приклади таких чисел.

8. Подати у вигляді формул правила чотирьох арифметичних дій для чисел $a + bi$ та $c + di$.

9. Чи може сума, різниця, добуток і частка двох комплексних чисел дорівнювати дійсному числу? Навести приклади.

10. Чому дорівнює сума і добуток двох спряжених комплексних чисел?

11. Розкласти на комплексні множники вирази:
$m^2 + n^2$; $x + y$; $c \pm 3$.

12. Скільки різних степенів має уявна одиниця?

13. Обчислити степені: $i^{17}, i^{18}, i^{19}, i^{20}$.

14. Чому дорівнюють дроби: $\frac{1}{i}, \frac{1}{i^2}, \frac{1}{i^3}, \frac{1}{i^4}$?

15. Чи потрібно доводити справедливість основних законів прямих арифметичних дій для комплексних чисел?

16. Чи коректним буде таке завдання: порівняти за величиною пари чисел $4i$ та $7i$, $\sqrt{-5}$ і $\sqrt{-10}$?

17. Довести, що квадрат комплексного числа $a + bi$ являє собою дійсне число тоді і тільки тоді, коли або $a = 0$, або $b = 0$.

18. Скільки існує значень кореня квадратного з -1? Обґрунтувати свою відповідь.

19. Довести, що теорема Вієта правильна для будь-якого квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами.

20. Відомо, що дане квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами має один комплексний корінь. Що можна сказати про другий його корінь?

21. Яка відповідність існує між комплексними числами і точками площини?

22. Як можна геометрично інтерпретувати комплексні числа?

23. В яких чвертях містяться точки, що зображують комплексні числа: $4 - i$; $-3 + 4i$; $-5 - 4i$; $6 - 7i$?

24. Які числа відповідають точкам осі Ox? осі Oy?

25. Що можна сказати про взаємне розміщення точок, які зображують спряжені комплексні числа? протилежні комплексні числа?

26. Як можна геометрично інтерпретувати додавання і віднімання двох комплексних чисел?

27. Дати означення модуля комплексного числа. Який його геометричний зміст?

28. Комплексне число помножили на 2. Чи змінився модуль цього числа?

29. Чому дорівнюють модулі чисел: i; $-i$; 1; 0?

30. Що таке аргумент комплексного числа?

31. Як визначити головне значення аргументу числа $z = a + bi$?

32. Чи можуть аргументом комплексного числа бути одночасно кути α і $-\alpha$?

33. Знайти геометричне місце точок площини, які зображують комплексні числа з однаковими модулями.

34. Чи може модуль комплексного числа дорівнювати $\sqrt{-2}$?

35. Як розміщуються на площині точки, що зображують комплексні числа з однаковими аргументами?

36. Як подати комплексне число виду $a + bi$ в тригонометричній формі? Як знайти модуль і аргумент цього числа?

37. Як перейти від тригонометричної форми комплексного числа до алгебраїчної?

38. Вивести правила множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі.

39. За яким правилом виконують дію піднесення до степеня комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі?

40. За якою формулою можна обчислити корінь n-го степеня з числа $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$?

ВПРАВИ

1. Виконати додавання і віднімання комплексних чисел:

А

1) $(2+i)+(3+i)+(-4+5i)$;
2) $(5+3i)-(2+i)$;
3) $(0,8-0,2i)+(0,1-1,3i)-(1,5+0,7i)-(2,3-0,6i)$.

Б

4) $8+(2-9i)+4i+(-2-8i)$; 5) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}i\right)-\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}i\right)$;
6) $(5x-3yi)+(-2x+8yi)-(2x-yi)+(7x-2yi)$.

В

7) $(2a-3bi)+(-a-bi)+(4a+2bi)-(2a-5bi)$;
8) $(2c-8di)-((5c-2di)+(c-di)-(-4c+3di))$;
9) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}i\right)$.

2. Виконати множення і ділення комплексних чисел:

А

1) $(3+7i)(2+i)$; 2) $(\sqrt{2}-i)(1+2i)$;
3) $(3+4i):(5-2i)$; 4) $5:(1+2i)$; 5) $(2+3i)(2-3i)$.

Б

6) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)$; 7) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i\right)$;
8) $(1-i):(1+i)$; 9) $(5-\sqrt{2}i):(5+\sqrt{2}i)$;
10) $\left(\frac{7}{8}+\frac{3}{4}i\right)\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}i\right)$.

В

11) $(4+\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$; 12) $(a+3bi)(2a-bi)$;
13) $(1+\sqrt{3}i):(1-\sqrt{3}i)$; 14) $(5-7i):(\sqrt{3}+i)$;
15) $(\sqrt{m}+\sqrt{n}i):(\sqrt{m}-\sqrt{n}i)$.

3. Подати вирази у вигляді добутку двох спряжених омплексних чисел:

А

1) $a^2 + 9b^2$; 2) $0,64 + 0,49x^2$; 3) $a + 25$.

Б

4) $b^2 + \frac{16}{25}$; 5) $3 + x$; 6) $7 + \frac{1}{9}$.

В

7) $x^2 + 4$; 8) $x^4 + y^4$; 9) 17.

4. Спростити вирази:

А

1) $3i^3$; 2) $2i^7$.

Б

3) $7i^{24}$; 4) $5i^{94}$.

В

5) $10i^{111}$; 6) $15 + 9i^2 - i^{21}$.

5. Піднести до степеня:

А

1) $(3 + 2i)^2$; 2) $(1 + i)^4$; 3) $(1 + i)^3$.

Б

4) $(2 + \sqrt{3}i)^2$; 5) $(1 + i)^8$; 6) $(2 + 5i)^3$.

В

7) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$; 8) $(1 - i)^{12}$; 9) $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^3$.

6. Розв'язати рівняння:

А

1) $x^2 - 12x + 45 = 0$; 2) $2x^2 - x + 3 = 0$.

Б

3) $x^2 + 6x + 18 = 0$;   4) $3x^2 + 2x + 27 = 0$.

В

5) $3x^2 + 7x + 5 = 0$;   6) $z^2 - 2iz - 5 = 0$.

7. Виконати додавання і віднімання комплексних чисел у геометричній формі:

А

1) $(2 + 3i) + (1 + 4i)$;   2) $(4 + 5i) - (2 - 3i)$.

Б

3) $(-4 + 2i) + (4 - 2i)$;   4) $(-4 + i) - (1 + 4i)$.

В

5) $(2+4i)+(3-5i)+(-1+6i)$;   6) $(-2+3i)-(-5+3i)$.

8. Знайти модулі і головні аргументи комплексних чисел:

А

1) $z = 1 + \sqrt{3}i$;   2) $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Б

3) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$;   4) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

В

5) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;   6) $z_1 + z_2$, де $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -3 + 2i$.

9. Подати у тригонометричній формі числа:

А

1) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$;   2) $z = 5i$;   3) $z = 2$.

Б

4) $z = \sqrt{3} - i$;   5) $z = -2i$;   6) $z = -3$.

В

7) $z=-1-\sqrt{3}i$; 8) $z=i$;

9) $z=1+\cos\dfrac{10\pi}{9}+i\sin\dfrac{10\pi}{9}$.

10. Подати в алгебраїчній формі комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

А

1) $z=4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$; 2) $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Б

3) $z=40\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

4) $z=2(\cos 0+i\sin 0)$.

В

5) $z=5\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)$;

6) $z=7(\cos\pi+i\sin\pi)$.

11. Виконати множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі:

А

1) $z_1=0,5(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)$;

$z_2=6(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)$;

2) $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

$z_2=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Б

3) $z_1=10(\cos 107^\circ+i\sin 107^\circ)$;

$z_2=13(\cos 42^\circ+i\sin 42^\circ)$;

4) $z_1=\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}$; $z_2=\cos\dfrac{13\pi}{12}+i\sin\dfrac{13\pi}{12}$.

B

5) $z_1 = 3\sqrt{2}(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)$;

$z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5^\circ + i\sin 5^\circ$;

6) $\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)}{i-1}$.

12. Піднести комплексні числа до степеня, користуючись формулою Муавра:

1) $(1+i)^{12}$;

2) $z = \left(\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

13. Знайти значення кореня з комплексного числа:

1) $\sqrt[4]{\omega}$, де $\omega = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$;

2) $\sqrt[3]{2-2i}$; 3) $\sqrt[4]{-4}$.

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

§ 1. Поняття множини. Операції над множинами

Поняття множини належить до первісних понять математики, якому не дається означення. Множину можна уявити собі як сукупність, зібрання деяких предметів, об'єднаних за довільною характеристичною ознакою. Наприклад, множина учнів класу, множина цифр десяткової нумерації (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), множина натуральних чисел, множина зернин у даному колосі, множина букв українського алфавіту, множина точок на прямій та ін.

Предмети, з яких складається множина, називаються її елементами і позначаються малими буквами латинського алфавіту. Наприклад, $a = 5$ — елемент множини цифр десяткової нумерації. Для позначення множин використовують великі букви латинського алфавіту або фігурні дужки, всередині яких записуються елементи множини. При цьому порядок запису елементів не має значення. Наприклад, множину цифр десяткової нумерації можна позначити буквою M (чи будь-якою великою буквою латинського алфавіту) або записати так $\{1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 7, 9, 0\}$.

Належність предмета даній множині позначається символом «$\in$», а неналежність — символом $\notin$ (інколи $\bar{\in}$). Наприклад, число $7 \in A$, де A — множина чисел першого десятка, а число $12 \notin A$.

Множини бувають скінченні і нескінченні. В скінченній множині міститься певна кількість елементів, тобто кількість елементів скінченної множини виражається натуральним числом. Наприклад, множина M цифр десяткової нумерації скінченна і містить десять елементів. У нескінченній множині — нескінченна кількість елементів. Наприклад, множина натуральних чисел, множина точок прямої — нескінченні множини.

Множина, в якій немає жодного елемента, називається порожньою і позначається символом $\varnothing$. Наприклад, множина точок перетину двох паралельних прямих — порожня множина.

Якщо множина B складається з деяких елементів даної множини A (і лише з них), то множина B називається **підмножиною** множини A. В такому разі співвідношення між множинами A і B позначається так: $B \subset A$. Читається "B міститься в A" або B — підмножина A. Якщо B може й дорівнювати A, то вживається символ $B \subseteq A$. Знак $\subseteq$ називається *знаком нестрогого включення*, а знак $\subset$ — *знаком строгого включення.*

Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини A, тобто $\varnothing \subseteq A$.

Саму множину A можна розглядати як підмножину A, тобто $A \subseteq A$.

Множину задають такими основними способами:

1) переліченням всіх її елементів;

2) описанням характеристичної властивості її елементів.

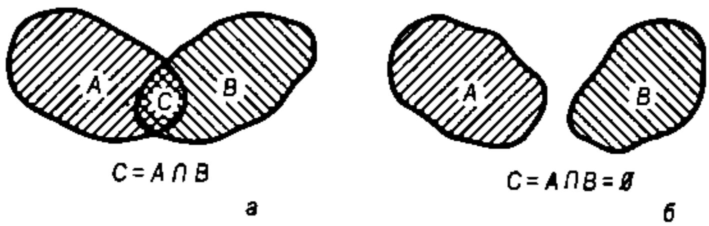
Наприклад, $B = \{\square, \triangle, \bigcirc\}$ — множина, задана переліченням елементів, X — множина коренів квадратного рівняння $x^2 = 25$. Вона задана вказівкою характеристичної властивості елементів — «бути коренем рівняння $x^2 = 25$». Цю саму множину можна задати і переліченням її елементів: $X = \{-5; 5\}$.

Дві множини називаються **рівними**, якщо вони складаються з тих самих елементів. Наприклад, множини коренів рівняння $x^2 = 25$ і $|x| = 5$ рівні. Справді, $X = \{-5; 5\}$ і $Y = \{-5; 5\}$, де Y — множина розв'язків рівняння $|X| = 5$. Отже, $X = Y$.

Над множинами виконуються певні операції (дії). Розглянемо тут три з них.

Переріз множин. *Перерізом множин A і B називається множина C, яка складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать кожній з даних множин A і B.*

П р и к л а д 1. Нехай A — множина всіх дільників числа 32, тобто $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, а B — множина всіх дільників числа 24, тобто $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Тоді перерізом множин A і B є множина $C = \{1, 2, 4, 8\}$, яка складається з спільних дільників чисел 32 і 24.



Мал. 176

Схематично переріз множин A і B можна зобразити за допомогою фігур так, як на малюнку 176. Символічно позначається так: $C = A \cap B$.

П р и к л а д 2. M — множина прямокутників, N — множина ромбів, тоді $P = M \cap N$ — множина квадратів.

Об'єднання множин. *Об'єднанням (або сумою) двох множин A і B називається така множина C, яка складається з усіх елементів множин A і B, і лише з них.*

Позначається $C = A \cup B$.

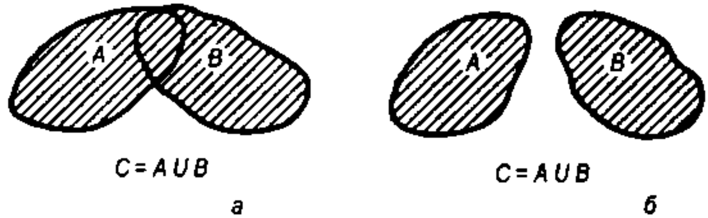
Якщо множини A і B мають спільні елементи, тобто $A \cup B \neq \varnothing$, то кожний з цих спільних елементів береться в множину C лише один раз.

П р и к л а д 3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, тоді $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

П р и к л а д 4. Q — множина раціональних чисел, I — множина ірраціональних чисел. Тоді множиною R всіх дійсних чисел буде об'єднання множин Q і I, тобто $R = Q \cup I$.

Схематично об'єднання множин A і B зображено на малюнку 177.

Операції над множинами широко використовуються в математиці, інших науках, на практиці. Наприклад, розв'язками системи рівнянь є переріз множин розв'язків кожного рівняння, а об'єднання їх є множиною розв'язків сукупності рівнянь.

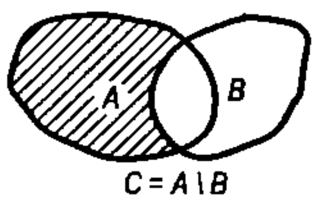


Мал. 177

Віднімання множин. Доповнення множини. *Різницею двох множин A і B називається така множина C, яка складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B.*

Позначається $C = A \backslash B$.

Схематично різницю двох множин A і B зображено на малюнку 178.



Мал. 178

Приклад 5.

1. $A = \{5, 6, 8, 12\}$, $B = \{5, 6\}$, тобто $B \subset A$. Тоді $C = A \backslash B = \{8, 12\}$.

2. $A = \{5, 6, 8, 12\}$, $B = \{8, 12, 1, 2\}$, тоді $C = A \backslash B = \{5, 6\}$.

3. $A = \{5, 6, 12\}$, $B = \{1, 2\}$, тоді $C = A \backslash B = \{5, 6, 12\}$.

4. $A = \{5, 6\}$, $B = \{5, 6, 12\}$, тобто $B \supset A$, тоді $C = A \backslash B = \emptyset$.

У випадку, коли $A \supseteq B$, то різниця $C = A \backslash B$ називається *доповненням* множини B відносно множини A і позначається $C_A B$.

§ 2. Сполуки без повторень

Під час розв'язування задач з різних галузей науки практики часто доводиться відповідати на запитання:

скількома способами можна виконати те, що вимагається? Наприклад, скількома способами можна скласти розклад уроків на день з 5 різних предметів, якщо в класі вивчається 10 предметів, або скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з чотирьох різних заданих цифр, не повторюючи їх, або скільки різних зв'язків існує між атомами і молекулами певної речовини, або скільки діагоналей має опуклий семикутник? Виявляється, що для подібних задач, які дістали назву **комбінаторних**, існують загальні методи розв'язування.

Розділ математики, який займається методами розв'язування комбінаторних задач, називається **комбінаторикою**.

Під час розв'язування комбінаторних задач доводиться розглядати скінченні множини, складені з елементів будь-якої природи, та їх підмножини. Залежно від умови задачі розглядаються скінченні множини, в яких істотним є або порядок елементів, або їх склад, або перше і друге одночасно. Такі скінченні множини (сполуки) дістали певну назву: *перестановки, розміщення, комбінації.*

Розглянемо кожний вид сполук.

Перестановки. Насамперед уведемо поняття *впорядкованої множини*. Для цього розглянемо дві задачі.

1) З тридцяти учнів класу треба обрати голову і секретаря класних зборів. Скількома способами це можна зробити?

2) З тих же тридцяти учнів слід виділити двох для чергування в шкільній їдальні. Скількома способами це можна зробити?

Обидві задачі комбінаторні. Проте вони різні за змістом умови. У другій задачі не має значення, в якому порядку будуть названі чергові, тоді як у першій задачі це істотно. Справді, з двох обраних учнів один може бути головою, другий — секретарем або навпаки.

Отже, під час розв'язування комбінаторних задач доводиться мати справу із скінченними множинами, для яких істотним є порядок елементів. Такі множини називають *впорядкованими.*

Вказати порядок розташування елементів в скінченній множині з n елементів означає поставити у відповідність кожному елементу даної множини певне натуральне число від 1 до n.

Відомі вам числові послідовності є впорядкованими множинами. Наприклад, множини $A = \{1; 2; 7\}$ і $B = \{2; 7; 1\}$ такі, що $A = B$, якщо вони не впорядковані множини. Якщо ж їх впорядкувати, то $A \neq B$.

Для позначення впорядкованих множин вживаються круглі дужки. Наприклад, $M = (3;\ a;\ 0)$, $N = (0;\ 3;\ a)$.

Очевидно, що тут $M \neq N$.

Кожну з цих двох впорядкованих множин називають **перестановкою** з трьох елементів.

Означення. ***Будь-яка впорядкована множина, яка складається з n елементів, називається перестановкою з n елементів.***

Отже, перестановки з n елементів відрізняються одна від одної лише порядком елементів.

Очевидно, що з елементів множини $A = \{1; 2; 7\}$ можна утворити шість перестановок: $(1; 2; 7)$, $(1; 7; 2)$, $(2; 1; 7)$, $(2; 7; 1)$, $(7; 1; 2)$, $(7; 2; 1)$.

Елементи цих перестановок утворюють шість різних тризначних чисел: 127; 172; 217; 271; 712; 721.

Число перестановок з трьох елементів позначається символом P_3; відповідно символом P_n позначається число перестановок з n елементів.

Вище ми встановили, що $P_3 = 6$. Виникає запитання, як знайти формулу для обчислення числа перестановок з n елементів?

Щоб знайти цю формулу, проведемо такі індуктивні міркування, тобто міркування від окремих випадків до загального.

Очевидно, що один елемент можна розмістити лише одним способом, тому $P_1 = 1$.

З двох елементів a і b можна утворити дві перестановки $(a; b)$ і $(b; a)$, тому $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

Вище було встановлено, що з трьох елементів можна утворити шість перестановок, тобто $P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

З чотирьох елементів a, b, c, d можна утворити 24 перестановки, якщо до кожної перестановки з трьох елементів a, b, c приєднати четвертий елемент d, поставивши його відповідно на перше, друге, третє і четверте місця.

Нижче наведено спосіб утворення перестановок з чотирьох елементів.

$$\frac{(a;b;c),(a;c;b),(b;a;c),(b;c;a),(c;a;b),(c;b;a).}{\begin{matrix}(d;a;b;c),(d;a;c;b),(d;b;a;c),(d;b;c;a).\\(d;c;a;b),(d;c;b;a)\end{matrix}}.$$

$(a;d;b;c), (a;d;c;b), (b;d;a;c), (b;d;c;a), (c;d;a;b), (c;d;b;a)$.

$(a;b;d;c), (a;c;d;b), (b;a;d;c), (b;c;d;a), (c;a;d;b), (c;b;d;a)$.

$(a;b;c;d), (a;c;b;d), (b;a;c;d), (b;c;a;d), (c;a;b;d), (c;b;a;d)$.

Отже, $P_4 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Напрошується висновок, що $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Добуток n послідовних натуральних чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \times (n-1) \cdot n$ скорочено позначають $n!$ (читається «n факторіал»). За означенням приймається, що $1! = 1$. Тоді

$$2! = 1 \cdot 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n! =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Таким чином, треба довести, що $P_n = n!$

Д о в е д е н н я (методом математичної індукції).

1. Якщо $n = 1$, маємо $P_1 = 1 = 1!$, тобто формула справджується.

2. Припустимо, що для $n = k$, де n і k — натуральні числа, рівність $P_k = k!$ справджується.

Доведемо, використовуючи припущення, що для $n = k + 1$ справджується рівність $P_{k+1} = (k+1)!$

Справді, перестановки з $(k+1)$ елементів утворюватимемо так само, як утворювали перестановки з чотирьох елементів. Використаємо при цьому припущення, що перестановки з k елементів уже утворені і їх число $P_k = k!$

У кожну таку перестановку з k елементів поставимо $(k+1)$-й елемент на 1-ше, 2-ге, 3-тє, ..., k-те, $(k+1)$-ше місце. Оскільки з однієї перестановки, що містить k елементів, можна утворити таким чином $(k+1)$ перестановку з $(k+1)$-го елемента, і враховуючи, що таких перестановок $k!$, то дістанемо всього $k!\,(k+1)$ перестановок з $(k+1)$-го елемента, тобто $P_{k+1} = k!\,(k+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) = (k+1)!$

3. На підставі принципу математичної індукції формула справджується для будь-якого натурального n.

Задача 1. Скільки семицифрових чисел можна утворити за допомогою семи різних цифр, відмінних від 0.

Розв'язання. Шукане число дорівнює числу перестановок з 7 різних елементів:

$$P_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Задача 2. Скількома способами можна розмістити 12 осіб за столом, біля якого поставлено 12 стільців?

Розв'язання. Число способів дорівнює: $P_{12} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 12 = 479\,001\,600$.

Цікаво, що коли 12 осіб за столом розміщати щохвилини протягом 11 год на добу, 365 днів на рік, з відпочинком на один день у високосні роки, то на це піде 1988 років і 140 днів!

Задача 3. Обчислити: а) $\dfrac{P_{10} - 9P_8}{P_9}$; б) $\dfrac{Pm}{P_{m-2}}$.

Розв'язання.

а) $$\frac{P_{10} - 9P_8}{P_9} = \frac{10! - 9 \cdot 8!}{9!} = \frac{9! \cdot 10 - 9!}{9!} = \frac{9!(10 - 1)}{9!} = 9;$$

б) $$\frac{Pm}{P_{m-2}} = \frac{m!}{(m-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)(m-1)m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)} = (m-1) \cdot m.$$

Розміщення. Розглянемо таку задачу: скількома способами можна скласти денний розклад з 5 різних уроків, якщо в класі вивчають 10 навчальних предметів?

Розв'язання. Щоб записати в розкладі перший урок, є 10 різних можливостей, бо кожний предмет можна поставити першим уроком. Другим уроком можна поставити будь-який з 9 предметів, що залишилися. Отже, загальна кількість способів, за якими можна поставити два перших уроки, становить $10 \cdot 9 = 90$.

Для третього уроку залишається 8 можливостей вибору предметів, бо два вже поставлено в розклад. Тому для розподілу трьох перших уроків кількість різних способів дорівнюватиме $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Для четвертого уроку залишається 7 можливостей вибору предметів, тому чотири уроки можна записати у розклад $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ різними способами.

П'ятим уроком можна поставити будь-який з 6 уроків, що залишилися. Тому п'ять уроків можна записати у розклад $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ різними способами.

У цій задачі з множини, що містить 10 елементів, доводилось утворювати впорядковані підмножини, що містять по одному, два, три, чотири, п'ять елементів.

Розглянемо ще одну задачу: дано чотири цифри $1, 3, 7, 9$. Утворити з них всі можливі двоцифрові числа.

Тут з множини, що містить чотири елементи, треба утворити впорядковані підмножини, що містять по два елементи. Наприклад, $13, 17, 19 \ldots$.

Упорядковані підмножини, які утворювались у двох розглянутих задачах, називають розміщеннями відповідно, наприклад з десяти елементів по п'ять у першій задачі і з чотирьох елементів по два — в другій.

Розглянемо загальний випадок.

Означення. *Будь-яка впорядкована підмножина з n елементів даної множини M, яка містить m елементів, де $n \leqslant m$, називається розміщенням з m елементів по n.*

Отже, розміщення відрізняються один від одного або елементами, або порядком елементів.

Зауваження. Очевидно, що коли $m = n$, матимемо перестановку з m елементів, тобто перестановка є окремим випадком розміщення за умови, що $m = n$.

Для практики важливо знайти формулу, за якою обчислюється число всіх можливих розміщень з m по n. Позначається A_m^n.

Під час розв'язування першої задачі з'ясували, що $A_{10}^1 = 10$, $A_{10}^2 = 10 \cdot 9$; $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8$; $A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$; $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Аналізуючи закономірність утворення чисел A_{10}^1, A_{10}^2, A_{10}^3, A_{10}^4, A_{10}^5, помічаємо, що:

1) кожне з них дорівнює добутку стількох послідовних натуральних чисел, скільки елементів у розміщенні (підмножині з 10 елементів);

2) на першому місці стоїть співмножник, що дорівнює кількості всіх елементів множини, з якої утворюються розміщення, а кожний наступний співмножник на одиницю менший від попереднього;

3) останній співмножник дорівнює різниці між числом всіх елементів, з яких утворюються розміщення, і числом, на одиницю меншим від кількості елементів у розміщенні.

Припускаємо, що формула має вигляд: $A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1)) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ (1).

Доведемо правильність цієї формули методом математичної індукції.

Доведення. 1. Перевіримо формулу для $n = 1$, $n = 2$. Нехай дано множину M, що складається з m елементів. Складемо розміщення з m елементів по одному. Очевидно їх число дорівнює числу елементів, тобто $A_m^1 = m$. Формула (1) справджується.

Щоб скласти розміщення з m елементів по два, слід до кожного розміщення з одного елемента приписати по одному з решти елементів. Оскільки для вибору другого елемента залишилось $m-1$ можливостей, то $A_m^2 = A_m^1 \cdot (m-1) = m(m-1)$.

Отже формула (1) справджується і для $n = 2$.

2. Припустимо, що формула (1) справджується для $n = k$ і на основі такого припущення доведемо, що вона виконується для $n = k+1$.

Справді, нехай виконується формула $A_m^k = m(m-1)\ldots(m-(k-1)) = m(m-1)\ldots(m-k+1)$. З одного розміщення по k елементів можна утворити стільки розміщень по $(k+1)$-му елементу, скільки різних елементів можна приєднати. Таких можливостей є $m-k$, бо k елементів уже використано. Оскільки всього розміщень по k елементів є A_m^k, то число розміщень по $(k+1)$-му елементу буде $A_m^{k+1} = A_m^k \cdot (m-k)$.

Розміщення по $(k+1)$-му елементу, утворені з різних розміщень по k елементів, неоднакові, оскільки вони відрізняються першими k елементами.

Використовуючи припущення, дістанемо $A_m^{k+1} = A_m^k(m-k) = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(m-k) = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(m-(k+1)+1)$.

Отже, для $n = k+1$ формула (1) справджується.

3. На підставі принципу математичної індукції формула (1) справджується для будь-якого натурального $n \leqslant m$.

Задача 4. Скільки різних музичних фраз можна скласти з 6 нот, якщо не допускати в одній фразі повторення звуків?

Розв'язання. Музичні фрази, про які йдеться, відрізняються одна від одної або нотами, або порядком їх у фразі. Отже, слід знайти число розміщень з 88 елементів по 6 (вважатимемо, що піаніно має 88 клавішів).

$$A_{88}^6 = 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 = 390\,190\,489\,920.$$

Задача 5. Скільки можна утворити різних трицифрових додатних цілих чисел у десятковій системі числення?

Розв'язання. З 10 цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ можна утворити A_{10}^3 трицифрових чисел, тобто $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \times 8 = 720$. Але з них слід виключити ті числа, які починаються з нуля. Таких чисел стільки, скільки можна утворити розміщень з 9 цифр по 2 (без нуля), тобто $A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$.

Отже, різних трицифрових чисел можна утворити $720 - 72 = 648$.

Задача 6. Скільки сигналів можна подати п'ятьма різними прапорцями, піднімаючи їх у будь-якій кількості і в довільному порядку?

Розв'язання. $A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 325$.

Комбінації. Розглянемо таку задачу: скількома способами можна призначити чотирьох вартових з тридцяти солдат?

Очевидно, що в цій задачі будь-які групи вартових можуть відрізнятися лише складом солдат у них. Порядок у групі не істотний. Отже, тут маємо справу з різними підмножинами з чотирьох елементів даної множини, яка складається з 30 елементів. Будь-яка з цих підмножин називається **к о м б і н а ц і є ю** з 30 елементів по 4.

О з н а ч е н н я. *Будь-яка підмножина з n елементів даної множини M, яка містить m елементів, називається комбінацією з m елементів по n.*

Число всіх можливих комбінацій з m елементів по n позначається символом C_m^n.

Виведемо формулу для обчислення C_m^n.

Спочатку утворимо всі підмножини множини $\{a, b, c\}$: $\varnothing$ — порожня множина, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Отже, $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$.

Усього комбінацій з трьох елементів буде $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.

Щоб вивести формулу для обчислення C_m^n, доведемо спочатку, що $A_m^n = C_m^n \cdot P_n$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $m = 3, n = 2$. Вище ми встановили, що з трьох букв можна утворити 3 комбінації по дві букви, тобто $C_3^2 = 3$. Кожну з цих комбінацій (підмножин) можна впорядкувати двома способами. Справді, $P_2 = 1 \cdot 2 = 2$. Усього дістанемо $3 \cdot 2 = 6$ впорядкованих підмножин. Раніше було встановлено, що $A_3^2 = 6$.

Отже, для розглянутого випадку ми встановили, що $A_3^2 = C_3^2 \cdot P_2$.

Доведення в загальному випадку виконується аналогічно. Щоб утворити впорядковані множини, які містять n елементів з даних m елементів, треба: 1) виділити які-небудь n елементів із даних m елементів, що можна зробити C_m^n способами; 2) виділені n елементів впорядкувати, це можна зробити P_n способами. Разом дістанемо $C_m^n \cdot P_n$ впорядкованих множин, тобто $A_m^n = C_m^n \cdot P_n$.

З отриманої формули матимемо $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{P_n}$.

Підставляючи в останню рівність вирази $A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ і $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$, дістанемо $C_m^n = \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n}$.

Останню формулу можна спростити. Для цього помножимо в ній чисельник і знаменник дробу на добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)$. Тоді

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)(m-(n-1))\ldots}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots} \times \frac{(m-2)(m-1)m}{m-n} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)} =$$

$$= \frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \qquad (1)$$

Отже, $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$.

З а у в а ж е н н я. Для $m = n$ у знаменнику дістанемо вираз 0! Приймемо за означенням, що $0! = 1$.

Доведемо чотири властивості комбінацій.

1. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Д о в е д е н н я. Застосуємо формулу до правої частини доводжуваної рівності. Дістанемо

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!(m-m+n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Оскільки праві частини рівності (1) і останньої рівності рівні, то рівні і ліві частини.

$$C_m^n = C_m^{m-n}. \qquad (2)$$

Ця властивість дає змогу спростити обчислення числа комбінацій у випадку, коли $n > \frac{1}{2}m$. Наприклад, $C_{20}^{18} = C_{20}^{20-18} = C_{20}^2 = \dfrac{20\cdot 19}{1\cdot 2} = 190$.

Звернемо увагу на те, що в доведеній формулі сума верхніх індексів зліва і справа дорівнює нижньому індексу.

2. $C_m^{n+1} = \dfrac{m-n}{n+1}\cdot C_m^n$.

Д о в е д е н н я. Застосуємо формулу (1) до лівої частини доводжуваної рівності: $C_m^{n+1} = \frac{m!}{(n+1)!(m-(n+1))!} =$

$$= \frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!} = \frac{m!(m-n)}{n!(n+1)\cdot(m-n)!} = \frac{m-n}{n+1}C_m^n.$$

Отже, $C_m^{n+1} = \frac{m-n}{n+1}C_m^n$. **(3)**

Доведена формула дає змогу послідовно обчислювати комбінації. Зокрема, $C_m^1 = m$; $C_m^2 = \frac{m-1}{2}C_m^1$; $C_m^3 = \frac{m-2}{3}C_m^2$; $C_m^4 = \frac{m-3}{4}C_m^3$; ....

3. $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

Д о в е д е н н я. Перетворимо ліву частину доводжуваної рівності за формулами (1) і (3).

Дістанемо $C_m^n + C_m^{n+1} = C_m^n + \frac{m-n}{n+1}C_m^n =$

$$= C_m^n\left(1 + \frac{m-n}{m+1}\right) = \frac{m!}{n!(m-n)!}\cdot\frac{n+1+m-n}{n+1} =$$

$$= \frac{(m+1)!}{(n+1)!(m-n)!} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Отже, $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$. **(4)**

4. $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^n = 2^m$. **(5)**

Вище було показано, що з трьох елементів можна утворити $8 = 2^3$ різних комбінацій, тобто, що $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3$.

Щоб довести цю властивість для множини з m елементів, достатньо довести теорему: число всіх підмножин множини A, яка складається з m елементів, дорівнює 2^m.

Д о в е д е н н я (методом математичної індукції).

1) Множина $\{a\}$, яка складається з одного елемента a, має дві підмножини: порожню $\varnothing$ і саму себе. Отже, для $m = 1$ теорема правильна, оскільки $2 = 2^1$.

2) Припустимо, що множина з $m = k$ елементів має 2^k підмножин. Доведемо, користуючись цим припущенням, що для $m = k+1$ теорема правильна, тобто, що множина, яка складається з $(k+1)$-го елемента, має 2^{k+1} підмножин.

Справді, якщо розглянути множину з $(k+1)$-го елемента

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\},$$

то будь-яку підмножину цієї множини можна дістати одним з двох способів:

а) Беруться всі підмножини множини $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ (їх за припущенням 2^k). Це будуть всі підмножини A, які не містять елемента a_{k+1}.

б) Беруться підмножини B підмножини A' і до них приєднується елемент a_{k+1}. Очевидно всіх таких підмножин теж буде 2^k.

Отже, всього підмножин множини A буде $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

3) На підставі принципу математичної індукції теорема правильна для будь-якого натурального m.

З а д а ч а 7. Скількома різними способами можна вибрати з 15 чоловік делегацію в складі 3 осіб.

Р о з в' я з а н н я. Різними вважатимемо ті делегації, які відрізняються хоча б однією особою. Отже, треба обчислити $C_{15}^3 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$

Тобто є 455 різних способів обрання зазначеної делегації.

З а д а ч а 8. На площині розташовано n точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій. Скільки різних прямих можна провести через ці точки?

Р о з в' я з а н н я. Оскільки через кожну пару точок можна провести лише одну пряму, то число всіх прямих дорівнює числу комбінацій з n по 2, тобто $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} =$

$$= \frac{n(n-1)}{2}.$$

Той самий результат можна дістати, розмірковуючи так: оскільки через кожну точку проходить пряма, якій належить одна з решти точок, то через кожну точку пройде $n-1$ прямих. А ставлячи у відповідність кожній точці $n-1$ прямих, ми тим самим кожну пряму порахуємо два рази (оскільки кожна пряма проходить через дві точки). Тому всіх проведених прямих буде $\frac{n(n-1)}{2}$.

П р и к л а д. Розв'язати рівняння $C_x^{13} = C_x^7$.

Використовуючи першу властивість (властивість індексів), дістанемо $13 + 7 = x$, звідки $x = 20$.

Трикутник Паскаля. Використовуючи формулу (4) і співвідношення $C_0^0 = C_m^0 = C_m^m = 1$, складемо повну таблицю чисел C_m^n:

Т а б л и ц я 15

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Ця таблиця, яка дістала назву т р и к у т н и к а П а с к а л я, має таку закономірність утворення: числа лівого стовпчика позначають номери рядка, числа верхнього рядка — номери стовпчиків. Решта чисел в таблиці — числа комбінацій. Наприклад, числа п'ятого рядка $1, 5, 10, 10, 5, 1$ означають $C_5^0, C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5$.

Кожний рядок починається з 1 і закінчується 1. Число C_m^n міститься на перетині m-го рядка і n-го стовпця. Наприклад, $C_7^5 = 21$. Якщо сьомий рядок написаний, то для написання восьмого рядка слід на першому місці записати 1, на другому — суму двох перших чисел сьомого рядка $1+7 = 8$, на третьому — суму двох наступних чисел сьомого рядка $7+21 = 28$ і так далі. Тут застосовується формула $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

Трикутник Паскаля має такі властивості:

1. Числа кожного рядка є C_m^n, де n набуває значення $0, 1, 2, \ldots, n$.

2. Сума чисел m-го рядка дорівнює 2^m, де m набуває значення $0, 1, 2, \ldots, m$.

3. Сума чисел будь-якого рядка в два рази більша від суми чисел попереднього рядка.

4. Числа, розміщені на однаковій відстані від кінців рядка, рівні між собою, бо $C_m^n = C_m^{m-n}$.

5. Для $m = 2k$ вони зростають до найбільшого члена з номером $k+1$. Для $m = 2k+1$ рядок містить два найбільших члени: k-й і $(k+1)$-й. Попередні члени збільшуються, а наступні зменшуються. Останнє випливає з формули (3).

Трикутник Паскаля часто записують у вигляді рівнобедреного трикутника.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

§ 3. Комбінаторні задачі

У комбінаторних задачах здебільшого доводиться використовувати формули різних видів сполук. Тому насамперед слід встановити, про які сполуки йдеться в задачі, а потім застосовувати потрібні формули.

Крім того, розв'язуючи комбінаторні задачі, слід враховувати такі два твердження:

1) Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а другий об'єкт B можна вибрати n способами, то вибір «або A, або B» можна здійснити $m + n$ способами.

2) Якщо об'єкт A можна вибрати m способами і якщо після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати n

способами, то вибір пари $(A; B)$ в указаному порядку можна виконати mn способами.

Задача 1. Скількома способами можна розподілити уроки в шести класах між трьома вчителями, якщо кожний вчитель викладатиме у двох класах?

Розв'язання. Перший учитель може вибрати два класи з шести C_6^2 різними способами. Після вибору першого вчителя другий може вибрати два класи з чотирьох, що залишилися, C_4^2 різними способами. Тоді два вчителі можуть вибрати по два класи $C_6^2 \cdot C_4^2$ різними способами. Якщо вони вже зробили вибір, то третій може взяти лише ті два класи, що залишилися. Тому шукане число способів дорівнює $C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90.$

Задача 2. Для відвідування театру закуплено $2n$ квитків в один ряд партеру. Скількома способами можна розподілити ці квитки між n чоловіками і n жінками, щоб два чоловіки або дві жінки не сиділи поруч.

Розв'язання. Занумеруємо числами $1, 2, 3, \ldots, 2n$ місця ряду. Якщо чоловіки сядуть на місця з непарними номерами, а жінки — на місця з парними номерами, то варіантів такого розміщення буде $n!$ Разом з тим чоловіки можуть сісти на місця з непарними номерами також $n!$ способами.

Отже, загальне число способів, які треба знайти в задачі, коли чоловіки займають місця з непарними номерами, а жінки — місця з парними номерами, є $n! \cdot n! = (n!)^2$.

Але чоловіків можна посадити на місця з парними номерами, а жінок — на місця з непарними номерами і провести аналогічні міркування. Звідси випливає, що загальною кількістю варіантів буде число $(n!)^2 + (n!)^2 = 2(n!)^2$.

Задача 3. На площині дано n точок, з яких m точок лежать на одній прямій; з решти точок ніякі три не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести через ці точки? Скільки існує різних трикутників з вершинами в цих точках?

Розв'язання. Якщо ніякі три точки не лежать на одній прямій, то існує $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ різних прямих, які сполучають ці n точок. З цих точок m точок визначали б

$C_m^2 = \dfrac{m(m-1)}{2}$ різних прямих, але всі вони зливаються в одну пряму, бо m точок за умовою лежать на одній прямій. Отже, існує $\dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{m(m-1)}{2} + 1$ різних прямих, що сполучають дані точки.

Міркуючи аналогічно, встановимо, що число різних трикутників дорівнює $C_n^3 - C_m^3$, бо C_m^3 трикутників вироджуються у відрізок.

§ 4. Біном Ньютона

Двочлен $a + b$ називають також біномом. Представимо послідовно у вигляді многочлена степені бінома з нульовим і натуральними показниками:

$(a+b)^0 = 1;$

$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b;$

$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2;$

$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3;$

$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b) = 1 \cdot a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1 \cdot ab^3 + 1 \cdot a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + 1 \cdot b^4;$

$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4.$

Неважко помітити, що коефіцієнти розкладу степенів бінома збігаються із відповідними рядками трикутника Паскаля.

Виникає припущення, що такий збіг виконується і для будь-якого натурального показника n в розкладі $(a+b)^n$.

Теорема. Коефіцієнти розкладу $(a+b)^n$ збігаються з n-м рядком трикутника Паскаля, тобто для будь-якого натурального показника n справджується рівність

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n. \qquad (1)$$

Доведення (методом математичної індукції).

1. Для $n = 1$ маємо $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$, тобто теорема справджується.

2. Припустимо, що для $n = k$ теорема правильна і на основі цього припущення доведемо, що вона правильна і для $n = k + 1$.

Справді, припустимо, що для $n = k$ правильна рівність

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^{m-1} a^{k-m+1} b^{m-1} +$$

$$+ C_k^m a^{k-m} b^m + C_k^{m+1} a^{k-m-1} b^{m+1} + \ldots +$$

$$+ C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k.$$

Тоді $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + \ldots + C_k^{m-1} a^{k-m+2} b^{m-1} + C_k^m a^{k-m+1} b^m + C_k^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{m-1} a^{k-m+1} b^m + C_k^m a^{k-m} b^{m+1} + C_k^{m+1} a^{k-m-1} b^{m+2} + \ldots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \ldots + (C_k^{m-1} + C_k^m) a^{k-m+1} b^m + (C_k^m + C_k^{m+1}) a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a b^k + C_k^k b^{k+1}$.

Враховуючи, що $C_k^0 = C_{k+1}^0 + C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$ і $C_k^{m-1} + C_k^m = C_{k+1}^m$, остаточно матимемо $(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 \times a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m + \ldots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}$.

Отже, теорема правильна і для $n = k + 1$.

3. На основі принципу математичної індукції теорема правильна для будь-якого натурального n.

Формула (1) дістала назву **формули бінома Ньютона** на честь видатного англійського фізика і математика Ісаака Ньютона.

Коефіцієнти правої частини формули бінома Ньютона називаються *біноміальними коефіцієнтами*.

Якщо $a = 1$ і $b = x$, то формула (1) дає $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$.

За формулою (1) можна швидко записувати розклад будь-якого натурального степеня бінома.

Приклад 1. Написати розклад степеня $(1-x)^8$. Тут $a = 1, b = -x$. Враховуємо, що знаки розкладу чергуватимуться. За допомогою восьмого рядка трикутника Паскаля дістанемо

$$(1-x)^8 = 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 +$$

$$+ 28x^6 - 8x^7 + x^8.$$

Розглянемо *властивості формули бінома Ньютона.*

1. Враховуємо, що в правій частині формули (1) міститься $n + 1$ членів, оскільки розклад включає всі степені b від 1 до n.

2. Позначимо k-й член розкладу через T_k. Врахуємо, що

$$T_1 = C_n^0 a^n b^0 = a^n, \quad T_2 = C_n^1 a^{n-1} b = na^{n-1}b, \ldots$$

$$\ldots, \quad T_k = C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}, \quad T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Отже,

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{2}$$

Формулу $(k + 1)$-го члена можна записати у вигляді

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} C_n^k a^{n-k} b^k, \tag{3}$$

підставивши замість C_n^k його значення за формулою числа комбінацій.

Формулу (2) і відповідно (3) називають *формулою загального члена розкладу степеня бінома.*

3. Показник степеня a послідовно зменшується на 1, а b — збільшується на 1. Внаслідок цього сума показників степенів a і b в кожному члені стала і дорівнює показнику степеня бінома n.

4. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу, рівні між собою (обгрунтуйте це самостійно, користуючись властивостями комбінацій).

5. Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n.

Для доведення цієї властивості достатньо покласти в формулі (1) $a = b = 1$.

6. Щоб дістати біноміальний коефіцієнт наступного члена, слід біноміальний коефіцієнт попереднього помножити на показник степеня a в цьому члені і розділити на число попередніх членів.

Справді, оскільки $C_n^{k+1} = \dfrac{C_n^k(n-k)}{k+1}$, то $T_{k+2} = C_n^k \cdot \dfrac{n-k}{k+1} a^{k+1} b^{n-k-1}$. Формула (2) дає змогу обчислювати будь-який член розкладу натурального степеня бінома.

Приклад 2. Знайти восьмий член розкладу $(x-a)^{12}$.

Розв'язання. Тут $(x-a)^{12} = (x+(-a))^{12}$.

За формулою (2) загального члена розкладу бінома маємо

$$T_8 = T_{7+1} = C_{12}^7 x^{12-7}(-a)^7 = -C_{12}^7 x^5 a^7 =$$

$$= -C_{12}^5 x^5 a^7 = -1584 a^7 x^5.$$

Приклад 3. У розкладі $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})^{12}$ знайти член, який містить після спрощення x у сьомому степені.

Розв'язання. За формулою (2)

$$T_{k+1} = C_{12}^k (\sqrt{x})^{12-k} \cdot (\sqrt[3]{x^2})^k = C_{12}^k (x^{\frac{1}{2}})^{12-k} \cdot (x^{\frac{2}{3}})^k =$$

$$= C_{12}^k x^{6-\frac{k}{2}} \cdot x^{\frac{2k}{3}} = C_{12}^k x^{6+\frac{k}{6}}.$$

За умовою задачі, $6 + \dfrac{k}{6} = 7$, звідки $k = 6$. Отже, шуканий член буде сьомий. Він дорівнює $T_{6+1} = C_{12}^6 x^7 =$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^7 = 132 x^7.$$

Зауваження. Слід розрізняти поняття біноміальний коефіцієнт члена розкладу і коефіцієнт того ж члена.

Наприклад, у розкладі
$(1-x)^8 = 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$
біноміальний коефіцієнт четвертого члена дорівнює $C_8^3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$, а його коефіцієнт дорівнює — 56.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Наведіть приклади множин.

2. Які бувають множини за кількістю елементів? Як вони позначаються?

3. Як позначаються належність і неналежність елемента певній множині?

4. Якими способами задаються множини? Навести приклади.

5. Які множини називаються рівними? Навести приклади рівних множин.

6. Яка множина називається підмножиною даної множини? Навести приклади і записати їх символічно.

7. Що називається перерізом двох множин? Навести приклад і записати його символічно.

8. Що називається об'єднанням двох множин? Навести приклад і записати його символічно.

9. Що називається різницею двох множин? Навести приклад і записати його символічно.

10. Що таке доповнення множини B відносно множини A? Навести приклад і записати його символічно.

11. Які задачі називають комбінаторними? Навести приклад.

12. Що називається перестановкою з n елементів? Навести приклад.

13. За якою формулою обчислюється число перестановок? Обчислити P_5.

14. Довести формулу числа перестановок.

15. Що називається розміщенням з m елементів по n? Навести приклад. Як записується символічно число розміщень з m по n?

16. За якою формулою обчислюється A_m^n? Навести приклад.

17. Довести формулу числа розміщень.

18. Що називається комбінацією з m елементів по n? Навести приклад. Як позначається символічно число комбінацій з m по n?

19. За якою формулою обчислюється C_m^n? Навести приклад.

20. Довести формулу числа комбінацій.

21. Які властивості мають комбінації?

22. Які твердження використовуються під час розв'язування комбінаторних задач?

23. Що таке формула бінома Ньютона?

24. Назвіть властивості бінома Ньютона.

25. Як знайти n-й член розкладу бінома Ньютона?

ВПРАВИ

А

1. Записати множини, перелічивши їх елементи:

а) додатні числа, кратні 7 і менші від 60;

б) розв'язки рівняння $x^2 - 3x - 10 = 0$.

2. Записати всі підмножини множини $M = \{5, 12, 6\}$.

3. Знайти об'єднання і переріз множин розв'язків рівнянь $x^2 - 3x + 2 = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

4. Знайти різниці $A \backslash B$ і $B \backslash A$, якщо $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{b, d, p, q, r\}$.

Б

5. Некай A — множина цілих чисел, що діляться на 4, B — множина цілих чисел, що діляться на 3. Які з чисел $9, 0, -24, -53, 128, 1\,242\,048$ входять у множину $A \cup AB$?

6. Нехай A — множина, що складається з 20 студентів, які потребують проїзних квитків на тролейбус, B — множина проїзних квитків на тролейбус. Чи $A = B$? Обгрунтувати відповідь.

7. Знайти суму множин: а) A—{парні числа}, {B— натуральні степені числа 2};

б) $M =$ {прості числа}, $P =$ { непарні числа}.

8. Знайти: а) переріз множин $M =$ {прості числа, менші від 40}, $P =$ {непарні числа, більші за 14}; б) різницю множин $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ і $L = \{2, 4, 6\}$.

В

9. Нехай $N =$ {натуральні числа}, $D =$ {додатні числа}, $P =$ {прості числа}, $S =$ {додатні непарні числа}. Чи правильне твердження: $P \subset (S \cap N \cup D)$?

10. Якщо $A \subset B \subset C$, то чи правильні твердження: а) $A \cup B \subset C$; б) $A \backslash C = B \backslash C$; в) $C \backslash B = C \backslash A$?

11. Із 100 студентів лише німецьку мову вивчають 18; німецьку, але не англійську — 23, німецьку і французьку — 8; німецьку — 26, французьку — 48, англійську і французьку — 8; ніякої мови не вивчають — 24. Скільки студентів вивчають англійську мову? Скільки студентів вивчають англійську і німецьку мови, але не французьку? Скільки студентів вивчають французьку мову в тому і лише тому випадку, якщо вони не вивчають англійську?

12. Якщо множина A містить n елементів, а множина B — m елементів, то в якому випадку множина $A \cup B$ буде містити $m + n$ елементів?

А

13. Обчислити: а) $\dfrac{P_8 - P_7}{7P_7}$; б) $\dfrac{P_{2m+1}}{P_{2m-1}}$.

14. Спростити: а) $\dfrac{10!}{7!}$; б) $\dfrac{(n+3)!}{n!}$.

15. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр $0, 1, 2, 3$, не повторюючи їх?

16. Скільки слід взяти елементів, щоб число всіх перестановок, утворюваних з них, дорівнювало 5040?

17. В одинадцятому класі 35 учнів. Вони обмінялись один з одним фотокартками. Скільки всього фотокарток було роздано?

18. Скільки різних прямих можна провести через 10 точок площини, з яких ніякі три не лежать на одній прямій?

19. За формулою бінома Ньютона знайти розклад степенів: а) $(3x + 4y)^6$; б) $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^5$.

20. У розкладі $\left(x^2 - \dfrac{3}{x^3}\right)^{15}$ обчислити член, який не містить x.

21. Обчислити $29^5 = (30 - 1)^5 = \ldots$.

Б

22. Спростити: а) $\dfrac{(2n)!}{(2n+1)!}$; б) $\dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!}$.

23. У речовій лотереї розігруються 5 предметів. Перший, хто підійшов до урни, виймає з неї 5 білетів. Яким числом способів він може їх вийняти, щоб три з них виявились виграшними, якщо в урні 100 білетів?

24. Збори, на яких були присутні 30 осіб, в тому числі дві жінки, обирали чотирьох співробітників для роботи на виборчій дільниці. Скільки може бути випадків, коли в число обраних увійдуть обидві жінки?

25. Шістнадцять екскурсантів розподілились на дві рівні групи для розшуку товариша, який заблукав. Серед них є лише 4, хто знайомий з місцевістю. Яким числом способів вони можуть розділитися так, щоб у кожну групу ввійшли дві особи, які знають місцевість?

26. Розв'язати рівняння $\dfrac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n}}{P_x} = 110$.

27. За формулою бінома Ньютона знайти розклад степенів: а) $(a-2b)^8$; б) $(\sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{3b})^5$.

28. У розкладі $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ знайти член, який містить x^3.

В

29. Довести, що $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$.

30. Будівельна організація виділила на допомогу підшефному дитячому будинку бригаду з 5 робітників. В організації працюють 20 робітників, у тому числі 5 мулярів, 4 теслярі і 2 штукатури. Яким числом способів можна укомплектувати бригаду, щоб вона складалась з робітників усіх цих спеціальностей по одному?

31. Скільки різних натуральних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожне число містить кожну з даних цифр не більше одного разу?

32. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+1} = 720. \end{cases}$$

33. Скількома різними способами можна посадити 6 гостей навколо круглого стола?

34. За формулою бінома Ньютона знайти розклад степенів: а) $(x^2 + 2y^2)^4$; б) $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})^6$.

35. У розкладі $\left(a\sqrt[3]{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^m$ знайти член, який після спрощення має a^6, а різниця коефіцієнтів третього і другого членів дорівнює 35.

36. Обчислити $99^5 = (100-1)^5$.

ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ

§ 1. Поняття про теорію імовірностей

Характерною особливістю математики, яку ви до цього часу вивчали в школі, є визначеність невідомих, що знаходились під час розв'язування різноманітних задач. Наприклад, величина V об'єму куба має певне значення, якщо відома довжина його ребра. Значення миттєвої швидкості визначається заданням функції $s = f(t)$, що виражає закон руху, і значенням моменту часу t, в який визначається миттєва швидкість. Зокрема, миттєва швидкість тіла, що вільно падає, у момент часу $t = 4$ с дорівнює значенню похідної функції $s = \frac{gt^2}{2}$, якщо $t = 4$ с.

Але в житті і трудовій діяльності доводиться мати справу з подіями реального світу, що залежать від обставин, які або невідомі, або не піддаються обліку. Наприклад, не можна передбачити, на який білет випаде виграш у майбутньому тиражі лотереї, скільки зерен дасть певний колос від посіяної зернини пшениці, скільки випускників середніх шкіл подадуть заяви для вступу до Українського державного університету ім. М. Драгоманова, чи будуть серед деталей, оброблених токарем за зміну, браковані і скільки.

Події такого характеру називають **в и п а д к о в и м и**. Теорія імовірностей займається вивченням випадкових подій.

У природі немає жодного фізичного явища, в якому б не мали місця елементи випадковості. Але в масових однорідних випадкових подіях, тобто таких, які можуть неодноразово повторюватися за однакових умов, незалежно від людини існують закономірності, які піддаються обліку.

Прикладами масових подій є серія пострілів одного стрільця з тієї самої гвинтівки, серійний випуск ламп електроламповим заводом, а масовими випадковими подіями є влучення або промах в серії пострілів, поява бракованих ламп у серійному їх випуску електроламповим заводом.

Разом з масовими випадковими подіями існують і одиничні випадкові події, наприклад падіння Тунгуського метеорита.

Теорія імовірностей вивчає лише масові випадкові події.

Розглянемо приклади, які підтверджують існування закономірностей в масових випадкових подіях.

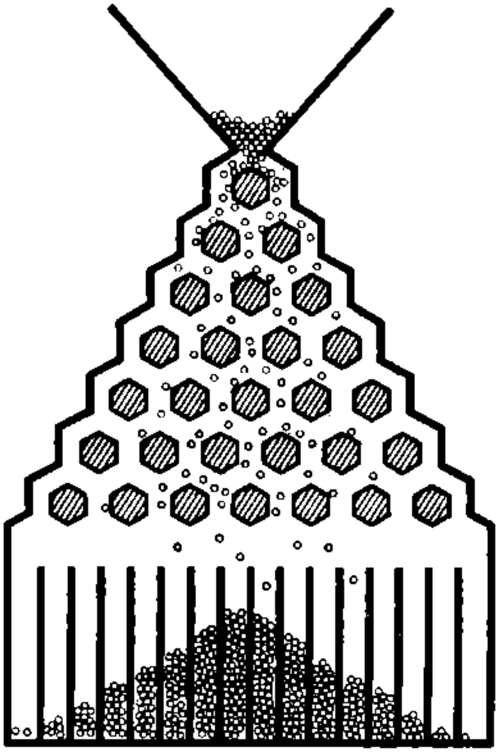
Таблиця 16

Кількість "гербів" в серіях $n = 100$ випробувань										Загальна кількість "гербів" в серіях по $n = 1000$ випробувань
54	46	53	55	46	54	41	48	51	53	501
48	46	40	53	49	49	48	54	53	45	485
43	52	58	51	51	50	52	50	53	49	509
58	60	54	55	50	48	47	57	52	55	536
48	51	51	49	44	52	50	46	53	41	485
49	50	45	52	52	48	47	47	47	51	488
45	47	41	49	49	59	60	55	53	50	500
53	52	46	44	44	51	48	51	46	51	597
45	47	46	47	47	48	59	57	45	48	496
47	41	51	51	51	52	55	93	41	48	484

Приклад 1. Якщо кинути монету один раз, то не можна передбачити, яким боком вона впаде — "гербом" чи "числом". Не можна побачити ніякої закономірності, якщо кинути монету 10 раз. Але ще в XVIII ст. відомий французький природознавець Бюффон кинув монету 4040 раз і при цьому було 2048 випадань "герба", англійський біолог Пірсон з 1200 кидань монети дістав 602 випадання

"герба", а з 24 000 мав 12 120 випадань. Учені помітили, що при багаторазовому киданні монети кількість випадань "герба" чи "числа" розподіляється приблизно порівну.

На таблиці 16 показано результати серії випробувань, при яких монети кидали 10 000 раз. При цьому розглядались окремо серії по $n = 100$ випробувань і в кожній серії фіксували кількість появи «гербів».



Мал. 179

П р и к л а д 2. Розподіл шроту на дошці Гальтона (мал. 179)

Якщо насипати шріт (кульки) у резервуар зверху, то кульки котяться по засіках і збираються внизу у гніздах. Зустрічаючи на своєму шляху шестикутники, кожна кулька може покотитись як вправо, так і вліво. Проте шріт розподіляється у гніздах не рівномірно, а має дзвіноподібний розподіл.

П р и к л а д 3. Учні одного класу провели такий дослід (проведіть його і ви). Кожен пише на аркуші паперу будь-які чотири слова. Після цього підраховує, скільки букв у кожному з написаних слів, і записує числа проти відповідного слова. Після цього кількість парних чисел записується у рамочку.

Запис може мати такий вигляд:

Математика — 10

квітка — 6

стіл — 4 $\boxed{3}$

літак — 5

Кожний з 20–35 учнів класу пише три такі записки. Після цього всі записки збираються і двоє учнів підраховують, не оголошуючи результатів, кількість записок, що мають у рамці числа 0, 1, 2, 3, 4.

У цей час вчитель біля дошки, незалежно від учнів, веде розрахунки, які дадуть можливість передбачити можливу кількість таких записок. При цьому проводяться такі міркування: поява в рамці кожної записки чисел 0, 1, 2, 3, 4 — події випадкові, масові.

В основу розрахунку покладемо, що слова з парною і непарною кількістю букв зустрічаються однаково часто. Крім того, врахуємо, що для одного слова можливі лише дві випадкові події.

I подія — слово має парне число букв (п);

II подія — слово має непарне число букв (н).

Для двох слів можливі чотири події (таблиця 17).

Таблиця 17

Перше слово	Друге слово	
	п	н
п	пп	пн
н	нп	нн

Таблиця 18

Перше і друге слова	Третє слово	
	п	н
пп	ппп	ппн
пн	пнп	пнн
нп	нпп	нпн
нн	ннп	ннн

Для трьох слів можливі вісім випадкових подій (таблиця 18).

Для чотирьох слів можливі шістнадцять випадкових подій (таблиця 19). Кожна з 16-ти подій можлива в $\frac{1}{16}$ частині всіх записок.

Таблиця 19

Перше, друге і третє слова	Четверте слово	
	п	н
ппп	пппп	пппн
ппн	ппнп	ппнн
пнп	пнпп	пнпн
пнн	пннп	пннн
нпп	нппп	нппн
нпн	нпнп	нпнн
ннп	ннпп	ннпн
ннн	нннп	нннн

З таблиці 19 можна зробити висновки щодо можливого розподілу записок.

1) Подія, що відповідає появі всіх чотирьох слів з парним числом букв, зустрічається в таблиці лише один раз. Тому всі чотири слова можуть мати парне число букв в $\frac{1}{16}$ частині всіх записок.

2) Подія, що відповідає появі трьох слів з парним числом букв, повторюється в таблиці чотири рази. Тому три слова можуть мати парне число букв у $\frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$ частині всіх записок.

3) Подія, що відповідає появі двох слів з парним числом букв, зустрічається шість разів. Тому два слова можуть мати парне число букв у $\frac{1}{16} \cdot 6 = \frac{3}{8}$ частині всіх записок.

4) Подія, що відповідає появі одного слова з парним числом букв, повторюється в таблиці чотири рази. Тому слід чекати появи одного слова з парним числом букв у $\frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$ частині всіх записок.

У класі, де проводився дослід, 26 учнів написали $26 \cdot 3 = 78$ записок. Тому розрахунки приводять до таких результатів:

з числом 4 в рамці має бути $78 \cdot \frac{1}{16} = 4\frac{7}{8}$, тобто 4 або 5 записок;

з числом 3 має бути $78 \cdot \frac{1}{4} = 19\frac{1}{2}$, тобто 19 або 20 записок;

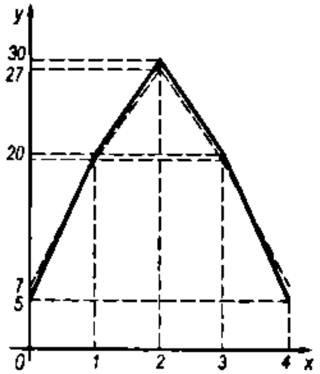
з числом 2 має бути $78 \cdot \frac{3}{8} = 29\frac{1}{4}$, тобто 29 або 30 записок;

з числом 1 має бути $78 \cdot \frac{1}{4} = 19\frac{1}{2}$, тобто 19 або 20 записок;

з числом 0 має бути $78 \cdot \frac{1}{16} = 4\frac{7}{8}$, тобто 4 або 5 записок.

Результати досліду, які дістали учні, підраховуючи наявну кількість записок, виявились такими: з числом 4 було 5 записок, з числом 3 — 20, з числом 2 — 27, з числом 1 — 19 записок, з числом 0 — всього 7 записок.

Наочне уявлення характеру розподілу записок дає графік, на якому вздовж осі Ox відкладаються числа $0, 1, 2, 3, 4$, а вздовж осі Oy — відповідна кількість записок. Якщо в одній системі координат побудувати графік розподілу записок за результатами досліду і результатами попереднього розрахунку, то графіки мало чим відрізнятимуться один від одного (мал. 180). До того ж форма графіків нагадує розподіл шроту на дошці Гальтона.



Мал. 180

Як бачимо, ще до проведення досліду виявилось можливим теоретичними міркуваннями передбачити його результати з невеликою похибкою. Таке передбачення є найціннішим у будь-якому науковому дослідженні і в теорії імовірностей зокрема.

Уміння передбачити хід досліду, в якому присутні елементи випадковості, дає можливість впливати на його результати. Прикладом такого передбачення може бути історія азартних ігор, які були поширені вже в XVII ст. Одна з них — гра в кості — полягала в тому, що в бокал опускали два чи три кубики, на гранях яких нанесено від однієї до шести точок. Кожний гравець по черзі викидав кості на стіл і підраховувалась сума очок, що випала на верхніх гранях у кожного при певній кількості кидань. Умови виграшу були різними. Наприклад, домовлялись, що всю ставку отримує той, у кого загальна сума очок раніше досягне певного числа.

Для визначення шансів на виграш важливо знати, як часто випадає та чи інша кількість очок. Досвідчені гравці помітили, що при великій кількості кидань двох костей найчастіше випадає сума очок, що дорівнює 7, а найрідше — 2 або 12. Враховуючи це, вони ставили такі умови гри, щоб забезпечити собі виграш, тобто впливали на хід випадкового процесу, тим самим обмежуючи вплив випадковості.

Наведені приклади показують, що в масових випадкових подіях існують закономірності.

Теорія імовірностей — математична наука, яка вивчає закономірності масових випадкових подій.

У наш час зросла роль теорії імовірностей у сучасному природознавстві. Виявляється, що відомі фізичні закони Гей-Люссака, Бойля — Маріотта, Паскаля, Авогадро та ін. не мають абсолютного характеру і лише в певному наближенні характеризують існуючі закономірності в природі. Для малих густин газу ці закони перестають діяти і на зміну їм приходять закономірності масових випадкових подій, які вивчає теорія імовірностей.

Сучасне природознавство широко користується теорією імовірностей як теоретичною основою для обробки результатів спостережень у фізиці, механіці, астрономії, геодезії, біології, обчислювальній математиці. Теорія імовірностей знаходить застосування в економіці, статистиці, військовій справі, при виявленні оптимальних каналів зв'язку, на транспорті, у виробництві. У зв'язку з широким розвитком підприємств, що випускають серійну продукцію, теорія імовірностей використовується не лише для бракування виробів, а й для організації виробництва (статистичний контроль у виробництві).

Теорію імовірностей використовують навіть у гуманітарних науках, зокрема в історичних дослідженнях, в археології для розшифрування написів мовами давно зниклих народів, у шифруванні і дешифруванні, у вивченні закономірностей літературної мови письменників і поетів. Той факт, що у свій час не було змоги дослідити закономірності мови методами теорії імовірностей, призвів до того, що телеграфна азбука Морзе потребує на 10–12 відсотків знаків більше для передачі українського тексту, ніж їх треба для оптимального кодування алфавіту.

§ 2. Основні поняття теорії імовірностей

Теорія імовірностей, як і будь-яка галузь математики, оперує певним колом понять. Більшості понять теорії імовірностей даються означення, та є й такі, які приймаються за первісні, неозначувані, як у геометрії точка, пряма, площина.

Первісним поняттям теорії імовірностей є поняття п о д і я. Під подією розуміють будь-яке явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається, причому абстрагуючись від конкретної природи самої події.

Будь-яка подія відбувається внаслідок в и п р о б у в а н н я (або досліду). Під випробуванням (або дослідом) розуміють ті умови, в результаті яких відбувається подія. Наприклад, підкидання монети — випробування, поява на ній «герба» — подія. Випуск білетів лотереї — випробування, поява виграшу на певний білет — подія.

Події позначають великими буквами латинського алфавіту $A, B, \dots$.

Теорія імовірностей вивчає масові випадкові події.

Випадковою подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування.

Приклади випробувань і відповідних їм випадкових подій:

Таблиця 20

Випробування	Випадкова подія
Підкидання грального кубика	Поява чотирьох очок на верхній грані
Гра в шахи	Виграш у суперника
Випуск ламп електроламповим заводом	Поява бракованої лампи

Наведіть самостійно аналогічні приклади випробувань і відповідних їм випадкових подій.

Масовими називають однорідні події, що спостерігаються за певних умов, які можуть бути відтворені необмежену кількість разів.

Наприклад, влучення або промах у серії пострілів, поява бракованих виробів при серійному їх випуску, поява "числа" під час підкидання монети.

Масовими вважають і ті події, для яких відповідні випробування не можна відтворити, але є можливість спостерігати аналогічні випробування у великій кількості. Наприклад, виклик телефонної станції абонентами, радіоактивний розпад атомів речовини.

Множина подій утворює повну групу подій, якщо внаслідок кожного випробування хоч одна з цих подій напевно відбудеться.

Приклади.

1. Поява 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок під час одного кидання гральної кості.

2. Виграш чи програш по даному лотерейному білету в певному тиражі.

3. Поява білої або чорної кулі під час виймання куль з урни, де є 2 білі і 3 чорні кулі.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються попарно несумісними в даному випробуванні, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися разом.

П р и к л а д и.

1. Влучення і промах під час одного пострілу. Тут маємо множину двох несумісних подій.

2. Поява 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок під час одного кидання грального кубика — приклад множини з шести несумісних подій.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можуть бути **р і в н о м о ж л и в и м и**. Поняття рівноможливих подій надалі використовуватиметься в означенні елементарних подій. Під рівноможливими розуміють такі події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

П р и к л а д и.

1. Потрапляння даної команди в I, II, III і IV групу під час жеребкування спортивних команд.

2. Поява 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок під час одного кидання гральної кості.

Рівноможливість подій пов'язана з тим, що умови випробування для кожної з них ідеалізуються, вважаються абсолютно однаковими. Наприклад, гральний кубик вважається кубом ідеальної форми, густина речовини, з якої він зроблений, — сталою, а центр ваги кубика міститься в геометричному центрі. Виключається спритність гравця у підкиданні кубика.

Багато теоретичних тверджень теорії імовірностей будується на розгляді множини подій, які мають всі три властивості: утворюють повну групу подій, є несумісними і рівноможливими. Події такої множини називаються **е л е м е н т а р н и м и**.

Наприклад, поява «герба» чи «числа» під час одного кидання монети, поява 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок під час одного кидання грального кубика — множини елементарних подій.

Наведіть самостійно приклади множин елементарних подій.

Найважливішими поняттями теорії імовірностей є поняття вірогідної і неможливої події.

В і р о г і д н о ю називається подія, яка внаслідок даного випробування обов'язково має відбутися, а **н е м о ж-**

л и в о ю називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Наприклад, поява хоч одного із шести очок під час одного кидання грального кубика — вірогідна подія, а поява дванадцяти очок у цьому ж випробуванні — неможлива подія.

Завдання 1. Проаналізуйте наведену таблицю і виділіть у ній вірогідні, неможливі і випадкові події.

Таблиця 21

№	Випробування	Подія
1	Нагрівання дроту	Довжина дроту збільшилась
2	Підкидання гральної кості	Випало два очки
3	Огляд поштової скриньки	Знайдено три листи
4	Створено низьку температуру	Вода перетворилась в лід
5	Виконано постріл	Влучено в ціль
6	Тіло охолоджувалось	Його об'єм збільшився

Завдання 2. Припустимо, що деякий прямокутник E розрізали на n рівних понумерованих прямокутників — карток l_i, де $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Після тасування навмання витягується одна з карток. Внаслідок такого випробування утворюється множина подій. Чи будуть події цієї множини елементарними?

Найважливішим поняттям теорії імовірностей як галузі математики є поняття імовірності випадкової події.

Імовірність — числова характеристика можливості появи випадкової події за певної умови, яка може бути відтворена необмежену кількість разів. Розглянемо поняття імовірності грунтовніше.

§ 3. Класична імовірність

Уведемо насамперед поняття імовірності для елементарних подій, тобто таких, які утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій.

Розглянемо такий дослід: на полиці розкладено 13 мікрокалькуляторів, з яких 3 зіпсовані. Дослід полягає в тому, що навмання беруть один мікрокалькулятор. Ми не можемо наперед сказати, яким буде взятий мікрокалькулятор — справним чи зіпсованим. Оскільки ми можемо вибрати лише один будь-який з приладів, то поява справного чи зіпсованого — випадкові події, які утворюють повну групу з 13 несумісних рівноможливих подій.

З цих 13 елементарних подій появі справного прилада сприяють 10 подій, а появі зіпсованого — 3 події.

Нехай A — подія, що полягає у виборі справного мікрокалькулятора, а B — зіпсованого. Тоді числа $\frac{10}{13}$ і $\frac{3}{13}$ характеризують можливість здійснення відповідно події A чи B. Ці числа називають імовірностями подій A і B і позначають: $P(A) = \frac{10}{13}$, $P(B) = \frac{3}{13}$.

О з н а ч е н н я. *Імовірністю випадкової події називається відношення кількості подій, які сприяють цій події, до кількості всіх рівноможливих несумісних подій, які утворюють повну групу подій під час певного випробування.*

Позначають $P(A) = \frac{m}{n}$, де n — загальна кількість рівноможливих і несумісних подій, які утворюють повну групу, m — число елементарних подій, які сприяють події A.

Введене означення є означенням класичної імовірності.

Отже, імовірність — це числова характеристика степеня можливості появи якої-небудь випадкової події за тих чи інших певних умов, які можуть повторюватися необмежену кількість разів.

Формулу $P(A) = \frac{m}{n}$ можна проілюструвати **наочно** (мал. 181).

Символ $P(A)$ походить від латинського слова *probabilitas*, що означає імовірність.

Якщо порівнювати події за можливістю їх появи, то імовірність вірогідної події U природно прийняти за 1, тобто $P(U) = \frac{m}{n} = 1$, бо для вірогідної події $m = n$.

Мал. 181

Оскільки для неможливих подій число m елементарних подій, що сприяють їм, дорівнює нулю, то імовірність неможливої події V дорівнює 0, тобто $P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$.

Якщо A — випадкова подія, тобто така, що може відбутися або не відбутися, то імовірність її задовольняє нерівність

$$0 < P(A) < 1.$$

Імовірність будь-якої події B задовольняє умову

$$0 \leqslant P(B) \leqslant 1.$$

Означення імовірності випадкової події використовується для безпосереднього обчислення імовірностей.

Задача 1. З урни, в якій 4 білих, 3 чорних і 7 червоних куль, виймають одну кулю. Яка імовірність того, що вона буде білою або чорною?

Розв'язання. Нехай A — подія, що полягає в появі білої або чорної кулі. У цій задачі всього куль (випадків) $n = 14$, а подій, які сприяють події A, $m = 7$.

Отже, імовірність події A дорівнює $P(A) = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

Задача 2. Яка імовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде число очок, що ділиться на 3?

Розв'язання. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що випало число очок, кратне 3. Всього може бути $n = 6$ випадків (випадуть 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок). З них два сприяють події A (коли випаде 3 і 6 очок). Отже, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

§ 4. Використання формул комбінаторики для обчислення імовірностей подій

Безпосередній підрахунок імовірностей подій значно спрощується, якщо для попереднього обчислення m і n використати формули комбінаторики. При цьому правильність розв'язування задачі залежить від уміння визначити вид сполук, що утворюються сукупністю подій, про які йдеться в умові задачі. Наведемо приклади розв'язування таких задач.

Задача 1. З 16 учнів, серед яких 4 дівчини, на вечір зустрічі без вибору запрошують трьох учнів. Яка імовірність того, що серед запрошених буде одна дівчина?

Розв'язання. Нехай A — подія, імовірність якої шукається. Для визначення всіх елементарних подій слід знати, скільки різних груп по 3 учні з 16 можна утворити. Тут маємо справу з числом комбінацій з 16 елементів по 3, тобто $n = C_{16}^3$. Щоб підрахувати кількість подій, які сприяють події A, міркуємо так: одну дівчину з чотирьох можна вибрати C_4^1 способами, а два інших учні мають бути хлопцями. Двох хлопців з 12 можна вибрати C_{12}^2 різними способами. Оскільки треба запросити 1 дівчину і 2 хлопців, то всього таких груп буде $C_4^1 \cdot C_{12}^2$, тобто $m = C_4^1 \cdot C_{12}^2$.

Отже, $P(A) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_{12}^2}{C_{16}^3} = \dfrac{4 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14} = \dfrac{33}{70}$.

Задача 2. У серії з N виробів M бракованих. Із партії навмання вибирають a виробів. Яка імовірність того, що серед цих a виробів буде b бракованих?

Розв'язання. Спочатку визначимо скільки всього груп по a виробів можна утворити з N виробів. Очевидно, що $n = C_N^a$. Для визначення m міркуємо так.

З M бракованих виробів можна вибрати b бракованих C_M^b способами. У виборі має бути b бракованих і $a - b$ небракованих, а всього в серії небракованих виробів $N - M$, тому з $N - M$ небракованих виробів можна вибрати $a - b$ виробів C_{N-M}^{a-b} способами. Тоді події A, імовірність якої треба знайти, сприятиме $C_M^b \cdot C_{N-M}^{a-b}$ подій.

Отже, $P(A) = \dfrac{C_M^b \cdot C_{N-M}^{a-b}}{C_N^a}$.

З а д а ч а 3. Кожну букву, що входить у слово "рахувати", виписано на окрему картку. Яка імовірність того, що після ретельного перемішування і виймання трьох карток дістанемо слово "рух"?

Р о з в' я з а н н я. В підмножинах, які можна скласти з восьми букв по три, нас цікавлять букви і їх черговість. Отже, $n = A_8^3$. З цих підмножин лише одна сприяє появі слова "рух". Тому $m = 1$. Шукана імовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_8^3} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{336}$.

З а д а ч а 4. Що імовірніше: виграти у рівносильного суперника 3 партії з 4 чи 5 партій з 8?

Р о з в' я з а н н я. Позначимо першу подію A, а другу — B. Загальну кількість усіх можливих результатів з чотирьох партій дістанемо, якщо комбінуватимемо виграш чи програш у першій партії з виграшем чи програшем у другій, третій і четвертій партіях. Отже, $n = 2^4 = 16$. Ці результати однаково можливі. Сприятливими подіями будуть ті, при яких перший виграє у трьох випадках з чотирьох, тобто $m = C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$. Тому $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

У випадку восьми партій $n = 2^8 = 256$, $m = C_8^5 = 56$. Тому $P(B) = \frac{56}{256} = \frac{7}{32} < \frac{1}{4}$.

Таким чином, виграти три партії з чотирьох імовірніше, ніж п'ять з восьми.

Наведемо тут історичну задачу, з якої видно, як при безпосередньому обчисленні імовірностей важливо враховувати умову, щоб усі події в задачі були рівноможливими.

З а д а ч а 5. П а р а д о к с д е М е р е. Друг Блеза Паскаля, кавалер де Мере, пристрасний гравець в кості, помітив, що при багаторазовому киданні трьох костей сума очок, яка дорівнює 11, випадає частіше, ніж сума очок, що дорівнює 12, хоч, на думку де Мере, обидві комбінації очок повинні мати однакову імовірність. При цьому де Мере міркував так: 11 очок можна дістати шістьма різними способами (6 — 4 — 1, 6 — 3 — 2, 5 — 5 — 1, 5 — 4 — 2, 5 — 3 — 3, 4 — 4 — 3) і так само шістьма різними способами можна дістати 12 очок (6 — 5 — 1, 6 — 4 — 2, 6 — 3 — 3, 5 — 5 — 2, 5 — 4 — 3, 4 — 4 — 4).

На помилку де Мере вказав Блез Паскаль. Слід враховувати не лише очки, які випадають, а й ту обставину, на яких саме костях вони випадають.

Справді, занумеруємо кості і виписуватимемо очки в тій послідовності, в якій вони випадають. Тоді комбінація 6 — 4 — 1 здійсниться тоді, коли матимемо один з шести результатів (6 — 4 — 1, 6 — 1 — 4, 4 — 6 — 1, 4 — 1 — 6, 1 — 6 — 4, 1 — 4 — 6), а комбінація 4 — 4 — 4 здійсниться лише в одному результаті (4 — 4 — 4).

У цьому випробуванні всього $n = 816$ однаково можливих результатів. Появі суми очок 11 сприяє 27 результатів, а появі суми очок 12 сприяє 25 результатів. Цим і пояснюється помічена де Мере тенденція до частішої появи в сумі 11 очок.

§ 5. Теорема додавання імовірностей несумісних подій

У теорії імовірностей розрізняють прості і складені події. Наприклад, під час кидання двох костей у сумі випало 2 очки. Це *проста* подія.

Подія називається *складеною*, якщо поява її залежить від появи інших, простих подій. Наприклад, під час кидання двох гральних кубиків у сумі випало 10 очок. Ця подія є складеною, бо вона може складатися з трьох простих подій:

1) на першому кубику випало 4, на другому — 6 очок;

2) на першому і на другому кубику випало по 5 очок;

3) на першому кубику випало 6, а на другому — 4 очки.

Обчислювати імовірності складених подій за формулою $P(A) = \frac{m}{n}$ буває важко, а інколи навіть неможливо. Їх імовірності обчислюють через імовірності простих подій, з яких складаються складені. Таке обчислення спирається на застосування теорем додавання і множення несумісних однаково можливих подій, які утворюють повну групу, тобто елементарних подій. Теореми додавання і множення доведені для елементарних подій, а для інших, які не належать до елементарних, ці теореми приймаються без доведення, тобто постулюються.

Введемо спочатку поняття про суму подій. Це поняття аналогічне поняттю суми чисел, або суми векторів, в тому розумінні, що має ті самі властивості (сполучний і переставний закони). Проте додавання подій — це не дія, а специфічна для теорії імовірностей операція, аналогічна до додавання множин.

Означення. ***Сумою подій A і B називається подія C, яка полягає у здійсненні під час одиничного випробування або події A, або події B, або обох разом.***

Суму двох подій позначають $C = A+B$, або $C = A\cup B$.

Геометрично суму подій можна зобразити так, як на малюнку 182.

Мал. 182

Приклад. Подія A — влучення в ціль з першого пострілу, подія B — влучення з другого пострілу. Тоді $C = A + B$ — подія, яка означає влучення в ціль взагалі (не має значення з якого — першого, другого або обох пострілів).

Суму подій A і B, як і суму множин, називають об'єднанням.

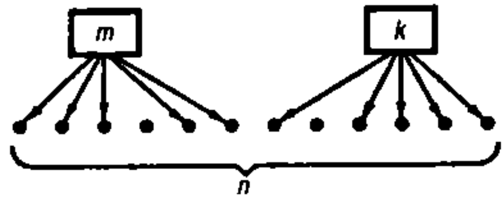
Враховуючи означення суми двох подій і поняття несумісних подій, зауважимо, що сумою C двох несумісних подій A і B є подія, яка полягає в здійсненні або події A, або події B. Одночасна поява подій A і B виключена.

Теорема. Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1)$$

Доведення. Нехай в результаті деякого випробування відбувається n елементарних подій. Зобразимо ці події n точками (мал. 183). Нехай з усіх n подій події A сприяють m подій, а події B — k подій. Тоді імовірність події A є $P(A) = \frac{m}{n}$, а події B є $P(B) = \frac{k}{n}$. Оскільки події A і

B несумісні, то немає подій, які б одночасно сприяли обом подіям A і B.



Мал. 183

Очевидно, що події $A + B$ сприяють $m + k$ подій, тому $P(A + B) = \frac{m+k}{n}$. Підставляючи значення $P(A), P(B), P(A + B)$ у рівність (1), дістанемо тотожність, що і доводить теорему.

Методом математичної індукції можна довести, що теорема виконується для суми будь-якої скінченної кількості попарно несумісних подій, тобто що

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Покажемо застосування теореми додавання для обчислення імовірностей складних подій.

З а д а ч а. В урні лежать 4 чорних, 7 червоних, 9 зелених і 11 синіх кульок. Звідти вийняли одну кульку. Визначити імовірність появи кольорової кульки (не чорної).

Р о з в' я з а н н я. Нехай подія A — поява кольорової кульки, A_1 — поява чорної, A_2 — поява червоної, A_3 — поява зеленої, A_4 — поява синьої кульки. Тоді подію A можна виразити як суму несумісних подій A_2, A_3, A_4, тобто $A = A_2 + A_3 + A_4$.

За теоремою додавання, дістанемо

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_1),$$

або

$$P(A) = \frac{7}{31} + \frac{9}{31} + \frac{11}{31} = \frac{27}{31}.$$

З а д а ч а. У лотереї 1000 білетів, з них на один білет припадає виграш 500 грн., на 10 білетів — виграш по 100 грн., на 50 білетів — виграш по 20 грн., на 100 білетів —

виграш по 5 грн. Решта білетів невиграшна. Знайти імовірність виграшу на один білет не менш як 200 грн.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо події:

A — виграш не менш як 20 грн.,

A_1 — виграш 20 грн.,

A_2 — виграш 100 грн.,

A_3 — виграш 500 грн.

Подія A виражається через суму трьох несумісних подій A_1, A_2, A_3, тобто $A = A_1 + A_2 + A_3$.

За теоремою додавання, дістанемо

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3),$$

або

$$P(A) = 0,050 + 0,010 + 0,001 = 0,061.$$

Зверніть увагу на те, що теорему додавання застосовують до розв'язування тих задач, в яких йдеться про появу або події A_1, або події A_2, ..., або події A_n.

З теореми додавання випливають два наслідки.

Наслідок 1. Сума імовірностей несумісних подій, що утворюють повну групу, дорівнює 1.

Справді, нехай дано n попарно несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, що утворюють повну групу. За означенням повної групи, можна стверджувати, що відбудеться хоча б одна з n подій. Тому сума $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ даних подій є подія вірогідна. Відомо, що імовірність вірогідної події дорівнює 1. Отже,

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1.$$

Оскільки за умовою дані події несумісні, то до них можна застосувати теорему додавання.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

П р и к л а д. Поява 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок під час одного кидання грального кубика є сукупність шести несумісних подій, які утворюють повну групу. При цьому $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = \frac{1}{6}$. Тому

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Перш ніж формулювати другий наслідок з теореми додавання, введемо означення протилежних подій.

О з н а ч е н н я. *Дві події називаються протилежними, якщо одна і лише одна з них обов'язково здійсниться в даному випробуванні.*

Наприклад, влучення і промах під час одного пострілу, безвідмовна робота всіх елементів технічної системи і вихід з ладу одного з них.

Наведіть самостійно приклади протилежних подій.

Якщо A — деяка подія, то протилежна їй позначається $\overline{A}$.

Події A і $\overline{A}$ утворюють повну групу несумісних подій.

Наслідок 2. Сума імовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Цей наслідок безпосередньо випливає з першого наслідку теореми додавання і властивості протилежних подій утворювати повну групу несумісних подій.

У задачах на обчислення імовірностей інколи зручно обчислювати шукану імовірність події A через імовірність протилежної події за формулою

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

З а д а ч а. Для виготовлення деталі придатні валики з діаметром 11,99 – 12,20 мм. Автомат виготовляє 1% валиків діаметром, меншим ніж 11,99 мм, 97% валиків діаметром 11,99 – 12,20 мм і 2% — діаметром, більшим, ніж 12,20 мм. Яка імовірність того, що навмання взятий з виробленої партії валик буде непридатний для виготовлення деталі?

Р о з в' я з а н н я. Нехай A — подія, імовірність якої треба визначити, A_1 — взятий валик діаметром меншим, ніж 1,99 мм, A_2 — взятий валик діаметром більшим, ніж 12,20 мм. Тоді

$$A = A_1 + A_2,\ P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0,01 + 0,02 = 0,03.$$

Шукану імовірність можна знайти інакше. А саме: якщо $\overline{A}$ — подія, яка полягає в тому, що навмання взятий валик придатний, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,97 = 0,03.$$

§ 6. Теорема множення імовірностей незалежних подій

Розглянемо спочатку задачу.

Задача. Два стрільці здійснюють одночасно постріл в одну ціль. Імовірність влучання в ціль для першого стрільця 0,8, для другого 0,7. Знайти імовірність влучання в ціль.

Розв'язання. Припустимо, що здійснюється 100 подвійних пострілів. Перший стрілець влучить у ціль близько 80, а не влучить — близько 20 раз. Оскільки другий стрілець із 100 пострілів влучає 70 раз, тобто 7 раз з 10 пострілів, то з тих 20 пострілів, з яких перший не влучить в ціль, другий влучить в ціль 14 раз. Отже, під час 100 подвійних пострілів буде біля $80 + 14 = 94$ влучань у ціль. Тому імовірність влучання в ціль дорівнює

$$P(A) = \frac{94}{100} = 0,94.$$

Цю задачу можна розв'язати інакше, якщо застосувати теорему множення. Але насамперед введемо означення добутку двох (або кількох) подій.

Означення. *Добутком двох подій A і B називається подія C, що полягає у здійсненні під час одиничного випробування і події A, і події B.*

Добуток двох подій позначають $C = AB$, або $C = A \cap B$. Геометрично добуток двох подій, як і двох множин, зображається так, як на малюнку 184.

Для n подій відповідно вживається позначення $A = A_1A_2 \dots A_n$, або $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

Приклад. A_1 — промах під час першого пострілу, A_2 — промах під час другого пострілу, A_3 — промах під час третього пострілу. Тоді $A = A_1A_2A_3$ — подія, яка полягає в тому, що в мішень не буде жодного влучення.

Введемо означення незалежних подій.

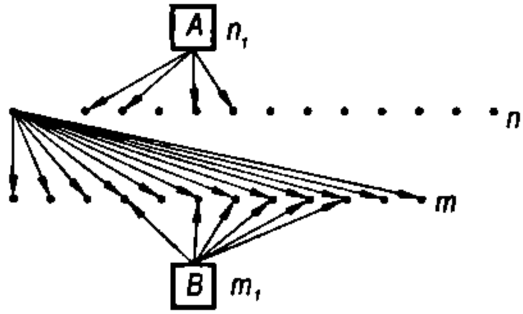
О з н а ч е н н я. *Подія A називається незалежною від події B, якщо імовірність події A не залежить від того, відбулась чи ні подія B.*

П р и к л а д и.

1. Кидають два гральних кубики. Нехай A — поява шести очок на першому кубику, B — поява трьох очок на другому кубику. Імовірність події A не залежить від того, відбулась чи не відбулась подія B. Те саме можна сказати про імовірність події B відносно події A. Тут події A і B — незалежні.

2. В урні 5 білих і 3 чорних кульки. Дві особи виймають з урни по одній кульці. Розглядаються події: A — поява білої кульки у першої особи, B — поява білої кульки у другої особи. Імовірність події A до того, як відбулась подія B, дорівнює $\frac{5}{8}$. Якщо подія B відбулась, то імовірність події A дорівнюватиме $\frac{4}{7}$. Отже, імовірність події A залежить від здійснення події B. Ті самі міркування можна провести щодо імовірності події B відносно події A.

Мал. 184



Мал. 185

Події A і B — залежні одна від одної.

Теорема множення встановлює зв'язок між імовірністю добутку двох незалежних подій та імовірностями цих подій.

•Теорема. Імовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку імовірностей цих подій, тобто

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Нехай n — число елементарних подій, які як сприяють, так і не сприяють події A. Зобразимо їх точками на площині (мал. 185). Припустимо, що серед них n_1 подій сприяють події A. Нехай m — число елементарних подій, які як сприяють, так і не сприяють події B. Серед них m_1 подій сприяють події B.

Підрахуємо загальну кількість подій, коли може появитись подія AB і кількість елементарних подій, які сприяють появі події AB.

Із схеми (див. мал. 185) видно, що загальна кількість елементарних подій, при яких може появитись подія AB, дорівнює mn, а кількість подій, які сприяють події AB, є $n_1 m_1$. Але тоді

$$P(A) = \frac{n_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_1}{m},$$

$$P(AB) = \frac{n_1 m_1}{nm} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m}.$$

Підставляючи значення $P(AB), P(A)$ і $P(B)$ у рівність (1), дістанемо тотожність. Що і доводить справедливість теореми.

Застосуємо доведену теорему до розв'язування задач.

Задача 1. Завод виготовляє 95% стандартних виробів, причому з них 86% першого сорту. Знайти імовірність того, що виріб, виготовлений на цьому заводі, виявиться першого сорту.

Розв'язання. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що взятий виріб стандартний, B — виріб першого сорту, C — виріб, виготовлений на цьому заводі, виявився першого сорту. Тоді $C = AB$.

Оскільки події A і B незалежні, то можна застосовувати теорему множення для обчислення імовірності події C.

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,95 \cdot 0,86 \approx 0,82.$$

Задача 2. Імовірність отримати брак під час першої операції обробки деталі дорівнює 1%, під час другої — 2%, під час третьої — 3%. Знайти імовірність виготовлення небракованої деталі, якщо контроль здійснюється після трьох операцій обробки за умови незалежності виготовлення бракованої деталі під час кожної операції.

Розв'язання. Введемо позначення: A_1 — виготовлення бракованої деталі під час 1-шої операції, A_2 — виготоблення бракованої деталі під час 2-гої операції, A_3 —

виготовлення бракованої деталі під час 3-тьої операції, A — виготовлення небракованої деталі після трьох операцій обробки.

За умовою, $P(A_1)=0,01$, $P(A_2)=0,02$, $P(A_3)=0,03$.

Подію A можна виразити через події $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ як добуток цих незалежних подій: $P(A) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$.

Застосовуючи теорему множення, дістанемо

$$P(A) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) =$$

$$= (1-P(A_1))(1-P(A_2))(1-P(A_3)) =$$

$$= 0,99\cdot 0,98\cdot 0,97 = 0,941094 \approx 0,94.$$

Задача 3 (див. задачу про подвійний постріл на с. 508). Розв'яжемо тепер цю задачу за допомогою теореми множення.

Розв'язання. Нехай A — подія, яка полягає у влучанні в ціль першого стрільця, B — у влучанні в ціль другого. Тоді $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,7$. Нехай C — влучання в ціль. Очевидно, що $C = A+B$, але застосовувати тут теорему додавання не можна, бо за умовою події A і B сумісні, хоч і незалежні.

Імовірність події C можна знайти через імовірність протилежної події $\overline{C}$. Подія $\overline{C}$ — жодний стрілець не влучить в ціль. Вона здійсниться, коли перший стрілець не влучить в ціль (подія $\overline{A}$) і другий стрілець не влучить в ціль (подія $\overline{B}$). Отже, $\overline{C} = \overline{A}\overline{B}$. Оскільки події $\overline{A}$ і $\overline{B}$ — незалежні, то можна застосувати теорему множення:

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = (1-P(A))\cdot(1-P(B)) =$$

$$= (1-0,8)(1-0,7) = 0,2\cdot 0,3 = 0,06. \text{ Звідси}$$

$$P(C) = 1-P(\overline{C}) = 1-0,06 = 0,94.$$

§ 7. Імовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій

Під час розв'язування задачі іноді доводиться визначити імовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, імовірність яких відома. У цих випадках зручно користуватися такою теоремою:

Теорема. Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — взаємно незалежні, то імовірність здійснення принаймні однієї з них може бути виражена через імовірність цих подій за формулою

$$P(A) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \ldots (1 - P(A_n)).$$

Доведення. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тоді, за означенням суми,

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Нехай $\overline{A}$ — подія, протилежна A. Тоді $\overline{A}$ полягає в тому, що не здійсниться жодна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Очевидно, що $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$, причому події $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_n$ теж незалежні.

За теоремою множення,

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Оскільки $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_n) =$$

$$= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \ldots (1 - P(A_n)),$$

що й треба було довести.

Наслідок. Якщо $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n)$, то $P(A) = 1 - (1 - p)^n$.

Застосуємо теорему множення та її наслідок до розв'язування задач.

Задача 1. Виготовляється деталь у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Деталь вважається якісною, якщо довжина кожного з її ребер має відхилення від заданих розмірів не більше як на 0,01 мм. Імовірність відхилень, які перебільшують 0,01 мм, становить за довжиною $P_1 = 0,08$, за шириною $P_2 = 0,12$, за висотою $P_3 = 0,10$.

Знайти імовірність непридатності деталі.

Розв'язання. $P = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3) = 1 - (1 - 0,08)(1 - 0,12)(1 - 0,10) \approx 0,27$.

З а д а ч а 2. Імовірність виготовлення бракованого генератора для автомобільного двигуна становить 0,0003. Визначити: 1) ймовірність того, що у партії з 200 генераторів виявиться хоча б один бракований; 2) зі скількох генераторів має складатись партія, щоб ймовірність наявності в ній хоча б одного бракованого була не більша як 0,01.

Р о з в' я з а н н я. 1) Використаємо наслідок з доведеної теореми:

$$P(A) = 1 - (1 - P)^n.$$

За умовою, $n = 200$, $P = 0{,}0003$, A — подія, яка полягає в тому, що в партії з 200 генераторів виявиться хоча б один бракований.

$$P(A) = 1 - (1 - 0{,}0003)^{200} = 1 - 0{,}9997^{200} \approx 0{,}045.$$

$$2)\ 0{,}01 \geqslant 1 - (1 - 0{,}0003)^n;\ \ 0{,}01 \geqslant 1 - 0{,}9997^n;$$

$$0{,}9997^n \geqslant 0{,}099;\ \ n \lg 0{,}9997 \leqslant \lg 0{,}99;\ \ n \leqslant \frac{\lg 0{,}99}{\lg 0{,}9997};$$

$$n \leqslant \frac{\bar{1}{,}9956}{\bar{1}{,}9999};\ \ n \leqslant \frac{0{,}0044}{0{,}0001};\ \ n \leqslant 44.$$

Отже, партія має складатись не більше як з 44 генераторів.

Теореми додавання і множення дають змогу простіше визначити шукану імовірність події, якщо безпосередній підрахунок усіх однаково можливих і сприятливих подій або складний, або неможливий.

Починаючи розв'язувати задачу на обчислення імовірностей складених подій, насамперед слід позначити події, імовірність яких треба обчислити і події, імовірності яких відомі за умовою задачі. Потім доцільно перевірити, чи можна подію, імовірність якої шукається, подати у вигляді суми або добутку подій, імовірності яких відомі чи легко знайти. Якщо це можливо, і події несумісні у випадку суми, і залежні, у випадку добутку, то шукану імовірність обчислюють за допомогою теореми додавання або множення.

Якщо таке обчислення виконати не можна, то слід спробувати знайти шукану імовірність через імовірність подій, протилежних даним.

Найчастіше в практиці доводиться одночасно використовувати теорему додавання і множення. При цьому подію, імовірність якої шукається, представляють у вигляді суми кількох несумісних подій, а кожну з них — у вигляді добутку незалежних подій.

Для пояснення такого способу розв'язування повернемось знову до задачі про подвійний постріл.

З а д а ч а 3. Два стрільці стріляють незалежно один від одного в ту саму ціль. Імовірність влучання для першого стрільця дорівнює 0,8, а для другого — 0,7. Визначити імовірність влучання в ціль.

Р о з в' я з а н н я. Нехай A — влучання в ціль першого стрільця, B — влучання другого, C — влучання в ціль.

Подію C можна представити у вигляді суми трьох несумісних подій: $C = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$, де $A\overline{B}$ — подія, яка полягає в тому, що перший стрілець влучив в ціль, а другий промахнувся, $\overline{A}B$ — другий влучив в ціль, а перший промахнувся, AB — обидва влучили в ціль.

Кожний з доданків суми є добутком двох незалежних подій, а тому для обчислення їх імовірностей можна застосувати теорему множення, а для обчислення імовірності події C — теорему додавання:

$$P(C) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(B) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,7 = 0,94.$$

З а д а ч а 4. У змаганнях між спортивними товариствами A і B беруть участь по три команди. Якщо перша команда товариства A гратиме з першою командою товариства B, друга — з другою, а третя — з третьою, то імовірність виграшу команд товариства A буде відповідно така: 0,8; 0,4; 0,4. Для перемоги треба виграти не менше, ніж два матчі з трьох (нічиїх не буває). Перемога якого товариства імовірніша?

Р о з в' я з а н н я. Позначимо через M подію, яка полягає в тому, що виграють команди товариства A, A_1 — виграє перша команда товариства A проти першої B, A_2 —

друга проти другої, A_3 — третя проти третьої B. Подію M можна записати як суму добутків незалежних подій:

$$M = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3.$$

Застосовуючи теорему додавання для чотирьох несумісних подій і теорему множення для трьох незалежних подій кожного добутку, дістанемо:

$$P(M) = P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) +$$

$$+ P(\overline{A}_1A_2A_3) = 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,6 +$$

$$+ 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,544 > \frac{1}{2}.$$

§ 8. Незалежні випробування. Схема Бернуллі

У практичному застосуванні теорії ймовірностей трапляються задачі, в яких одне й те саме випробування (або аналогічні до нього) повторюється неодноразово. При цьому всі випробування є взаємно незалежними.

О з н а ч е н н я. *Взаємно незалежними називаються такі випробування, в яких імовірність результату кожного з них не залежить від того, які результати має чи матиме решта випробувань.*

Наприклад, кілька послідовних виймань кульок з урни, де є 5 білих і 7 чорних кульок, є незалежними випробуваннями за умови, що вийняту кульку щоразу повертають в урну і кульки перемішують. Якщо кульки не повертають, то ці випробування залежні. Для незалежних випробувань імовірність деякої події A в усіх випробуваннях однакова. Наприклад, імовірність появи білої кульки є $\frac{5}{12}$ у всіх вийманнях, якщо вийняту кульку знов повертають в урну.

Очевидно, що внаслідок незалежних випробувань відбуваються незалежні події.

Коли проводять серію незалежних випробувань, то практичне значення має не результат кожного окремого випробування, а загальна кількість появи серед всіх випробувань події A, яка нас цікавить. Наприклад, у серії пострілів нас цікавить не результат кожного окремого пострілу, а загальна кількість влучань.

Розв'яжемо таку задачу.

Задача 1. Виконується три незалежних постріли в мішень, імовірність влучення в яку $P = 0,8$. Знайти імовірність того, що під час цих трьох пострілів буде два влучання.

Розв'язання. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що в мішень буде два влучання і A_1, A_2, A_3 — влучання відповідно під час першого, другого і третього пострілів. Подію A можна представити у вигляді суми трьох несумісних подій:

$$A = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3,$$

де $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ — промахи відповідно під час першого, другого і третього пострілів, а кожний з доданків є добутком трьох незалежних подій.

Застосовуючи теореми додавання і множення, дістанемо:

$$P(A) = pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp.$$

Якщо позначити $q = 1 - P$, то $P(A) = 3p^2 q$, тобто $P(A) = 3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,384$.

Узагальнення розв'язування задач такого виду називають *схемою Бернуллі*, або *схемою повернутої кульки*, бо будь-яку задачу, яка розв'язується за цією схемою, можна розглядати як задачу про багаторазове виймання кульки з наступним поверненням її в урну.

Задача 2. Відбувається n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може настати чи не настати. Імовірність здійснення події A в кожному випробуванні однакова і дорівнює p, а імовірність нездійснення події A є $q = 1 - p$.

Знайти імовірність $P_{m,n}$ того, що подія A настане в цих n випробуваннях m разів.

Розв'язання. Нехай B_m — подія, яка полягає в тому, що подія A настане в n випробуваннях m разів.

Подію B_m можна представити як суму добутків незалежних подій, кожна з яких складатиметься з m появ події і $n-m$ непояв цієї події, тобто з m подій A і $n-m$ подій $\overline{A}$ з різними індексами, що визначають черговість випробування. Тобто $B_m = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m\overline{A}_{m+1}\ldots\overline{A}_n + A_1\overline{A}_2A_3\ldots\overline{A}_{n-1}A_n + \ldots + \overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{n-m}A_{n-m+1}\ldots A_n$.

Кількість доданків цієї суми дорівнюватиме C_n^m, тобто кількості способів, якими можна з n випробувань вибрати m, в яких відбудеться подія A. Оскільки B_m є сумою несумісних подій, кожний доданок якої — добуток незалежних подій, то, застосовуючи теореми додавання і множення, дістанемо:

$$P_{m,n} = \underbrace{p^mq^{n-m} + p^mq^{n-m} + \ldots + p^mq^{n-m}}_{C_n^m} =$$

$$= C_n^mp^mq^{n-m}.$$

Отже, якщо виконується n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p, то імовірність того, що подія A настане m разів визначається за формулою

$$P_{m,n} = C_n^mp^mq^{n-m}.$$

Ця формула називається **формулою Бернуллі**.

Оскільки права частина формули Бернуллі є членом розкладу бінома $(p+q)^n$, то розподіл імовірностей за цією формулою називається *біноміальним розподілом*.

Відомо, що $C_n^m = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{m(m-1)\ldots2\cdot1}$,

або

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

тоді формула Бернуллі матиме вигляд

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^mq^{n-m}.$$

Застосуємо формулу Бернуллі до обчислення імовірностей.

Задача 3. З урни, в якій 3 білі і 2 чорні кульки, п'ять разів виймають по одній кульці і кульки повертають в урну перед наступним випробуванням. Знайти імовірність того, що в цих випробуваннях білу кульку виймають три рази в будь-якій послідовності.

Р о з в ' я з а н н я. Імовірність появи білої кульки в цих п'яти незалежних випробуваннях однакова і дорівнює $p = \frac{3}{5}$, а імовірність непояви — $q = \frac{2}{5}$.

За формулою Бернуллі

$$P_{3,5} = C_5^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3^3 \cdot 2^2}{5^5} = \frac{216}{625}.$$

З а д а ч а 4. Телефонна станція обслуговує $n = 100$ абонентів, які користуються телефоном однаково часто і протягом однієї години відбувається $k = 200$ розмов із середньою тривалістю розмови $t = \frac{1}{40}$ год. Яка ймовірність одночасової розмови трьох ($m = 3$) абонентів?

Р о з в ' я з а н н я. Загальна тривалість усіх розмов дорівнює $kt = 200 \cdot \frac{1}{40} = 5$ (год). Середнє навантаження за годину для кожного з $n = 100$ з'єднань буде $\frac{kt}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ (год). Це означає, що кожний абонент протягом години говорить в середньому $\frac{1}{20}$ год = 3 хв.

Отже, 3 хв є мірою часу, яка сприяє розмові одного абонента. Звідси імовірність того, що абонент розмовляє в даний момент, є $p = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$, а імовірність протилежної події — $q = 1 - p = \frac{19}{20}$.

Імовірність одночасної розмови в даний момент трьох абонентів знаходимо за формулою Бернуллі: $P_{3,100} = C_{100}^3\left(\frac{1}{20}\right)^3 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{97}$.

У загальному вигляді $p = \frac{kt}{n}$, $q = 1 - \frac{kt}{n}$, а імовірність одночасної розмови абонентів дорівнює

$$P_{m,n} = C_n^m\left(\frac{kt}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{kt}{n}\right)^{n-m}.$$

З а д а ч а 5. Внаслідок багаторічних спостережень помічено, що з 1000 новонароджених у середньому 515 хлопчиків і 485 дівчаток.

Знайти імовірність того, що в сім'ї, де шестеро дітей, не більш як дві дівчинки.

Р о з в' я з а н н я. Для здійснення події A, ймовірність якої ми хочемо знайти, потрібно, щоб в сім'ї було або 0, або одна, або дві дівчинки. Отже, $A = A_0 + A_1 + A_2$, де A_0 — в сім'ї немає дівчаток, A_1 — в сім'ї одна дівчинка, A_2 — в сім'ї дві дівчинки. Ці події несумісні.

За теоремою додавання $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + +P(A_2)$. Для кожної дитини імовірність того, що це хлопчик — $p = 0,515$, а імовірність того, що це дівчинка — $q = 1 - p = 0,485$. Імовірність події A_0 (всі шість хлопчиків) знайдемо за теоремою множення $P(A_0) = (0,515)^6 \approx \approx 0,018$, або за формулою Бернуллі $P(A_0) = C_6^0 \cdot 0,485^0 \times \times 0,515^6 \approx 0,018$.

Імовірність подій A_1 і A_2 обчислимо за формулою Бернуллі:

$$P(A_1) = C_6^1 \cdot 0,485 \cdot 0,515^5 = 6 \cdot 0,485 \cdot 0,515^5 \approx 0,105;$$

$$P(A_2) = C_6^2 \cdot 0,485^2 \cdot 0,515^4 = 15 \cdot 0,485^2 \cdot 0,515^4 \approx 0,247.$$

Отже, $P(A) \approx 0,018 + 0,105 + 0,247 = 0,370$.

§ 9. Поняття про статистичну імовірність. Закон великих чисел

Класична імовірність має обмежену область застосувань, оскільки далеко не завжди в реальних умовах можна виділити рівноможливі випадки в скінченній кількості. Наприклад, спостерігаючи за космічними частинками, дослідники зацікавились, яка імовірність потрапляння на певну ділянку земної поверхні за період 5 хв не більше від трьох космічних частинок? Як у даному прикладі визначити рівноможливі випадки?

Другий аналогічний приклад. Нехай нас цікавить імовірність того, що під певним навантаженням діод здатний працювати більше 10 тисяч годин? Як тут визначити рівноможливі випадки?

У таких задачах використовується статистичне означення імовірності.

Щоб увести це поняття, повернемось до прикладу підкидання гральної кості, яка має однакову густину, є кубом і підкидається навмання. Імовірність появи шестірки на її грані дорівнює $\frac{1}{6}$.

Припустимо, що ми провели n підкидань і шестірка випала m разів. Відношення $\frac{m}{n}$ назвемо статистичною частотою появи шестірки під час проведення серії таких випробувань. Може трапитись, що в n підкиданнях шестірка з'явиться m_1 разів. Статистична частота при цьому $p_1 = \frac{m_1}{n}$.

Під час підкидання кості $n+1$ разів шестірка може випасти m_2 рази. Статистична частота при цьому дорівнює $p_2 = \frac{m_2}{n+1}$ і т. д.

Під час підкидання кості N разів шестірка може випасти m_N разів, статистична частота при цьому дорівнює $p_N = \frac{m_N}{N}$.

Виконавши такі випробування, можна помітити, що для статистичної частоти характерна властивість із збільшенням кількості підкидань наближатися до числа $\frac{1}{6}$, тобто прямувати до імовірності $p = \frac{1}{6}$.

Якщо підкидати неправильно гральний кубик (із зміщенням від геометричного центра ваги), то статистичні частоти появи шестірки так само мають властивість групуватись навколо певного числа p при збільшенні кількості випробувань. Але це число нам невідоме, бо гральний кубик неправильний і для кожного кубика воно буде своє.

Прийнято вважати це невідоме число p статистичною імовірністю появи шестірки під час підкидання грального кубика.

Статистичне означення імовірності залежить від проведення випробувань. Наприклад, у випадку з визначенням імовірності роботи діода більше 10 тисяч годин проводять таке випробування: на стенд ставлять 1 тисячу діодів які виготовлені в тих самих умовах і з тієї самої партії матеріалів. Якщо після 10 тисяч годин роботи вийде з ладу 100 діодів, то статистична частота появи діодів (подія A), здатних пробробити 10 тисяч годин, дорівнюватиме $\frac{900}{1000} = 0,9$. Для великої кількості випробувань можна вважати, що імовірність події A буде близька до статистичної частоти.

Після розглянутих прикладів введемо означення статистичної імовірності.

О з н а ч е н н я. *Імовірністю події А називається невідоме число р, навколо якого зосереджується значення статистичної частоти здійснення події А при зростанні числа випробувань.*

Поняття статистичної імовірності широко використовується в практиці: біології, медицині, інженерній справі, економіці та інших галузях.

Припущення про існування імовірності події, яка нас цікавить, є гіпотезою, що в кожному випадку вимагає спеціальної перевірки. Далеко не кожна подія з неоднозначним результатом (за незмінних умов випробування) має певну імовірність.

Якщо позначити статистичну частоту символом $P_N\{A\}$, де $P_N\{A\} = \frac{m_N}{N}$, то $P_N\{A\} \approx P(A)$, де $P(A)$ — імовірність події A.

Індекс N ставиться спеціально, щоб підкреслити залежність статистичної частоти від кількості випробувань.

Ця наближена рівність, яка виражає властивість стійкості статистичних частот, багаторазово перевірена експериментально і підтверджена практичною діяльністю, є однією з найважливіших закономірностей масових випадкових подій. Математичне формулювання цієї закономірності вперше дав швейцарський математик Якоб Бернуллі у вигляді теореми.

Теорема. Якщо в ряді випробувань імовірність деякої події залишається для кожного випробування сталою, то з достовірністю можна стверджувати, що при досить великій кількості випробувань статистична частота цієї події відрізнятиметься як завгодно мало від її імовірності.

Теорема Бернуллі є простішою формою так званого «закону великих чисел», одного з найважливіших законів теорії імовірностей.

У теорії імовірностей велике значення має розв'язування питання про те, наскільки частота може відхилятися від імовірності. Таке відхилення вкаже на похибку, яка допускається, якщо прийняти частоту за імовірність.

На можливості визначення величини відхилення частоти від імовірності грунтується практичне застосування теорії імовірностей в економіці, метеорології, медицині, біології, астрономії, теорії стрільби та багатьох інших галузях науки і практики.

Теорему Бернуллі вперше було опубліковано в 1713 році. На доведення цієї «золотої теореми», як він її називав, було витрачено 20 років життя вченого. Доведення Я. Бернуллі грунтувалось на розгляді поведінки біноміальних членів $C_n^m p^m q^{n-m}$ і займало 12 сторінок тексту.

Надзвичайно коротке і строге доведення цієї теореми дав у 1845 р. П. Л. Чебишов.

У 1837 р. французький математик Пуассон довів теорему, яка узагальнює теорему Бернуллі на випадок, коли імовірність події, що розглядається, змінюється в разі повторення випробувань.

Щоб зрозуміти практичне значення наближеної рівності $P_N\{A\} \approx P(A)$, розглянемо таку задачу.

З а д а ч а. З 1000 довільно вибраних деталей приблизно 4 браковані. Скільки бракованих деталей приблизно буде серед 2400 деталей?

Р о з в' я з а н н я. Позначимо через A подію — навмання взята деталь бракована. Тоді статистична частота дорівнюватиме

$$P_N\{A\} = \frac{4}{1000} = 0,004.$$

Якщо серед 2400 деталей виявиться x бракованих, то імовірність події A дорівнюватиме $P(A) = \frac{x}{2400}$.

Оскільки $P_N\{A\} \approx P(A)$, то $\frac{x}{2400} \approx 0,004$, звідси $x \approx 10$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Чим займається теорія імовірностей як математична наука?

2. Навести приклади випадкових подій, масових випадкових подій.

3. Які приклади підтверджують існування закономірностей у масових випадкових подіях?

4. Як виникла теорія імовірностей? Де вона застосовується?

5. Які поняття теорії імовірностей приймаються за первісні неозначувані поняття?

6. Яка подія називається випадковою?

7. Які випадкові події називаються масовими? Навести приклади.

8. Які події називаються попарно несумісними? Навести приклади.

9. Які сукупності подій утворюють повну групу? Навести приклади.

10. Навести приклади однаково можливих подій.

11. Які події називаються елементарними? Навести приклади.

12. Сформулюйте класичне означення імовірності події? Між якими числами вона міститься?

13. Чому дорівнює імовірність вірогідної події?

14. Чому дорівнює імовірність неможливої події?

15. Яка подія називається складною? Наведіть приклади.

16. Що називається сумою подій? Наведіть приклади.

17. Сформулюйте теорему додавання імовірностей подій і наслідки з неї.

18. Які події називаються протилежними? Наведіть приклади.

19. Що називається добутком подій? Наведіть приклади.

20. Сформулюйте теорему множення імовірностей незалежних подій.

21. Як обчислити ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій?

22. Які випробування називаються взаємно незалежними? Наведіть приклади.

23. Записати формулу Бернуллі. До розв'язування яких задач її застосовують?

24. Що називається статистичною частотою події?

25. Сформулюйте статистичне означення імовірності.

26. Сформулюйте теорему Бернуллі.

ВПРАВИ

А

1. На загальноміському святі присутні 20 учнів з однієї школи, 25 — з другої і 30 — з третьої. Яка імовірність того, що учень, з яким ви заговорите, навчається в другій школі?

2. Телефонна лінія, що з'єднує два пункти A і B, які розташовані один від одного на відстані 2 км, обірвалась у невідомому місці. Яка імовірність, що обрив знаходиться не далі ніж за 450 м від пункту A?

3. На кожній з п'яти карток написана одна з букв Т, М, Р, О, Ш. Картки перемішують і розкладають в ряд. Яка імовірність того, що утвориться слово "шторм"?

4. З 15 білетів, занумерованих числами від 1 до 15, навмання вибирають один. Яка імовірність того, що номер взятого білета є число, яке не ділиться ні на 2, ні на 3?

5. Беруть навмання кісточку доміно. Вона виявляється не дублем. Знайти імовірність того, що іншу, також взяту навмання кісточку доміно можна прикласти до першої.

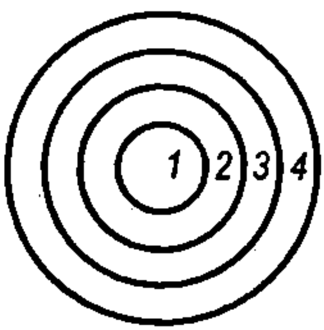
6. Маємо 8 білетів, занумерованих числами від 1 до 8. Назвемо події A_1 — виймання білета 1, A_2 — виймання білета 2, ... A_8 — виймання білета 8. Що означає подія $B = A_3 + A_4 + A_5 + A_6$?

7. Під час стрільби в мішень стрілець має можливість влучити в одну з чотирьох зон (мал. 186). Нехай імовірність влучення в першу зону — 0,24, у другу — 0,17, у третю — 0,12. Знайти імовірність того, що з одного пострілу стрілець влучає або в першу, або в другу зону.

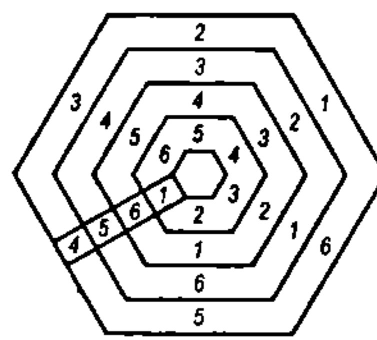
8. Пасажир чекає трамвай 26 або 16 біля зупинки, де курсують трамваї чотирьох маршрутів: 16, 22, 26, 31. Вважаючи, що трамваї всіх маршрутів підходять однаково часто, знайти імовірність того, що перший трамвай, який підійде до зупинки, буде трамваєм потрібного для пасажира маршруту.

9. Автомат штампує деталі. Імовірність того, що за одну зміну не буде виготовлено жодної нестандартної деталі, дорівнює 0,9. Яка імовірність того, що будуть стандартними всі деталі, виготовлені за три зміни?

10. Під час гри в крокет імовірність попадання кулі у ворота за певних умов дорівнює 0,4. Яка імовірність попадання у ворота, якщо одночасно кидати дві кулі?



Мал. 186



Мал. 187

11. Імовірність того, що із взятої навмання зернини виросте колос, який містить не менше як 50 зернин, дорівнює 0,6. Знайти імовірність того, що із взятих навмання 10 зернин виросте хоча б один колос, який містить не менше як 50 зернин.

12. Імовірність того, що учень N розв'яже задачу, дорівнює 0,7, а учень M — 0,9. Знайти імовірність того, що задача буде розв'язана хоча б одним з цих учнів.

13. Радіостанції 1, 2 і 3 незалежно одна від одної посилають кожна по одній передачі радіостанції 4. Імовірності прийому передачі радіостанцією 4 від станцій 1, 2 і 3 відповідно дорівнюють $p_1 = 0,4, p_2 = 0,5, p_3 = 0,7$. Знайти імовірність того, що станцією 4 буде прийнята: а) тільки одна передача; б) хоча б одна передача.

14. Серед волокон бавовни певного сорту в середньому 75 % мають довжину, меншу ніж 45 мм і 25 % — довжину, більшу або рівну 45 мм. Знайти імовірність того, що серед трьох волокон два будуть коротшими, а одне — довшим від 45 мм.

15. У сім'ї 10 дітей. Вважаючи однаково імовірним народження хлопчика і дівчинки, знайти імовірність того, що в сім'ї порівну хлопчиків і дівчаток.

Б

16. Набираючи номер телефону, абонент забув останню цифру і набрав її навмання. Знайти імовірність того, що номер набрано правильно. Розв'язати задачу для випадків, якщо остання цифра номера: а) парна; б) не більша від 6.

17. У шаховому турнірі беруть участь 20 гравців, яких жеребкуванням ділять на дві команди по 10 гравців. Яка імовірність того, що два найсильніших гравці гратимуть у різних командах?

18. В урні 90 номерів, написаних на папері. Кожний, хто бере участь у лотереї, платить гривню і дістає з урни 5 номерів. Перед вийманням він оголошує три задуманих номери. Якщо серед п'яти витягнутих номерів буде три задуманих, то учасник лотереї виграє 5000 грн. Цю лотерею заборонили, бо її організатори могли швидко розбагатіти. Чому?

19. З 30 карток з буквами українського алфавіту беруть навмання 5 карток. Яка імовірність того, що з п'яти букв у порядку вибору карток можна скласти слово «хвиля»?

20. На полицю ставлять, не дивлячись, 10 книжок. Визначити імовірність того, що при цьому три потрібні книжки стоятимуть поряд.

21. У партії з 200 деталей 150 деталей першого сорту, 30 — другого сорту, 16 — третього і 4 браковані деталі. Яка імовірність того, що навмання взята деталь буде або першого, або другого сорту.

22. Маємо такий розподіл імовірностей світіння електричних ламп за кількістю годин:

Таблиця 22

Кількість годин світіння	до 400	400–600	600–800	800–1000	1000–1200	Більша 1200
Імовірність	0,10	0,25	0,30	0,20	0,10	0,05

Визначити імовірність того, що взята навмання лампа світитиметься: а) більше як 800 год; б) більше як 1000 год; в) не більше як 600 год; г) не менше як 600 год.

23. Завод у середньому випускає 27 % продукції вищого сорту і 70 % продукції першого сорту. Знайти імовірність того, що навмання взятий виріб буде або вищого, або першого сорту.

24. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години верстат не потребуватиме уваги робітника, дорівнює: для першого верстата 0,9, для другого — 0,8 і для третього — 0,85. Знайти імовірність того, що: а) протягом години жоден верстат не буде вимагати уваги робітника; б) принаймні один з трьох верстатів не буде вимагати уваги робітника протягом години.

25. Під час перевірки готової деталі розрізняють брак за формою і за розмірами. Імовірність браку за формою дорівнює 0,05, за розмірами — 0,01. Яка імовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою і за формою, і за розмірами?

26. Група стрільців веде стрільбу з гвинтівок у мішень, яка швидко рухається. Покладемо, що ймовірність влучання в ціль для кожного стрільця однакова і дорівнює p. Визначити, скільки має бути стрільців, щоб імовірність влучання в ціль була не меншою ніж q. (Ціль вважається влученою, якщо в неї влучить хоча б один стрілець.)

Задачу розв'язати в загальному вигляді, а також для $p = 0,001, p = 0,5$.

27. Два радіоаматори A і B посилають передачі незалежно один від одного третьому радіоаматору C. Кожний з них посилає по дві передачі. Ймовірність прийому кожної передачі від A дорівнює 0,8, а від B — 0,6.

Знайти ймовірність того, що радіоаматором C буде прийнято від них: а) дві передачі; б) три передачі; в) чотири передачі; г) хоча б одна передача; д) не менше від двох передач.

28. Імовірність виготовлення на автоматичному верстаті стандартної деталі дорівнює 0,9. Чому дорівнює ймовірність того, що з 5 виготовлених на ньому деталей 3 будуть стандартними?

29. Що імовірніше: виграти у рівносильного противника: а) три партії з чотирьох чи п'ять з восьми; б) не менше від трьох партій з чотирьох чи не менше від п'яти з восьми?

30. Відділ технічного контролю перевіряє половину виробів деякої партії і визнає придатною всю партію, якщо між перевіреними виробами бракованих не було жодного. Яка ймовірність того, що партія з 20 виробів, в якій два бракованих, буде визнана придатною?

В

31. Учасники жеребкування беруть з ящика жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого взятого жетона не містить цифри 6.

32. Замок з «секретом» містить чотири шестигранні призми, що повертаються незалежно одна від одної навколо спільної осі (мал. 187). На кожній бічній грані призми вибито одну цифру від 1 до 6. Повертаючи призми, дістають у прорізі замка певне чотирицифрове число. Замок відкривається лише тоді, коли буде набрано чотирицифрове число, яке становить «секрет» замка. Яка імовірність того, що людина, не обізнана з «секретом» замка, відкриє його за один довільний набір чотирицифрового числа?

33. Нехай ви забули одну цифру потрібного вам номера телефону і набираєте її навмання. Яка імовірність того, що вам доведеться зробити не більше від двох викликів?

34. У три вагони метро заходять дев'ять пасажирів. Кожний пасажир вибирає вагон навмання. Яка імовірність того, що:

а) в перший вагон сядуть три з них;

б) в кожний вагон сядуть по три пасажири;

в) в один з вагонів сядуть четверо, в другий — троє, а в третій — двоє?

35. У лотереї n білетів, з яких m виграшних. Учасник лотереї придбав k білетів. Яка імовірність того, що виграє хоча б один білет?

36. З 35 жетонів, занумерованих числами від 1 до 35, виймають один. Яка імовірність того, що номер вийнятого жетона виявиться кратним 4 або 9?

37. Статистики підрахували, що на 20 зупинок токарного верстата на одному з заводів припадає 10 зупинок через зміну різця, 3 — через поломку привода, 2 — через несвоєчасну подачу заготовок. Решта зупинок відбувається з інших причин. Знайти імовірність зупинки верстата з інших причин.

38. У коробці 10 монет по 20 коп., 5 по 15 коп., 2 по 10 коп.

Яка імовірність того, що сума взятих 6 монет буде не більшою від однієї гривні?

39. У магазин надходить 30 % електроламп з одного заводу і 70 % — з другого. Серед ламп, що надходять у магазин з першого заводу, 85 % стандартних, а серед тих, що надходять з другого заводу — 75 % стандартних. Яка імовірність того, що куплена лампа буде стандартною?

40. Знайти найменшу кількість монет, які треба підкинути, щоб імовірність твердження, що випаде хоча б один «герб», перевищувала 0,999.

41. Імовірність того, що учень N розв'яже задачу, дорівнює 0,7, а що учень M розв'яже задачу — 0,9. Яка імовірність того, що задача буде розв'язана хоча б одним з них?

42. Число вантажних автомобілів, що проходять по шосе повз бензозаправку, відноситься до числа легкових як 3 : 2. Відомо, що в середньому одна з 30 вантажних машин і 2 з 50 легкових заправляються на цій бензозаправці. Знайти імовірність того, що:

1) до бензоколонки під'їхав для заправки вантажний автомобіль;

2) під'їхав для заправки легковий автомобіль;

3) машина, що під'їхала до бензоколонки, заправлятиметься.

43. Робітник обслуговує 4 верстати. Кожний верстат за 6 год роботи кілька разів зупиняється — і загальна тривалість зупинок становить 0,5 год, причому зупинки верстатів у будь-який момент часу однаково імовірні. Визначити імовірність того, що в даний момент часу: а) працює один верстат; б) працюють два верстати; в) працюють не менш як три верстати.

44. Імовірність того, що витрати води на підприємстві виявляться нормальними, не більшими за певну кількість літрів на добу, дорівнює $\frac{3}{4}$. Знайти імовірність того, що в найближчі 6 днів витрати води будуть нормальними протягом 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 5-го, 6-го днів.

45. Кількість x риб в озері невідома. З озера виловили n риб і позначили їх, а потім відпустили назад в озеро. Через кілька днів в таку саму погоду знов закинули сітку і в ній виявилось m риб, серед яких k позначених. Указати наближено кількість риб в озері.

Розділ XIV

ВСТУП ДО СТАТИСТИКИ

§ 1. Про статистику та її методи

Термін «статистика» походить від латинського слова *status* – стан, становище. Статистика — наука, що збирає, обробляє і вивчає різні дані, пов'язані з масовими явищами, процесами і подіями. Предметом вивчення статистики є, зокрема, кількісна сторона масових суспільних явищ і процесів у зв'язку з їхньою якісною стороною.

Іноді неточно визначають статистику як «науку збирання даних». Це галузь прикладної математики.

Математична статистика – розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки й використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Статистика виникла з практичних потреб людей, їх господарської діяльності, необхідності обліку земельних угідь, майна, кількості населення, вивчення його занять, вікового складу тощо. Цікаво, що в Англії в XVII ст., коли статистичне вивчення поширилося на явища суспільного життя, людей, що займалися цими питаннями, називали «політичними арифметиками». Одним з головних представників «політичних арифметиків» Англії був В. Петті (1625–1687).

Статистику розділяють на описову і пояснювальну.

Описова статистика займається добором кількісної інформації, необхідної (або цікавої) для різних людей. Такою є спортивна інформація, відомості про середній рівень заробітної плати в державі, середньорічну температуру в певному регіоні тощо.

Великі масиви даних, перш ніж вони будуть тлумачитися людиною, мають узагальнюватися або згортатися. Саме це робить описова статистика, яка описує, узагальнює або зводить до бажаного виду властивості масивів даних.

За допомогою пояснювальної статистики з отриманих статистичних результатів роблять певні висновки, будують прогнози. Предметом вивчення статистики є такі об'єкти, як кількість і склад населення, трудові ресурси суспільства (їх розподіл і використання), національне багатство, виробництво і розподіл суспільного продукту і національного прибутку, матеріальний достаток населення, освіта, культура, охорона здоров'я, показники статистики органів державного управління і громадських організацій.

У процесі статистичного дослідження застосовують особливі прийоми вивчення, які в сукупності утворюють статистичний метод. Складовими елементами статистичного методу є масове спостереження, статистичне зведення, групування, обчислення середніх величин та індексів, побудова графіків.

С т а т и с т и ч н е с п о с т е р е ж е н н я — перший етап статистичного дослідження.

На схемі систематизовано види статистичних спостережень.

Статистичні спостереження

Види статистичних спостережень

За часовою ознакою | За способом організації | За ступенем повноти охоплення одиниць

Поточне | Періодичне | Одиночне | Суцільне | Несуцільне

Звітне | Експедиційне | Самообчислення

Вибіркове | Спостереження основного масиву | Анкетне | Монографічний опис

Охарактеризуємо основні три блоки таблиці.

Спостереження за часовою ознакою

Поточне спостереження передбачає систематичне вивчення змін, що відбуваються в певній сукупності, в міру їх надходження. Наприклад, щоденний облік відвідування в певному класі.

Періодичне спостереження проводиться через строго визначені інтервали часу – місяць, квартал, рік. Наприклад, облік успішності в школі за чверть, навчальний рік. У сільському господарстві – щорічний перепис худоби тощо.

Одиничне спостереження, як правило, проводиться в разі потреби в якийсь певний момент за особливим завданням. Наприклад, перепис житлового фонду в певному районі міста.

Спостереження за способом організації

Звітне спостереження – вивчення певних явищ і процесів на основі статистичних відомостей, які містяться у різноманітній звітності. Під час **експедиційного** спостереження спеціальні люди – обліковці – обходять закріплені за ними ділянки території і здійснюють там реєстрацію. Прикладом є перепис населення.

Спостереження **самообчисленням** полягає в тому, що представники статистичних органів роздають населенню або установам статистичні формуляри, які періодично через певні інтервали часу збирають і потім обробляють для отримання узагальнених даних.

Спостереження за ступенем повноти охоплення одиниць

Цей вид статистичного спостереження безпосередньо пов'язаний з математикою, а тому після загального огляду методів, якими користується статистика, ми повернемося до нього.

Суцільним є спостереження, в якому реєструється ознака всіх без винятку одиниць, що входять у сукупність, яка вивчається. Суцільне спостереження застосовується, наприклад, під час перепису населення.

Несуцільним називають такий вид спостереження, під час якого реєструють ознаки лише частини одиниць досліджуваної сукупності, і за частиною роблять висновок про всю сукупність.

Видами несуцільного спостереження є: вибіркове спостереження, спостереження основного масиву, анкетне спостереження і монографічний опис.

Найпоширенішим з видів несуцільного спостереження є **вибіркове** спостереження. Всю сукупність, з якої роблять відбір одиниць спостереження, називають генеральною. Сукупність одиниць, відібраних для вибіркового спостереження, називається **вибірковою**.

Під час вибіркового спостереження обстеженню підлягає відібрана певним чином частина одиниць усієї її сукупності, а результати обчислення цієї частини сукупності поширюються на всю сукупність у цілому.

У практиці статистично розрізняють три способи відбору одиниць сукупності, яка вивчається.

1) Випадковий відбір – усі одиниці сукупності мають однакову можливість попасти у вибірку. Відбір здійснюється з усієї сукупності жеребкуванням.

2) Механічний відбір – одиниці спостереження відбирають у певному порядку. Наприклад, під час механічного відбору при вивченні якості продукції береться на вибір кожна десята або двадцята деталь.

3) Типовий відбір – всю масу одиниць, що вивчаються, розчленовують на дрібніші однорідні групи і здійснюють наступний відбір одиниць – «представників» кожної групи у випадковому або механічному порядку. Наприклад, під час вивчення бюджету сімей їх попередньо розподіляють на групи за соціальним станом і рівнем прибутків.

Поширюючи дані вибіркового спостереження на всю генеральну сукупність, застосовують два способи поширених даних: спосіб прямого перерахунку і спосіб поправочних коефіцієнтів. Перший спосіб полягає в тому, що результати вибіркового спостереження приймають і для генеральної сукупності.

Другий спосіб застосовують під час уточнення результатів суцільного спостереження. Суть його полягає в тому, що дані вибіркового обстеження співставляють з даними суцільного спостереження і визначають коефіцієнт розходження.

Спостереження основного масиву передбачає облік лише частини одиниць певної сукупності, яка має переважну питому вагу в обсязі досліджуваного об'єкта. Наприклад, вивчення цін на ринках, які мають найбільшу питому вагу в оборотах торгівлі.

Анкетне спостереження не надійне (частина анкет не повертається). Воно використовується переважно транспортними організаціями і органами зв'язку для вивчення ефективності обслуговування населення.

Монографічний опис полягає в тому, що для обстеження береться один об'єкт, який докладно вивчають (здебільшого це має місце під час вивчення і поширення передового досвіду).

Важливу частину статистичних методів становлять планування і аналіз експериментів, що спрямовані на виявлення і перевірку причинних зв'язків між змінними. Планування експериментів спирається в основному на поєднання теорії ймовірностей з елементарною логікою.

Статистичні дослідження проводяться за таким планом:

1) формулюється завдання дослідження і визначаються обсяг, місце і час потрібної вибірки;

2) здійснюються збирання необхідних даних та їх наочне подання;

3) проводиться обробка зібраного статистичного матеріалу.

На першому етапі важливо чітко визначити мету дослідження, встановити, які об'єкти вивчатимуться і в якій кількості (обсяг вибірки). Необхідно встановити, які ознаки при цьому братимуть до уваги, які кількісні і якісні характеристики об'єктів слід оцінити.

На другому етапі використовують різні методи збирання даних: спостереження, порівняння, усне і письмове анкетування, систематизація даних.

На третьому етапі (частково на другому) результати статистичних досліджень піддають обробці і оформляють у вигляді таблиць, діаграм, графіків. За результатами виконаної роботи роблять певні висновки.

Статистичні висновки роблять від окремих властивостей вибірок до часткових властивостей сукупності; описання властивостей як вибірок, так і сукупностей, здійснюється за допомогою методів описової статистики.

Описова статистика включає в себе табулювання (складання таблиць), подання і описування сукупності даних. Ці дані можуть бути або кількісними, як наприклад, вимірювання зросту і ваги людини, або якісними, наприклад, вивчення певних явищ, в яких принципове значення має стать.

§ 2. Статистичні таблиці

Статистичні таблиці мають підмет і присудок. Статистичний підмет – це та сукупність, про яку йдеться в таблиці. Як правило, розміщується в лівій частині таблиці.

Статистичний присудок – це ті ознаки або показники, які характеризують статистичний підмет. Розміщується в заголовках граф – стовпців.

За структурою підмета статистичні таблиці поділяються на прості, групові і комбінаційні.

Таблиця 23

Оптимальна вологість грунтів

Грунт	Вологість, %
Піщаний	8–12
Супіщаний	9–15
Пилуватий	16–22
Суглинковий	12–15
Важкий сутлинковий	16–20
Глинистий	19–23

Прості – підмет являє собою перелік окремих об'єктів (назви підприємств, міст, республік, країн і т. п.).

Групові – в підметі одиниці сукупності групуються за однією якоюсь ознакою.

Комбінаційні – в підметі одиниці групуються за двома і більше ознаками, пов'язаними між собою.

Наведемо приклади таблиць.

Таблиця 24

Зміни в пам'яті, увазі, швидкості реакції за день[1]

	Випробування, %		Різниця, %
	ранішні	вечірні	
Пам'ять	100	79,3	–20,7
Обсяг уваги	100	72,7	–27,3
Швидкість реакції	100	83,4	–16,6
Помилки	100	111,1	–11,1

Таблиця 25

Залежність рівня автоматизації та освітньої структури персоналу, що обслуговує автоматизоване обладнання, % до загальної кількості

Кількість років освіти персоналу	Контроль, здійснюваний персоналом	Напівавтоматичний контроль	Автоматичний контроль зворотного зв'язку	Логічний контроль за допомогою системи зворотного зв'язку
Менше за 8	10	16	5	1
8–11	40	40	25	6
12	35	32	37	24
Більше за 12	15	12	33	69
	100	100	100	100

[1]Дослідження проводилися зі студентами-медиками від 7.30 до 8 год ранку до того, як студенти починали свою роботу, а потім увечері від 23.30 до 24 год.

Якщо групування здійснене за інтервалами зміни ознаки, то таке групування називають інтервальним.

Наприклад, вибіркове вимірювання врожайності жита на площі 1200 га дало результати, які ми подаємо за допомогою інтервального групування (табл. 27).

Таблиця 26

Співвідношення затрат робочого часу на виконання трудових функцій

Трудові функції робітника	Питома вага відповідних елементів робочого часу, %		
	Наладчик	Оператор	Наладчик токарних автоматів
Робочий час	100	100	100
Активне спостереження і регулювання режиму з пульта управління	59,7	33,9	54,7
Машинно-ручне управління	5,3	46,0	2,2
Суто ручна праця	18,7	16,3	0,5
Наладка, підналадка, заміна інструмента, контроль продукції	16,3	3,8	42,6

Якщо групування здійснене за інтервалами зміни ознаки, то таке групування називають інтервальним.

Таблиця 27

Врожайність, ц/га	21–23	23–25	25–27	27–29	31–33	33–35	Всього
Площа, га	100	150	250	300	250	150	1200

Подавши результат групування рядом варіант або інтервалів варіації, розміщених у зростаючому порядку, і рядом відповідних частот, дістанемо варіаційний ряд (відповідно дискретний або інтервальний).

Частотою значення ознаки або інтервала називають кількість членів сукупності, варіанти яких лежать у даному інтервалі.

У випадку статистичного розподілу абітурієнтів частота результату 10 балів дорівнює 6, а 14 балів – 3 (див. табл. 28).

У випадку визначення врожайності жита частота врожайності 23–25 ц/га дорівнює 150, а 31–33 ц/га – 250.

Для наочного зображення статистичного розподілу користуються графічним зображенням варіаційних рядів – діаграмами, графіками, полігоном, гістограмою та ін. Діаграми і графіки вам відомі. Розглянемо інші види графічного зображення.

Гістограма – це послідовність стовпців, кожний з яких спирається на один розрядний інтервал, а висота його відображає кількість випадків або частот в цьому розряді. Прийнято поширювати шкалу на один розрядний інтервал вправо і вліво від розглядуваного діапазону.

§ 3. Ряди розподілу. Наочне зображення статистичного розподілу

Рядом розподілу називають ряд чисел, які характеризують розподіл одиниць досліджуваної сукупності. Ряд чисел, які характеризують розподіл одиниць досліджуваної сукупності залежно від величини ознаки, називається варіаційним рядом.

Нехай у даній статистичній сукупності вивчається деяка ознака, яка, взагалі кажучи, змінюється при переході від одного члена статистичної сукупності до іншого. Зміну цієї ознаки називають її варіацією, а значення ознаки у даного члена статистичної сукупності – його варіантою.

Якщо здійснити групування варіант за окремими значеннями ознаки, матимемо дискретне групування (дискретний від латинського *discretus* – роздільний, перервний).

Наприклад, можна скласти дискретний варіаційний ряд за кількістю балів, отриманих абітурієнтами вузу на приймальних іспитах.

Нехай 35 абітурієнтів дістали на трьох екзаменах таку кількість балів:
10, 10, 11, 9, 15, 12, 9, 12, 13, 9, 8, 11, 14, 13, 12, 9, 10, 14, 10, 7, 8, 7, 9, 11, 15, 12, 7, 10, 7, 7, 8, 13, 13, 14, 10.
Побудуємо статистичний розподіл цих даних (табл. 28).

Таблиця 28

Кількість балів	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість абітурієнтів	5	3	5	6	3	4	4	3	2

Побудову гістограми для графічного зображення інтервального варіаційного ряду здійснюють так. На осі абсцис відкладають інтервали значень ознаки і на кожному з них, як на основі, будують прямокутник з висотою, пропорційною частоті інтервала.

Розраховано, що кількість інтервалів має бути не менша від 8 – 10 і не більша від 20 – 25 при об'ємі статистичної сукупності $n \geqslant 50$. У випадку дискретного розподілу на осі абсцис відкладають окремі значення ознаки.

Звичайно вибирають шкали так, щоб ширина гістограми становила близько однієї і двох третин її висоти, тобто щоб відношення висоти до ширини було приблизно 3 : 5. Середина стовпчика суміщається з серединою інтервалу розряда.

На практиці прийнято зображувати гістограму у формі контура, а не окремими стовпцями.

Побудова полігона розподілу нагадує побудову гістограми. В гістограмі кожний стовпчик закінчується горизонтальною лінією, причому на висоті, що відповідає частоті в цьому розряді. А в полігоні він закінчується точкою над серединою свого розрядного інтервала на такій самій висоті.

Для побудови полігона варіаційного ряду на осі абсцис прямокутної системи координат відкладають інтервали значень ознаки і в серединах інтервалів ставлять перпендикуляри, довжини яких пропорційні відповідним частотам. Потім кінці сусідніх перпендикулярів сполучають відрізками прямих, а кінці крайніх перпендикулярів сполучають з серединами сусідніх інтервалів, частоти яких дорівнюють нулю. В результаті дістають замкнуту фігуру у вигляді многокутника, яку називають полігоном.

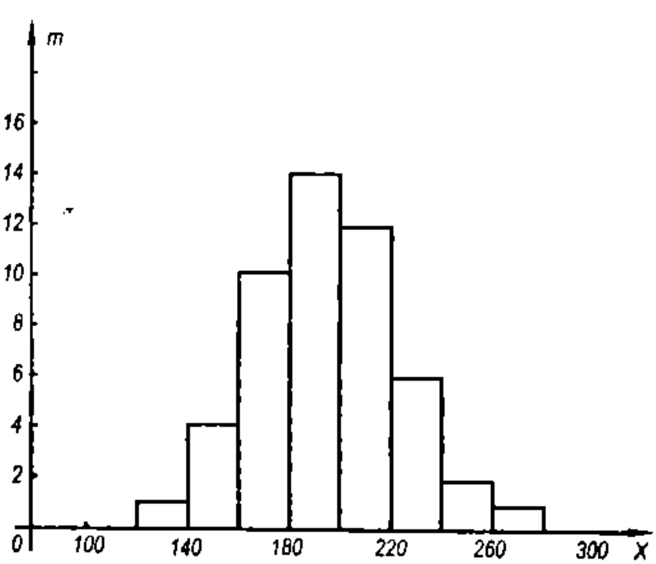
П р и к л а д. За даними таблиці 29 «Результати випробувань міцності ниток» побудуйте гістограму і полігон.

Відкладаємо значення ознаки на осі абсцис, а частоти – на осі ординат (масштаб на обох осях вибираємо довільно). На відрізках осі абсцис, які відповідають побудованим інтервалам, будуємо прямокутники і дістаємо гістограму (мал. 188).

Т а б л и ц я 29

Результати випробувань міцності ниток

Міцність нитки, X	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220	220–240	240–260	260–280
Кількість ниток, m	1	4	10	14	12	6	2	1



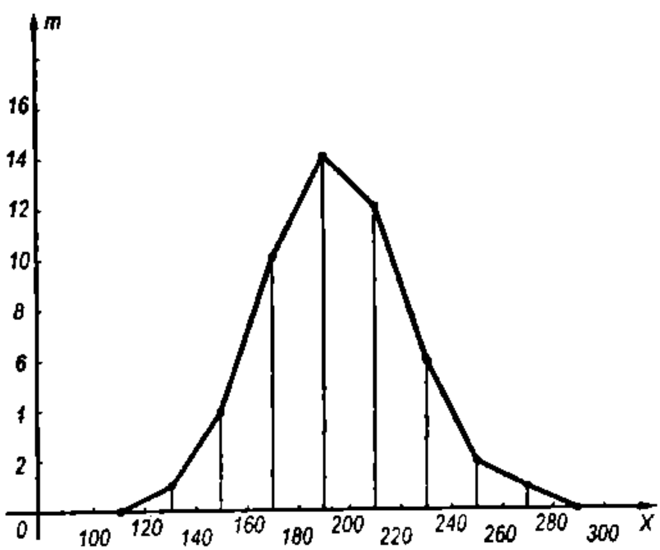
Мал. 188

Щоб побудувати полігон, даний інтервальний ряд перетворимо в дискретний, обчисливши значення ознаки, що припадає на середину (табл. 30).

Таблиця 30

Міцність нитки, X	130	150	170	190	210	230	250	270
Кількість ниток, m	1	4	10	14	12	6	2	1

Будуємо точки, координатами яких є пари чисел з дискретного варіаційного ряду (130; 1) (150; 4) і т.п. Сполучивши утворені точки відрізками прямої, а крайні точки (130, 1) і (270: 1) – з серединами найближчих інтервалів (110; 0) і (290; 0), дістанемо полігон (мал. 189).



Мал. 189

Часом замість гістограми чи полігона будують згладжену криву, яка проводиться за точками настільки близько, наскільки це можливо.

Гістограма найлегша для сприймання форма, тому їй надають перевагу, коли зображують не більше одного розподілу. Але якщо треба порівняти два або більше розподілів, то для цього краще підходять полігони частот, бо їх можна накласти один на одного при меншому перетині ліній.

§ 4. Мода і медіана

Ми вже бачили, що властивості сукупності даних можна подати у формі таблиць і графіків. Розглянемо деякі інші способи оцінки даних за розподілом частот. Їх метою є, як прийнято говорити в статистиці, виявлення міри центральної тенденції (центрального положення).

Найпростіше знайти міру центральної тенденції за допомогою м о д и (від латинського *modus* – міра, правило).

Мода – це значення ознаки, яке зустрічається найчастіше в даному ряді розподілу.

Для дискретних варіаційних рядів мода визначається як значення ознаки з найбільшою частотою. Наприклад, якщо в універмазі протягом дня продано 200 дитячих костюмчиків – 38 штук 22 розміру, 42 штуки 24 розміру, 56 штук 26 розміру, 18 штук 28 розміру, 33 штуки 30 розміру і 13 штук 32 розміру, то модальним номером є 26-й, бо він має найбільшу чисельність.

Проте не кожна сукупність значень має єдину моду в строгому розумінні цього означення. В сукупності значень (3, 5, 5, 7, 8, 8, 8, 9) модою є число 8, бо воно зустрічається частіше за будь-яке інше значення.

У випадку, коли всї значення в групі зустрічаються однаково часто, вважають, що група оцінок не має моди. Наприклад, у групі (1,2; 1,2; 1,7; 1,7; 4,8; 4,8) моди немає.

Якщо два сусідніх значення мають однакову частоту і вона більша від частоти будь-якого іншого значення, мода є середнє цих двох значень. Наприклад, мода групи значень (1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5) дорівнює 3,5((3+4) 2). Якщо два несуміжних значення в групі мають рівні частоти і вони більші від частот будь-якого значення, то існує дві моди. Наприклад, у групі значень (7, 10, 10, 10, 11, 13, 14, 14, 14, 15) модами є 10 і 14.

Мода використовується, зокрема, у практиці торговельної статистики під час визначення купівельного попиту на товари, рівня цін на ринках тощо.

Приклад. Білила цинкові найчастіше використовують художники в масляному живопису. Тому білу фарбу можна вважати модою сукупності фарб, що зустрічаються на палітрі. Цей факт враховують виробники фарб: білил цинкових випускають більше, ніж фарб інших кольорів.

Медіана — середня величина змінюваної ознаки, яка міститься в середині ряду, розміщеного в порядку зростання або спадання значень ознаки. Отже, медіана — це значення змінюваної ознаки, яке ділить множину даних навпіл, так що одна половина значень більша від медіани, а друга — менша.

Якщо дані містять непарне число різних значень, наприклад **9, 11, 15, 18, 20**, то медіана є середнім значенням для випадку, коли вони впорядковані, тобто медіана дорівнює 15. Якщо дані містять парне число різних випадків, наприклад 7, 11, 13, 15, то медіана дорівнює середньому між двома центральними значеннями, якщо вони впорядковані, тобто $(11+13):2=12$.

Приклади.

1. Знайти медіану сукупності даних:

а) 12, 2, 9, 11, 15, 24, 10;

б) 18, 43, 24, 17, 21, 26.

Розв'язання. а) Розмістимо дані сукупності в порядку зростання: 2, 9, 10, 11, 12, 15, 24;

$n = 7$ – непарне число. $Me = 11$.

б) Розмістимо дані в порядку зростання:

17, 18, 21, 24, 26, 43;

$n = 6$ – парне число. $Me = \dfrac{21+24}{2} = \dfrac{45}{2} = 22,5$.

2. Результати контрольної роботи за матеріалом розділу дано в таблиці 31.

Таблиця 31

Оцінка, бал	5	4	3	2	Всього
Частота	11	9	2	20	42

Як можна оцінити якість знань учнів з цього розділу?

Р о з в' я з а н н я. Медіана ділить усі оцінки навпіл. Двадцять перший член дорівнює 3, двадцять другий член дорівнює 3. Медіана дорівнює $\frac{3+3}{2} = 3$. Бачимо, що з 42 оцінок 21 не перевищує 3, отже, половина оцінок складається з 2 і 3, що свідчить про незадовільну якість знань.

§ 5. Середні значення

Статистика оперує такими середніми значеннями: середнє арифметичне, середнє квадратичне, середнє геометричне.

Середнє арифметичне. Нехай ми маємо n об'єктів, у яких виміряно деяку характеристику, що має значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Середнім значенням (або середнім арифметичним) називається таке число $\bar{x}$, яке дістають діленням суми всіх даних вибірки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ на число цих даних n.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n},$$

або $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ($\sum$ – знак суми – «сигма» велика).

П р и к л а д и. 1) Протягом перших п'яти днів березня температура повітря, вимірювана о 8 год ранку, становила $3°, 5°, 4°, 1°, 2°$. Знайти середню температуру за ці дні.

Маємо: $\frac{3° + 5° + 4° + 1° + 2°}{5} = \frac{15°}{5} = 3°$.

Т а б л и ц я 32

Номер тренувань	1	2	3	4	5
Кількість влучень	*Перший учень*				
	4	3	5	3	6
	Другий учень				
	5	4	3	6	5

2) З двох учнів треба вибрати одного в баскетбольну команду. Відомі кількості їхніх влучень м'яча в корзину на кожні десять кидків під час тренувань.

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо середню кількість влучень.

Для першого учня:

$$\frac{4+3+5+3+6}{5}=\frac{21}{5}=4,2.$$

Для другого учня:

$$\frac{5+4+3+6+5}{5}=\frac{23}{5}=4,6.$$

Отже, в команду слід узяти другого учня.

Розглянемо деякі властивості середнього арифметичного.

1) Знайдемо відхилення l кожного значення x_i від середнього $\bar{x}$. Різниця $x-\bar{x}$ може бути від'ємною або додатною. Сума всіх n відхилень дорівнює нулю. Проілюструємо цю властивість на прикладі.
Вихідні дані: (0; 0; 1; 1; 3; 3; 3; 5); $n=8$; $\bar{x}=2$.

2) Якщо до кожного результату спостережень додати деяке число c (константу), то середнє арифметичне $\bar{x}$ перетвориться в $\bar{x}+c$.

Т а б л и ц я 33

Значення	Середнє арифметичне	Відхилення
0	2	−2
0	2	−2
1	2	−1
1	2	−1
3	2	1
3	2	1
3	2	1
5	2	3
		—
		0

Як можна оцінити якість знань учнів з цього розділу?

Р о з в' я з а н н я. Медіана ділить усі оцінки навпіл. Двадцять перший член дорівнює 3, двадцять другий член дорівнює 3. Медіана дорівнює $\frac{3+3}{2} = 3$. Бачимо, що з 42 оцінок 21 не перевищує 3, отже, половина оцінок складається з 2 і 3, що свідчить про незадовільну якість знань.

§ 5. Середні значення

Статистика оперує такими середніми значеннями: середнє арифметичне, середнє квадратичне, середнє геометричне.

Середнє арифметичне. Нехай ми маємо n об'єктів, у яких виміряно деяку характеристику, що має значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Середнім значенням (або середнім арифметичним) називається таке число $\bar{x}$, яке дістають діленням суми всіх даних вибірки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ на число цих даних n.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n},$$

або $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ($\sum$ – знак суми – «сигма» велика).

П р и к л а д и. 1) Протягом перших п'яти днів березня температура повітря, вимірювана о 8 год ранку, становила $3°, 5°, 4°, 1°, 2°$. Знайти середню температуру за ці дні.

Маємо: $\frac{3° + 5° + 4° + 1° + 2°}{5} = \frac{15°}{5} = 3°$.

Т а б л и ц я 32

Номер тренувань	1	2	3	4	5
Кількість влучень	*Перший учень*				
	4	3	5	3	6
	Другий учень				
	5	4	3	6	5

2) З двох учнів треба вибрати одного в баскетбольну команду. Відомі кількості їхніх влучень м'яча в корзину на кожні десять кидків під час тренувань.

Р о з в' я з а н н я. Знаходимо середню кількість влучень.

Для першого учня:

$$\frac{4+3+5+3+6}{5} = \frac{21}{5} = 4,2.$$

Для другого учня:

$$\frac{5+4+3+6+5}{5} = \frac{23}{5} = 4,6.$$

Отже, в команду слід узяти другого учня.

Розглянемо деякі властивості середнього арифметичного.

1) Знайдемо відхилення l кожного значення x_i від середнього $\bar{x}$. Різниця $x - \bar{x}$ може бути від'ємною або додатною. Сума всіх n відхилень дорівнює нулю. Проілюструємо цю властивість на прикладі.
Вихідні дані: (0; 0; 1; 1; 3; 3; 3; 5); $n = 8$; $\bar{x} = 2$.

2) Якщо до кожного результату спостережень додати деяке число c (константу), то середнє арифметичне $\bar{x}$ перетвориться в $\bar{x} + c$.

Т а б л и ц я 33

Значення	Середнє арифметичне	Відхилення
0	2	−2
0	2	−2
1	2	−1
1	2	−1
3	2	1
3	2	1
3	2	1
5	2	3
		—
		0

Візьмемо, наприклад, попередні 8 значень і додамо до кожного з них по 5. Дістанемо числа 5; 5; 6; 6; 8; 8; 8; 10, середнє арифметичне яких $(5+5+6+6+8+8+10):8=7$. Середнє на 5 одиниць більше.

3) Якщо кожне значення сукупності з середнім $\bar{x}$ помножити на константу c, то середнє арифметичне стане $c\bar{x}$. Перевірте властивість, використовуючи попередні дані.

Якщо величини деяких даних повторюються, то середнє арифметичне визначається за формулою

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i f_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}, \text{ де}$$

f_i – частота повторення результату x_i.

Приклади. 1) Протягом двадцяти днів серпня температура повітря вранці була такою: 17°, 18°, 19°, 20°, 18°, 18°, 18°, 19°, 19°, 20°, 20°, 19°, 19°, 19°, 20°, 19°, 18°, 17°, 16°, 19°.

Знайти середню температуру за цими даними.

Тут окремі значення (17°, 18°, 19°, 20°) повторюються. Середня температура дорівнює:

$$\bar{x} = \frac{16^\circ \cdot 1 + 17^\circ \cdot 2 + 18^\circ \cdot 5 + 19^\circ \cdot 8 + 20^\circ \cdot 4}{1+2+5+8+4} = \frac{372^\circ}{20} = 18{,}6^\circ.$$

2) Подаємо запис обчислення середнього арифметичного при повторенні деяких даних у вигляді таблиці 34.

3) За контрольну роботу учні одержали такі оцінки

Оцінки (бали)	5	4	3	2
Кількість учнів	6	7	4	17

Чи достатньо засвоєний матеріал?

Знайдемо середню величину оцінок.

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 17}{6+7+4+17} = \frac{104}{34} = 3{,}0.$$

Ця оцінка є задовільною. Але частота оцінки «2» (мода) дуже висока, вона дорівнює 17. Отже, матеріал засвоєний учнями недостатньо.

Вихідні дані			x_i	Частота f_i	$x_i f_i$	Остаточне обчислення
2	6	10	2	2	4	
2	6	10	3	1	3	
3	6	11	4	3	12	
4	6	12	5	2	10	
4	8	12	6	4	24	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i f_i}{n} =$
4	9	15	8	1	8	$= \frac{188}{24} \approx 7,83,$
5	9	15	9	3	27	де $i = 1, 2, 3, \ldots 11$
5	9	15	10	2	20	
			11	1	11	
			12	2	24	
			15	3	45	
			$n = \sum_{i=1}^{11} f_i = 24\,188$			

Середнє квадратичне відхилення. Ми вже встановили, що сума відхилень даних від середнього значення дорівнює нулю. Тому, якби ми вирішили шукати середній показник відхилень, то він також дорівнював би нулю. В статистиці користуються іншим показником — середнім квадратичним відхиленням, який знаходять так: усі відхилення підносять до квадрата; знаходять середнє арифметичне цих квадратів; із знайденого середнього арифметичного добувають квадратний корінь. Середнє квадратичне відхилення позначають грецькою буквою σ («сигма» мала):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Знаходження середнього квадратичного відхилення подано в таблиці 35.

Значення x_i	Середнє арифметичне $\bar{x}$	Відхилення $x_i - \bar{x}_i$	Квадрат відхилення $(x_i - \bar{x})^2$	Квадратичне відхилення σ
5 8 10 12 17 20		−7 −4 −2 0 5 8	49 16 4 0 25 64	
$\sum_{i=1}^{6} x_i =$ $=72$	$\bar{x} =$ $= \frac{72}{6} =$ $=12$	$\sum_{i=1}^{6}(x_i -$ $-\bar{x}) =$ $=0$	$\sum_{i=1}^{6}(x_i -$ $-\bar{x})^2 =$ $=158$	$\sigma =$ $= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2}{n}} =$ $= \sqrt{\frac{158}{6}} \approx$ $\approx \sqrt{26,3} \approx$ $\approx 5,13$

У статистиці користуються також величиною σ^2 (квадрат середнього квадратичного відхилення), яку називають **дисперсією**.

Середнє геометричне n додатних чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ визначається виразом $m_c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, тобто середнє геометричне $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ є корінь n-го степеня добутку всіх $x_i (i = 1, 2, \ldots)$.

На практиці окремим особам, організаціям, керівникам підприємств доводиться розв'язувати різноманітні задачі, пов'язані з використанням понять моди, медіани, середнього. Наприклад, яких розмірів дитячого взуття слід випускати більше, ніж інших; на якому з міських маршрутів треба пустити автобусів більше, ніж на решті; якого розміру спортивних костюмів слід виготовити найбільше для учнів 10 — 11 класів тощо.

Розглянуті моду, медіану і середні значення називають **мірами центральної тенденції**.

§ 6. Завдання математичної статистики

Завдання математичної статистики полягає в тому, щоб на основі деяких властивостей сукупності елементів, узятих з генеральної сукупності, зробити певні висновки про властивості всієї генеральної сукупності.

Теорія статистичного виведення — це формалізована система методів розв'язування задач, що характеризуються намаганням вивести властивості великого масиву даних обстеженням вибірки. Завдання статистичного виведення полягає в тому, щоб передбачити властивості всієї сукупності, знаючи властивості вибірки з цієї сукупності. Ця теорія беспосередньо базується на теорії ймовірностей.

У генеральній сукупності нас здебільшого цікавить деяка ознака, обумовлена випадковістю, яка може мати якісний характер.

Приклад 1. Нехай автомат виготовляє вали. Їх сукупність, виготовлена за певних незмінних умов, утворює генеральну сукупність. Якщо ознакою, яка нас цікавить, є діаметр, то ця ознака має кількісний характер.

Приклад 2. Завод випускає електричні лампи. Їх сукупність, виготовлена за певних незмінних умов, є генеральною сукупністю. Якщо нас цікавить здатність лампи функціонувати чи ні, то це якісна ознака.

Параметр певної генеральної сукупності може виражатися деякою випадковою величиною X. У першому (кількісному) випадку X є самою ознакою; для якісної ознаки, наприклад типу «хороший – поганий», можна означити так:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{якщо «хороший»}, \\ 1, & \text{якщо «поганий»}. \end{cases}$$

Випадковою вибіркою об'єму n називають вибір об'єктів з генеральної сукупності, причому вибір окремих об'єктів здійснюється незалежно один від одного. Результатом випадкової вибірки об'єму n є сукупність (x_1, x_2,

$x_3, \ldots, x_n$) значень ознаки. Наприклад, сукупність (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) є вибіркою об'єму 10 з партії електричних ламп. Тут вісім якісних і 2 бракованих лампи.

Вибіркове спостереження застосовується для контролю за якістю продукції, використанням основних фондів, використанням робочого дня, вивчення добробуту населення, його купівельної спроможності тощо. В окремих випадках можливе виключно вибіркове спостереження. Наприклад, здійснюючи контроль за якістю фотопаперу, не вдаються до засвічування всієї виготовленої продукції, а застосовують вибірковий метод. Аналогічно діють, перевіряючи якість випущених радіоламп, під час перевірки міцності тканини на розрив й інше.

Статистичні методи широко застосовуються в теорії надійності — прикладній дисципліні, що розробляє питання інженерного, економічного і виробничо-організаційного характеру. Теорія надійності, використовуючи апарат теорії ймовірностей і математичної статистики, дає змогу визначити імовірність передчасного виходу з ладу певних технічних виробів, наприклад телевізорів. Для тривалості безвідмовної роботи дається не єдине число, а розподіл імовірностей, тобто можливих значень та їхніх імовірностей. Наприклад, сучасна японська радіопромисловість дає гарантію на роботу телевізора на 20 років. Це зовсім не означає, що кожний телевізор ці 20 років працюватиме абсолютно безвідмовно, теоретично обгрунтовано заходи, за допомогою яких можна зробити як завгодно малою імовірність передчасного виходу їх з ладу.

Результати вибіркового спостереження досить правильно характеризують усю генеральну сукупність. Але зведені результати у вибірці ніколи не збігаються із зведеними показниками генеральної сукупності.

Різниці між зведеними показниками вибіркової і генеральної сукупності називаються похибками вибірки, або похибками репрезентативності. Повністю уникнути цих похибок не можна, але наблизити їх до нуля можна. Границі похибок визначають на основі теорії імовірностей.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Чим займається наука «статистика»?

2. Яка відмінність між описовою і пояснювальною статистикою?

3. Які ви знаєте елементи статистичного методу дослідження?

4. Перелічіть види статистичних спостережень. Охарактеризуйте кожний з них.

5. Поясніть, що таке вибіркове спостереження.

6. Що таке генеральна сукупність? Що таке вибірка?

7. Які ви знаєте способи відбору одиниці сукупності, що вивчається?

8. За яким планом здійснюються статистичні дослідження?

9. Які засоби наочного зображення інформації в статистиці ви знаєте? Як побудувати гістограму і полігон?

10. Що таке мода, медіана? Як їх визначають?

11. Які види середніх значень величин застосовують у статистиці?

12. На власному прикладі поясніть, що таке середнє арифметичне даних чисел.

13. Запишіть формулу середнього геометричного даних чисел.

14. Запишіть формулу середнього квадратичного даних чисел.

15. Що таке варіаційний ряд?

16. Які види статистичних таблиць ви знаєте?

17. Наведіть приклади застосування вибіркових спостережень.

18. Яка умова є обов'язковою для організації вибіркового спостереження?

19. У чому полягає основне завдання математичної статистики?

20. Якого характеру ознаки, обумовлені випадковістю, досліджуються в генеральній сукупності?

21. Поясніть, як можна дістати перше уявлення про розподіл спостережуваних значень певної величини з генеральної сукупності (за кількісною ознакою).

ВПРАВИ

1. Побудувати полігон частот за даними таких варіаційних рядів:

Розподіл робітників цеху за тарифними розрядами

Тарифний розряд	1	2	3	4	5	6	Всього
Кількість робітників	3	5	14	25	40	13	100

Розподіл юнаків, що вавчаються у випускних класах, за зростом

Зріст, см	150	155	160	165	170	175	180	Всього
Кількість учнів	1	4	8	15	25	5	2	60

2. Побудувати дискретний варіаційний ряд і накреслити полігон для розподілу 45 пар чоловічого взуття, проданого магазином за день: 41, 40, 39, 40, 42, 41, 42, 40, 44, 41, 43, 42,43, 42, 39, 41, 39, 41, 42, 43, 37, 41, 42, 43, 38, 41, 40, 42, 41, 40, 40, 42, 40, 41, 39, 40, 44, 38, 41, 40, 39, 38, 43, 42, 41.

В к а з і в к а. Розмістити значення ознаки у зростаючому порядку і під кожним значенням підписати його частоту.

3. За даними таблиці про врожайність пшениці на різних ділянках посівної площі побудувати гістограму.

Врожайність ц/га	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50
Частка ділянки від загальної посівної площі, %	5	10	33	21	25	6

4. Рівні води в річці відносно номіналу вимірювали протягом 32 весняних паводків і дані вимірювань вносили в таблицю:

Рівень, см	0—24	25—49	50—74	75—99	100—124	125—149	150—174	175—199	200
Кількість випадків	0	1	3	6	7	6	5	4	0

Побудувати за цими даними гістограму і полігон.

5.При відгодівлі 10 тварин протягом п'яти днів зареєстровано такі прирости в масі (у кілограмах):
2,0; 2,8; 2,5; 2,7; 2,8; 2,7; 3,0; 2,5; 2,8; 2,4.

Знайти середній денний приріст маси однієї тварини.

6. Скласти дискретний варіаційний ряд за кількістю очок, які дістали учасники IV Міжнародної математичної олімпіади школярів (1962 рік, Чехословаччина). В олімпіаді брали участь по 8 учасників з 7 країн. Вісім учасників набрали таку кількість очок:

I	33	37	32	26	25	13	15	15
II	45	39	39	32	32	23	41	38
III	14	21	18	18	21	21	34	6
IV	20	30	39	32	11	19	33	28
V	32	38	39	28	32	35	30	23
VI	46	42	31	36	30	22	37	19
VII	30	19	35	33	20	23	29	23

Визначити, скільки школярів одержали три перші премії, якщо перша премія присуджувалася учасникам, що набрали 46—41 очко, друга — 40–37 очок, третя — 34 – 36 очок.

Розділ XV

ПОВТОРЕННЯ КУРСУ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

§ 1. Дійсні числа і дії над ними

1. Натуральні числа. Поняття натурального числа виникло з потреб лічби та вимірювання величин. Числа 1, 2, 3, ..., які використовують при лічбі, дістали назву натуральних. Такими числами позначають також наближений результат вимірювання величин, коли одиниця вимірювання вміщується у вимірюваній величині ціле число разів. Наприклад, довжина кімнати 5 м. Наближене значення довжини тут виражене натуральним числом 5.

Поняття натурального числа, як і поняття точки, прямої і площини в геометрії, належить до основних понять, які вводять без означення.

Натуральні числа записують за допомогою десяти цифр (символів) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При цьому використовують спосіб запису, який дістав назву десяткової системи. В його основу покладено поняття розряду і основну властивість десяткової системи. Назви розрядів у порядку зростання такі: розряд одиниць, десятків, сотень, тисяч і т. д. Відповідні назви мають одиниці розрядів: 1 — одиниця розряду одиниць, 10 — одиниця розряду десятків, 100 — одиниця розряду сотень і т. д.

Якщо у числі немає одиниць якого-небудь розряду, то на місці такого розряду записують цифру 0. Наприклад, у числі 302 125 одиниць 5, десятків 2, сотень 1, тисяч 2, десятків тисяч 0, сотень тисяч 3.

Кожні десять одиниць будь-якого розряду утворюють одну одиницю вищого розряду, що стоїть поруч з ним зліва. Основна з властивостей десяткової системи запису натуральних чисел полягає в тому, що кожна одиниця певного розряду у 10 разів менша від одиниці сусіднього вищого розряду, що стоїть ліворуч, і у 10 разів більша від одиниці сусіднього розряду, що стоїть праворуч (крім розряду одиниць). З цієї властивості випливає, що значення кожної цифри залежить від місця (позиції), яке ця цифра займає у запису числа. Наприклад, цифра 2 у числі 6 302 872, що стоїть на першому місці, рахуючи справа наліво, показує кількість одиниць. Та ж цифра 2, що стоїть на четвертому місці, показує кількість тисяч.

У десятковій системі запису чисел для читання натуральних чисел число розбивають на класи справа наліво. Клас — це група цифр по три цифри у кожній. Назва класу походить від назви останнього розряду, який в даному класі стоїть праворуч. Зокрема, клас одиниць містить цифри трьох перших розрядів (одиниць, десятків, сотень), клас тисяч включає цифри наступних трьох розрядів (тисяч, десятків тисяч, сотень тисяч), наступний — клас мільйонів і т. д.

Клас від класу прийнято відокремлювати невеликою відстанню. Найвищий клас може виявитись неповним, тобто може містити дві або одну цифру. Наприклад, число 6 302 872 має три класи: одиниць, тисяч і мільйонів. У класі мільйонів — лише одна цифра 6.

Щоб прочитати багатоцифрове число, треба:

1) розділити число на класи по три цифри в кожному справа наліво;

2) якщо найвищий клас містить три цифри, то прочитати зліва направо кожний клас як тризначне число і додати назву класу, назва останнього класу (класу одиниць) не додається;

3) якщо найвищий клас містить одну або дві цифри, то прочитати його як однозначне або двозначне число і додати назву цього класу.

При порівнянні багатоцифрових натуральних чисел керуються такими правилами:

з двох натуральних чисел із різною кількістю цифр більшим є те, у якому більше одиниць найвищого розряду;

якщо цифри найвищого розряду однакові, то порівнюють розряди на одну ступінь нижче і т. д.;

результат порівняння двох різних чисел записують у вигляді числової нерівності за допомогою знаків «<» (менше) або «>» (більше), наприклад $12 < 21$; $132 > 98$.

Додавання натуральних чисел, використовуючи натуральний ряд чисел, можна тлумачити так: додати два натуральних числа m і n означає знайти в натуральному ряді число p $(p > m)$, що знаходиться на n-му місці від числа m, якщо лічбу починати з $m + 1$. Це число p називають сумою чисел m та n і позначають $m + n$. Числа m і n називають доданками.

Помножити число m на число n $(n \geqslant 2)$ означає знайти суму n однакових додавків, кожний з яких дорівнює m;

$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ доданків}}.$$

Якщо $n = 1$, то за означенням вважаємо, що добуток $m \times n$ дорівнює першому співмножнику m, тобто $m \cdot 1 = m$.

Дії віднімання і ділення можна тлумачити як дії, обернені до додавання і множення, а саме:

1) відняти від числа m число n означає знайти таке число x, що $x + n = m$; число m називають зменшуваним, n — від'ємником, число x, а також вираз $m - n$ називають різницею;

2) розділити число m на число n означає знайти таке число x, що $n \cdot x = m$; число m при цьому називають діленим, n — дільником, число x, а також вираз $m : n$ називають часткою.

Будь-яке натуральне число можна записати у вигляді суми розрядних одиниць. Наприклад,

$$6\,302\,872 = 6\,000\,000 + 300\,000 + 2000 + 800 + 70 + 2.$$

На цій властивості грунтується розрядне додавання, віднімання, множення і ділення натуральних чисел у стовпчик.

Приклади.

а) $$\begin{array}{r} +\,2587 \\ 369 \\ 45 \\ \hline 3001 \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} -\,867698 \\ 93568 \\ \hline 774130 \end{array}$$

в) $$\begin{array}{r} \times\ 5348 \\ 605 \\ \hline +\ 26740 \\ 32088 \\ \hline 3235540 \end{array}$$

г) $$\begin{array}{l|l} -\,623455 & 235 \\ \cline{2-2} \ \ 470 & 2653 \\ \cline{1-1} \ -1534 & \\ \ \ \ 1410 & \\ \cline{1-1} \ \ -1245 & \\ \ \ \ \ 1175 & \\ \cline{1-1} \ \ \ \ -705 & \\ \ \ \ \ \ \ 705 & \\ \cline{1-1} \ \ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

У множині натуральних чисел завжди можна виконувати дії додавання і множення, в результаті яких теж дістанемо натуральне число. Для цих дій справджуються переставний і сполучний закони, а також розподільний закон множення відносно додавання і віднімання:

$$a + b = b + a,\ a \cdot b = b \cdot a,$$

$$(a + b) + c = a + (b + c),\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,\ (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

Якщо до множини натуральних чисел приєднати нуль, то дістанемо розширену множину натуральних чисел. За означенням, $0 + n = n + 0 = n$, $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$, $0 + 0 = 0, 0 \cdot 0 = 0, 0 : n = 0$.

На нуль ділити не можна.

Добуток однакових множників, кожний з яких дорівнює a, називається степенем числа a з натуральним показником $n \neq 1$:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множників}} = a^n.$$

Вираз a^n називається степенем, число a — основою степеня, число n — показником степеня. За означенням, $a^1 = a$.

Під час виконання обчислень зручно користуватися ознаками подільності.

Ознака подільності на 2: на 2 діляться ті і тільки ті числа, остання цифра яких парна.

Ознака подільності на 3 (9): на 3 (9) діляться ті і тільки ті числа, сума цифр яких ділиться на 3 (9).

Ознака подільності на 5: на 5 діляться ті і тільки ті числа, у яких остання цифра або 5, або 0.

Ознака подільності на 10: на 10 діляться ті і тільки ті числа, у яких остання цифра 0.

Якщо натуральне число ділиться на 1 і саме на себе (має лише два дільники), то воно називається простим; якщо число має хоча б один дільник, відмінний від одиниці і самого себе, то воно називається складеним.

Будь-яке складене натуральне число можна розкласти на прості множники лише єдиним способом. Звичайно, в такому розкладі чисел використовують запис у стовпчик, спираючись при цьому на ознаки подільності. При запису у стовпчик дільники записують праворуч від вертикальної риски, а частки — під діленим ліворуч від риски.

Наприклад, розклад чисел 4725 і 7875 має такий вигляд:

4725	3	7875	3
1575	3	2625	3
525	3	875	5
175	5	175	5
35	5	35	5
7	7	7	7
1		1	

На практиці доводиться користуватись поняттям «найбільший спільний дільник» і «найменше спільне кратне».

Дільником числа a називається число, на яке a ділиться без остачі.

Запишемо всі дільники чисел 48 і 36:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48;

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Випишемо спільні дільники для чисел 48 і 36:

1, 2, 3, 4, 6, 12.

Усі ці числа називають спільними дільниками чисел 48 і 36, а найбільший з них (число 12) називають найбільшим спільним дільником і позначають $D\ (36; 48) = 12$.

Отже, найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне з даних чисел, називають найбільшим спільним дільником цих чисел.

Щоб знайти найбільший спільний дільник двох або кількох чисел, необхідно:

1) розкласти дані числа на прості множники;

2) скласти добуток степенів усіх спільних простих множників з найменшим показником;

3) знайти значення складеного добутку.

П р и к л а д. Знайти $D\ (4725; 7875)$.

Використовуючи наведений вище розклад даних чисел на прості множники, дістаємо $D\ (4725; 7875) = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1575$.

Число b, яке ділиться на число a, називають кратним числу a.

Запишемо у порядку зростання всі числа, кратні числам 6 і 9:

$$6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54\ldots,$$

$$9,\ 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,\ 72,\ 81\ldots$$

Спільними кратними чисел 6 і 9 будуть 18, 36, 54, ... Найменшим із спільних кратних є число 18, яке позначають так: $K\ (6; 9) = 18$.

Отже, найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з даних чисел, називається найменшим спільним кратним цих чисел.

Щоб знайти найменше спільне кратне двох чисел, необхідно:

1) розкласти дані числа на прості множники;

2) скласти добуток степенів усіх простих множників з найбільшим показником;

3) обчислити складений добуток.

П р и к л а д. Знайти $K\ (4725; 7875)$.

Використовуючи розклад даних чисел на прості множники, дістанемо $K\ (4725; 7875) = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 = 23\,625$.

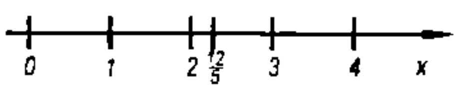
2. Звичайні дроби. Всі дійсні числа можна поділити на два класи: цілі і дробові. Дробові числа виникають у зв'язку з необхідністю виразити числом результат вимірювання різних величин (довжин, площ, кутових величин, часу та ін.). Часто також доводиться знаходити частину чисел чи кілька рівних частин предмета (яблука, відрізка, прямокутника тощо).

Числа, які позначають частину цілого або разом ціле і частину цілого, дістали назву дробових чисел.

Дробове число записують за допомогою звичайного дробу або цілого числа і звичайного дробу. Наприклад, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $4\frac{2}{3}$.

У звичайному дробі знаменник (число під рискою) показує, на скільки рівних частин розділене ціле, а чисельник (число над рискою) показує, скільки таких частин узято.

Якщо чисельник звичайного дробу менший від знаменника, то дріб називається правильним, а якщо чисельник дорівнює або більший від знаменника, то дріб називається неправильним. Дріб $\frac{2}{7}$ правильний; дроби $\frac{3}{3}$, $\frac{12}{5}$ — неправильні.



Мал. 190

Зобразимо неправильний дріб $\frac{12}{5}$ на числовому промені (мал. 190). З малюнка видно, що цей дріб має дві цілі одиниці і ще $\frac{2}{5}$ одиниці. Отже, дробове число $\frac{12}{5}$ можна записати у вигляді суми $\frac{12}{5} = 2+\frac{2}{5}$, а суму $2+\frac{2}{5}$ — у скороченій формі $2\frac{2}{5}$, тобто $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

Щоб виділити з неправильного дробу $\frac{m}{n}$ цілу частину, треба:

1) розділити чисельник m на знаменник n;

2) якщо остача від ділення m на n дорівнює 0, то неправильний дріб $\frac{m}{n}$ зображує ціле число p;

3) якщо остача від ділення m на n дорівнює q, то слід записати дріб $\frac{m}{n}$ у вигляді суми $p + \frac{q}{n}$, скорочено $p\frac{q}{n}$.

Приклад. Виділити цілу частину дробу $\frac{14}{5}$.

Розв'язання. $14 : 5 = 2$ (остача 4); $\frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5} = 2\frac{4}{5}$.

Отже, іншим джерелом утворення дробових чисел є ділення двох натуральних чисел, яке не виконується без остачі.

Інколи доводиться виконувати обернене перетворення — записувати число, що містить цілу і дробову частину, у вигляді неправильного дробу. Для цього необхідно:

1) помножити ціле число на знаменник дробу;

2) додати до добутку чисельник дробу;

3) здобуту суму записати у чисельнику, а знаменник залишити той самий.

Приклад. Перетворити у неправильний дріб число $5\frac{2}{3}$.

$$5\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}.$$

При порівнянні звичайних дробів з однаковими знаменниками більшим вважається той, у якого чисельник більший; меншим — той, у якого чисельник менший; рівними, якщо чисельники обох дробів рівні. Тобто, $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$, якщо $a > c$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$, якщо $a = c$; $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$, якщо $a < c$.

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники і залишити той самий знаменник, тобто

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника і записати той самий знаменник:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \ (a > c \text{ або } a = c).$$

Порівнюючи дроби з різними знаменниками, використовують означення: два дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ називаються рівними, якщо $ad = bc$. Наприклад, дроби $\frac{2}{5}$ і $\frac{16}{40}$ рівні, оскільки $2 \cdot 40 = 5 \cdot 16$.

Дроби з різними знаменниками порівнюють, попередньо звівши їх до спільного знаменника. З означення рівних дробів випливає основна властивість звичайних дробів: якщо чисельник і знаменник дробу помножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то дістанемо дріб, що дорівнює даному: $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. Справді, дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{am}{bm}$ рівні, оскільки $a \cdot bm = b \cdot am$.

Основну властивість дробу часто використовують для скорочення дробів. Наприклад, дріб $\frac{16}{40}$ можна скоротити, тобто розділити на найменший спільний дільник чисельника і знаменника, якщо вони не є взаємно простими числами. Оскільки $D\,(16; 40) = 8$, то $\frac{16}{40} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{2}{5}$.

Основну властивість дробу використовують також при зведенні дробів до спільного знаменника. Зводити дроби до спільного знаменника необхідно при порівнянні дробів з різними знаменниками, їх додаванні і відніманні.

Якщо знаменники даних дробів взаємно прості числа, то за спільний знаменник беруть добуток їх знаменників.

Наприклад, нехай треба звести до спільного знаменника дроби $\frac{4}{5}$ і $\frac{5}{7}$. Спільним знаменником даних дробів буде $5 \cdot 7 = 35$. Для зведення цих дробів до спільного знаменника, достатньо чисельник і знаменник першого дробу помножити на 7, а другого — на 5:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{28}{35}; \ \frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{25}{35}.$$

Якщо у знаменнику дробів маємо складені числа, то звичайно дроби зводять до найменшого спільного знаменника. Він дорівнює найменшому спільному кратному знаменників даних дробів.

П р и к л а д. Звести до найменшого спільного знаменника дроби $\frac{8}{15}$ і $\frac{11}{12}$. Маємо: $K\ (15; 12) = 3 \cdot 5 \cdot 2^2 = 60$. Щоб знайти додаткові множники, на які слід помножити чисельник і знаменник кожного дробу, достатньо розділити спільний знаменник на знаменник кожного дробу. Отже, $60 : 15 = 4$ — додатковий множник першого дробу; $60 : 12 = 5$ — додатковий множник другого дробу.

$$\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{32}{60}; \ \frac{11}{12} = \frac{11 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{55}{60}.$$

На практиці зручно користуватися таким правилом зведення дробів до спільного знаменника:

1) знайти добуток знаменників даних дробів — їх спільний знаменник;

2) знайти додаткові множники до кожного дробу як добутки знаменників решти дробів крім того, для якого шукаємо додатковий множник;

3) помножити чисельник кожного з дробів на відповідний додатковий множник і записати спільний знаменник.

Щоб додати (відняти) дроби із різними знаменниками, необхідно:

1) звести кожний дріб до найменшого спільного знаменника;

2) додати (відняти) чисельники утворених дробів, залишивши той самий спільний знаменник;

3) скоротити здобутий дріб і виділити з нього цілу частину, якщо це потрібно.

П р и к л а д и. Обчислити: а) $\frac{7}{12} + \frac{7}{15}$; б) $\frac{7}{12} - \frac{3}{8}$.

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, тре- ... з чисельника зменшуваного відняти чисельник від'- ...ка і записати той самий знаменник:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \ (a > c \text{ або } a = c).$$

...орівнюючи дроби з різними знаменниками, викори- ...ють означення: два дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ називаються рів- ..., якщо $ad = bc$. Наприклад, дроби $\frac{2}{5}$ і $\frac{16}{40}$ рівні, ...ьки $2 \cdot 40 = 5 \cdot 16$.

...роби з різними знаменниками порівнюють, попере- ...звівши їх до спільного знаменника. З означення рів- ...дробів випливає основна властивість звичайних дро- ...якщо чисельник і знаменник дробу помножити або ...ілити на одне й те саме натуральне число, то дістане- ...ріб, що дорівнює даному: $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. Справді, дроби $\frac{a}{b}$ і ...рівні, оскільки $a \cdot bm = b \cdot am$.

...сновну властивість дробу часто використовують для ...очення дробів. Наприклад, дріб $\frac{16}{40}$ можна скоротити, ... розділити на найменший спільний дільник чисель- ... і знаменника, якщо вони н... ...заємно простими чи- ...и. Оскільки $D(16; 40) =$ ... $= \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{2}{5}$.

...новну властивість дро... ...стовують також ... ...ні дробів до спільн... ...ника. Звод... ...льного знаменник... ...при ... ...ими знаменника... ...що знаменник... ...спільний знаме... ...приклад, нех... ...х дробі... ...оби $\frac{4}{5}$ і $\frac{5}{7}$. С... $= 35$. ...

б) $15\frac{11}{24} - 10\frac{27}{40} = 15\frac{11 \cdot 5}{24 \cdot 5} - 10\frac{27 \cdot 3}{40 \cdot 3} = 15\frac{55}{120} -$
$-10\frac{81}{120} = 14\frac{175}{120} - 10\frac{81}{120} = (14 - 10) + \left(\frac{175}{120} - \frac{81}{120}\right) =$
$= 4 + \frac{47}{60} = 4\frac{47}{60}.$

Щоб перемножити звичайні дроби, треба:

1) перемножити окремо їх чисельники і знаменники, перший добуток записати у чисельнику, а другий — у знаменнику;

2) скоротити утворений дріб і виділити в ньому цілу частину, якщо це можливо.

Приклади. а) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$;

б) $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Множення на дріб застосовують при знаходженні дробу (частини) від числа: щоб знайти частину (дріб) від числа, треба число помножити на цей дріб.

Приклад. Знайти $\frac{2}{5}$ від: а) 75; б) $\frac{4}{7}$.

Розв'язання. а) $75 \cdot \frac{2}{5} = \frac{75}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{75 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{15 \cdot 2}{1} = 30$;

б) $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{8}{35}$.

При множенні чисел, що містять цілу і дробову частини їх необхідно попередньо перетворити у неправильний дріб і перемножити за правилом множення звичайних дробів.

Приклад. $3\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{15} = \frac{10}{3} \cdot \frac{32}{15} = \frac{10 \cdot 32}{3 \cdot 15} = \frac{2 \cdot 32}{3 \cdot 3} =$

$= \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}.$

При множенні дробів, як і натуральних чисел, виконуються переставний, сполучний і розподільний закони:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}; \ \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}\right);$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n};$$

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}-\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}.$$

При діленні на дріб використовують поняття взаємно обернених чисел: два числа називаються взаємно оберненими, якщо їхній добуток дорівнює 1.

Приклади. а) Числа 2 і $\frac{1}{2}$ взаємно обернені, оскільки $2\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\cdot1}{1\cdot2}=1$.

б) Числа $\frac{3}{5}$ і $\frac{5}{3}$ взаємно обернені, оскільки $\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}=$ $=\frac{3\cdot5}{5\cdot3}=1$.

Щоб розділити одне число на друге, треба ділене помножити на число, обернене до дільника.

Приклади. а) $\frac{18}{5}:\frac{8}{25}=\frac{18}{5}\cdot\frac{25}{8}=\frac{18\cdot25}{5\cdot8}=$ $=\frac{9\cdot5}{1\cdot4}=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}$;

б) $\frac{3}{4}:6=\frac{3}{4}:\frac{6}{1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3\cdot1}{4\cdot6}=\frac{1}{8}$;

в) $12:\frac{2}{3}=12\cdot\frac{3}{2}=\frac{12}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{12\cdot3}{1\cdot2}=18$.

Ділення на дріб використовують при знаходженні числа за значенням його дробу (частини). Щоб знайти число за даним значенням його дробу, треба задане число розділити на цей дріб.

Приклад. $\frac{3}{4}$ поля становить 27 га. Знайти площу всього поля.

Розв'язання. $27:\frac{3}{4}=27\cdot\frac{4}{3}=\frac{27}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{27\cdot4}{1\cdot3}=$ $=36$ (га).

3. Десяткові дроби і наближені обчислення. До поняття десяткового дробу можна прийти, поширивши праворуч від розряду одиниць основну властивість десяткової системи запису чисел: кожна одиниця певного розряду у зів менша від одиниці вищого розряду, що стоїть лі- і у 10 разів більша від одиниці сусіднього розряду, тть праворуч.

віщо треба розглядати розряди в 10, 100, 1000 разів за 1? Звернемося до метричної системи мір. При- мо, що ширина класу (з точністю до 1 дм) дорівнює 1 дм. Запишемо ширину класу у метрах. Дістанемо дм= $6\frac{1}{10}$ м. Якщо виконати вимірювання з точністю м, то дістанемо 6 м 15 см. Запишемо результат вимі- ння у метрах: 6 м 15 см= 6 м + 1 дм + 5 см = 6 м + $\frac{1}{10}$м + м = 6 м + $\frac{10}{100}$м + $\frac{5}{100}$м = $6\frac{15}{100}$м.

обові числа $6\frac{1}{10}$ м і $6\frac{15}{100}$м запишемо без знаменника ляді 6,1 м і 6,15 м. Неважко помітити, що після ці- стини числа і коми на першому місці стоїть розряд, ця якого у 10 разів менша від одиниці попереднього ду — розряду одиниць. На другому місці після коми розряд, одиниця якого у 100 разів менша від одини- аннього розряду цілої частини і у 10 разів менша від иці першого розряду дробової частини. Відповідні на- озрядів після коми — розряд десятих, розряд сотих Таку форму запису чисел називають десятковим за- з числа, а самі числа, записані у такій формі, дістали «десяткові дроби». Цифри, що позначають розряди коми, називають десятковими знаками.

скінченні десяткові дроби можна перетворити такі у яких знаменник дробової частини є або може бу- браженим одиницею з одним або кількома нулями. знаменник дробової частини не можна так подати, обове число перетворюється у нескінченний десятко- еріодичний дріб.

Щоб перетворити дробове число у десятковий дріб, тре- писати цілу частину, відділивши її комою, і знайти ву частину, поділивши чисельник дробу на знамен- У випадку нескінченного періодичного дробу ділення чують до певного десяткового знаку із округленням ю.

Порівнюють десяткові дроби за тими ж правилами, що і натуральні числа. Для цього треба:

1) порівняти цілі частини;

2) якщо цілі частини однакові, то порівнюють кількість десятих частин;

3) якщо кількість десятих частин однакова, то порівнюють кількість сотих частин і т. д. Наприклад, $43{,}263 > 43{,}252$.

Додавання і віднімання десяткових дробів, як і натуральних чисел, виконують порозрядно у стовпчик. При цьому слід стежити, щоб кома була розміщена під комою, і однойменні розряди як цілої, так і дробової частин були записані один під одним.

П р и к л а д и.

а) $$\begin{array}{r} +\,43{,}826 \\ 8{,}523 \\ \hline 52{,}349 \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} -\,23{,}825 \\ 7{,}947 \\ \hline 15{,}878 \end{array}$$

в) $$\begin{array}{r} -\,195{,}700 \\ 28{,}425 \\ \hline 167{,}275 \end{array}$$

Щоб перемножити два десяткових дроби, треба:

1) не звертаючи увагу на кому, виконати множення натуральних чисел;

2) у добутку відокремити комою стільки десяткових знаків, скільки їх є в обох множниках разом.

П р и к л а д и.

а) $$\begin{array}{r} \times\,42{,}13 \\ 0{,}2 \\ \hline 8{,}426 \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} \times\quad 2{,}03 \\ 0{,}025 \\ \hline +\quad 1015 \\ 406 \\ \hline 0{,}05075 \end{array}$$

в) $$\begin{array}{r} \times\,0{,}097 \\ 65 \\ \hline +\quad 485 \\ 582 \\ \hline 6{,}305 \end{array}$$

При множенні двох десяткових дробів першим множником зручніше записувати той, у якого більше цифр, не враховуючи нулі на початку числа.

Ділення десяткових дробів на натуральне число і на десятковий дріб виконують аналогічно діленню натуральних чисел. При діленні на натуральне число, після того як ділення цілої частини закінчено, у частці після останньої цифри ставлять кому. Остачу перетворюють у десяті частини і до них додають (зносять) число десятих з діленого і т. д.

Щоб розділити число на десятковий дріб, треба в діленому і в дільнику перенести кому праворуч на стільки цифр, скільки десяткових знаків у дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

П р и к л а д и.

а)

```
_283,015|23
 23     |12,305
 _53
  46
  _70
   69
   _115
    115
      0
```

б)

```
_0,4212 |8
   40   |0,05265
   _21
    16
    _52
     48
     _40
      40
       0
```

в) $46,98 : 1,16$

```
_4698 |116
 464  |40,5
  _580
   580
     0
```

Наближені обчислення. Наближені обчислення виконують тоді, коли компонентами дій є наближені значення величин чи чисел, які здобуті округленням результатів вимірювання геометричних, фізичних, хімічних та інших величин, використанням табличних значень, результатів виконання ділення, добування кореня з чисел, знаходження тригонометричних функцій, логарифмів чисел тощо.

У наближених обчисленнях доводиться користуватися правилами округлення натуральних чисел та десяткових дробів.

П р а в и л о. Щоб округлити натуральне число до певного розряду, треба:

1) замінити нулями всі цифри, що стоять після цього розряду;

2) якщо наступна за цим розрядом цифра була 5, 6, 7, 8 або 9, то цифру розряду, до якого виконується округлен-

ня, збільшити на одиницю; якщо наступна за цим розрядом цифра була 0, 1, 2, 3 або 4, то цифру розряду, до якого виконується округлення, залишити без змін.

Приклади. Округлити числа 752 781; 26 436; 939 855; 6597; 4302: а) до розряду десятків; б) до розряду тисяч.

Розв'язання. а) $752\,781 \approx 752\,780$; $26\,436 \approx 26\,440$; $939\,855 \approx 939\,860$; $6596 \approx 6600$; $4302 \approx 4300$;

б) $752\,781 \approx 753\,000$; $26\,436 \approx 26\,000$; $939\,855 \approx \approx 940\,000$; $6597 \approx 7000$; $4302 \approx 4000$.

При округленні десяткових дробів доцільно користуватися одним з двох правил.

Правило 1. Щоб округлити десятковий дріб до певного розряду дробової частини (до певного десяткового знаку), треба:

1) відкинути всі десяткові знаки, які стоять після цього розряду;

2) якщо перша з відкинутих цифр була 5, 6, 7, 8 або 9, то останню залишену цифру збільшити на одиницю;

3) якщо перша з відкинутих цифр була 0, 1, 2, 3 або 4, то останню залишену цифру записати без змін.

Правило 2. Щоб округлити десятковий дріб до певного розряду цілої частини, вищого розряду одиниць, треба:

1) відкинути всі цифри дробової частини (всі десяткові знаки);

2) цілу частину округлити за правилами округлення натуральних чисел.

При округленні десяткового дробу до розряду одиниць цифра цього розряду залишається без зміни чи збільшується на одиницю залежно від того, яким був перший з відкинутих десяткових знаків.

У наближених обчисленнях використовують поняття «абсолютна похибка», «відносна похибка» наближеного значення.

Абсолютною похибкою наближеного значення називається модуль різниці точного і наближеного значень числа чи величини.

Якщо абсолютна похибка наближеного значення не перевищує числа h, то це значення називають наближеним значенням з точністю до h.

Якщо x — точне значення і a — наближене значення числа або величини, h — точність наближення, то використовують такий запис: $x = a \pm h$.

Відносною похибкою наближеного значення називається відношення абсолютної похибки до модуля наближеного значення.

На практиці часто використовують правила наближених обчислень без строгого урахування похибок, або так званий спосіб «підрахунку правильних цифр».

Правильною цифрою наближеного значення називають цифру будь-якого розряду, якщо абсолютна похибка не перевищує одиниці цього розряду.

Наближені значення записують так, щоб усі цифри запису були правильними. Такий запис дає уявлення про точність наближення. У таблицях усі значення записують лише правильними цифрами.

При виконанні дій додавання і віднімання в результаті враховують кількість правильних десяткових знаків даних чисел. При цьому вважають, що дані наближені значення записані лише правильними цифрами.

П р а в и л о. При додаванні і відніманні наближених значень у результаті залишають стільки десяткових знаків, скільки їх має дане число з найменшою кількістю десяткових знаків.

При виконанні дій множення і ділення в результаті підраховують кількість значущих цифр. Значущими цифрами наближення, записаного у вигляді десяткового дробу, називаються всі його цифри, крім нулів на початку числа.

Наприклад, у наближених значеннях 2,25; 0,317; 9,03; 12,0 по три значущі цифри; у наближеннях 76,28; 20,40; 0,009862 — по чотири значущі цифри.

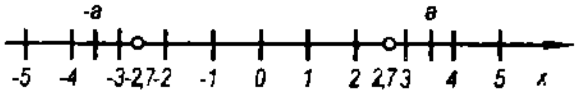
Якщо наближене значення записане за допомогою натурального числа, то його записують у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$, залишаючи у десятковому дробі a лише правильні цифри. Тут $1 \leqslant a < 10, n \in Z$.

Наприклад, якщо у наближеному значенні 95 200 правильними є лише перші чотири цифри, то в стандартному вигляді це число записують так: $9,520 \cdot 10^4$.

П р а в и л о. При множенні і діленні наближених значень у результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має наближене дане з найменшою кількістю значущих цифр.

При виконанні проміжних дій інколи користуються «правилом запасної цифри»: в результатах проміжних дій залишають на одну (запасну) цифру більше. В остаточному результаті запасна цифра відкидається за правилами округлення.

4. Додатні і від'ємні числа. Додатні і від'ємні числа були введені в математику в зв'язку з потребами практики — виражати числом значення величин, які можуть змінюватися у двох протилежних напрямах (зміна температури, рівня води у річці відносно умовного нуля, прибуток і борг і таке ін.). В алгебру додатні і від'ємні числа було введено у зв'язку з потребою виражати числом корінь рівняння виду $a + x = b$ у випадку, коли $b < a$.



Мал. 191

На координатній прямій (мал.191) додатні числа зображують праворуч від точки 0, а від'ємні — ліворуч.

Два числа, які відрізняються одне від одного лише знаком, називаються протилежними. Наприклад: 5 і −5; 2,7 і −2,7; в загальному випадку a і $-a$. Протилежні числа зображують на координатній прямій точками, симетричними відносно початку відліку. Число 0 протилежне самому собі.

Натуральні числа, протилежні їм числа і число 0 називаються цілими числами. Множину натуральних чисел позначають буквою N, а множину цілих чисел – буквою Z.

Цілі і дробові числа, як додатні, так і від'ємні, утворюють множину раціональних чисел, яку позначають буквою Q. Будь-яке раціональне число, як ціле, так і дробове, можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де n — число натуральне, а m — ціле.

Модулем числа a називається відстань точки, що зображує число a на координатній прямій, від початку відліку — точки 0. Модуль числа позначають символом $|a|$. Наприклад, $|2| = 2, |-2| = 2; |-2,73| = 2,73$. Для числа 0 маємо $|0| = 0$, оскільки точка 0, що зображує число 0, збігається з початком відліку.

Протилежні числа мають рівні модулі: $|3| = |-3| = 3$. Модуль будь-якого числа не може бути від'ємним. У загальному випадку

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0, \\ 0, & \text{якщо } a = 0, \end{cases}$$

або

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Порівнюючи раціональні числа, зручно користуватися їхніми зображеннями на координатній прямій. З двох чисел меншим вважають те, для якого точка, що його зображує, розміщена на координатній прямій лівіше.

З двох додатних чисел більшим є те, у якого більший модуль; з двох від'ємних чисел більшим є те, у якого менший модуль.

Наприклад, $-5 > -8$, оскільки $|-5| < |-8|$ і на координатній прямій точка, що зображує число -8, стоїть лівіше.

Правила дій з невід'ємними цілими і дробовими числами розглядали вище. Щоб додати два від'ємних числа, достатньо додати їх модулі і поставити перед результатом знак «мінус».

Наприклад,

$$(-5) + (-12) = -(5 + 12) = -17;$$

$$(-3,2) + (-8,9) = -(3,2 + 8,9) = -12,1.$$

Щоб додати два числа з різними знаками, треба від більшого модуля даних чисел відняти менший і поставити перед результатом знак числа з більшим модулем.

Наприклад,

$$32,7 + (-16,8) = +(32,7 - 16,8) = 15,9;$$

$$-6,42 + 3,2 = -(6,42 - 3,2) = -3,22.$$

Існування додатних і від'ємних чисел дає змогу замінити дію віднімання дією додавання з числом, протилежним від'ємному.

Наприклад,

$$-42 - 21 = -42 + (-21) = -(42 + 21) = -63;$$

$$62,5 - (-12,4) = 62,5 + 12,4 = 74,9.$$

У зв'язку з цим будь-який вираз, що містить лише знаки додавання і віднімання, можна розглядати як суму.

Наприклад, $-12+7-18-23+16 = (-12)+7+(-18)+$ $+(-23) + 16$.

При додаванні і відніманні додатних і від'ємних чисел теж виконуються переставний і сполучний закони. Це дає змогу раціоналізувати обчислення. У попередньому прикладі при обчисленні суми зручно використати спочатку переставний закон, знайти окремо суму всіх додатних і всіх від'ємних чисел, а потім знайти суму двох чисел з різними знаками. Наприклад, $-12 + 7 + (-18) + (-23) +$ $+16 = (-12 + (-18) + (-23)) + (7 + 16) = (-53) + 23 =$ $= -(53 - 23) = -30$.

При обчисленні числових виразів часто доводиться користуватися правилами розкриття дужок:

1) щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+», треба відкинути дужки та цей знак «+» і записати кожний доданок, що стоїть в дужках, з його знаком.

П р и к л а д и. а) $4,23 + (-2,45 + 6,48 - 3,18) =$ $= 4,23 - 2,45 + 6,48 - 3,19$;

б) $a + (b - c + k) = a + b - c + k$;

2) щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «−», треба відкинути дужки та цей знак «−» і записати кожний доданок, що стоїть у дужках, з протилежним знаком.

Приклади. а) $-2,5+8,3-(-6,9-8+12)=$
$=-2,5+8,3+6,9+8-12$;

б) $a-(b-c+k)=a-b+c-k$.

Множення і ділення від'ємних чисел зводиться до відповідних дій над їх модулями:

щоб перемножити два від'ємних числа, слід перемножити їх модулі і результати взяти із знаком плюс;

щоб розділити від'ємне число на від'ємне, треба розділити модуль діленого на модуль дільника і результат взяти із знаком «+»;

щоб перемножити два числа з різними знаками, треба перемножити модулі цих чисел і результати взяти із знаком «−»;

щоб розділити два числа з різними знаками, треба розділити модуль діленого на модуль дільника і взяти результат із знаком «−».

Приклади. а) $(-27)\cdot(-0,3)=81$;

б) $(-125):(-2,5)=50$; в) $6,54\cdot(-0,3)=-1,962$;

г) $(-5,25):1,5=-3,5$.

Для раціональних чисел, як і для натуральних, виконуються переставний, сполучний і розподільний закони множення відносно додавання:

$$ab=ba;\ (ab)c=a(bc);\ (a+b)c=ac+bc.$$

Так само виконуються дії з 1 і 0:

$$a\cdot 1=1\cdot a=a;\ a\cdot 0=0\cdot a=0;\ 0:a=0$$

(на нуль ділити не можна!).

Для розв'язування рівнянь важливе значення має обернене твердження, що випливає з рівності $a\cdot 0=0\cdot a=0$: добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із співмножників дорівнює нулю.

5. Дійсні числа. Поняття числа в історії розвитку математики поступово розвивалось і розширювалось. Спочатку було введено натуральні числа і нуль для лічби, потім дробові числа для вимірювання величин і ділення натуральних чисел. Пізніше у зв'язку з потребами практики і розв'язування рівнянь було введено від'ємні числа (дробові і цілі), які разом із цілими і дробовими додатними числами і числом 0 утворили множину раціональних чисел Q.

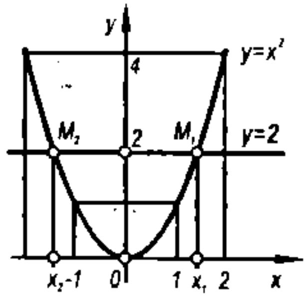
У множині раціональних чисел виконуються всі чотири арифметичні дії – додавання, віднімання, множення і ділення, крім ділення на нуль.

Кожному раціональному числу a на координатній прямій відповідає єдина точка $A(a)$. При цьому число a називається координатою точки A на цій прямій.

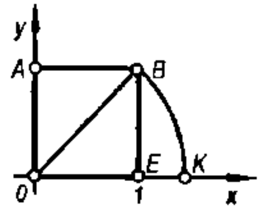
Виникає запитання: чи справджується обернене твердження — кожній точці координатної прямої відповідає раціональне число, що є координатою цієї точки?

Вимірювання довжин відрізків, графічний спосіб розв'язування рівнянь виду $x^2 = 2$ приводять до висновку, що не кожній точці координатної прямої відповідає раціональне число, що є її координатою. Тому виникає потреба зобразити числом координати і таких точок.

Справді, розв'яжемо графічним способом рівняння $x^2 = 2$ (мал. 192). З малюнка видно, що мають існувати два корені цього рівняння – абсциси точок M_1 і M_2. З цього рівняння випливає, що розв'язками його є числа, квадрати яких дорівнюють 2. Згідно з означенням квадратного кореня, такими числами є $x_1 = \sqrt{2}$ і $x_2 = -\sqrt{2}$. У курсі алгебри доведено, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Це означає, що числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ не є раціональними.



Мал.192



Мал.193

До такого ж висновку приводять і геометричні міркування. Побудуємо квадрат $OABE$, сторони якого дорівнюють одиничному відрізку OE на координатній прямій (мал. 193). Довжина діагоналі OB цього квадрата, за теоремою Піфагора, дорівнює $OB = \sqrt{OE^2 + BE^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Якщо відкласти відрізок на координатній прямій, то точці K має відповідати число $\sqrt{2}$, яке не є раціональним.

Можна довести, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює $3, 5, 6, 7, \ldots$. Іншими словами, числа $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$ та протилежні їм числа $-\sqrt{3}, -\sqrt{5}, -\sqrt{6}, -\sqrt{7}, \ldots$ теж не є числами раціональними. У множині раціональних чисел рівняння $x^2 = 5$ теж не має коренів.

Наведені приклади свідчать про те, що виникла потреба доповнити множину раціональних чисел числами нової природи, які дістали назву ірраціональних.

Ірраціональні числа записують у формі нескінченного десяткового неперіодичного дробу. Зокрема, $\sqrt{2} = 1,4142135623\ldots$.

Не слід думати, що ірраціональні числа можна дістати лише під час добування коренів з чисел, з яких вони не добуваються як точні числа.

Ірраціональним числом також є відношення довжини будь-якого кола до його діаметра. Його позначають π, і дорівнює це число $3,1415926\ldots$. Ірраціональними числами є значення тригонометричних функцій багатьох кутів (наприклад, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ та ін.), результати виконання деяких інших математичних операцій.

Ірраціональні числа можна дістати, утворюючи будь-які нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Наприклад, $2,12345\ldots, 0,513114111\ldots$.

Об'єднання множин раціональних та ірраціональних чисел утворює множину дійсних чисел, яку позначають буквою $\mathbf{R}$.

Ірраціональні числа, записані у вигляді десяткового дробу, порівнюють за тими самими правилами, що і десяткові дроби, якими записують раціональні числа.

Правила дій над дійсними числами α і β у випадку, коли вони належать до раціональних чисел, відомі. Проте якщо одне або обидва числа є ірраціональними, то виконання дій над ними, як правило, зводиться до виконання дій над їх раціональними наближеннями.

П р и к л а д. Знайти суму чисел α і β, якщо $\alpha = \frac{1}{3} = 0,333\ldots, \beta = \sqrt{2} = 1,41421\ldots$.

Запишемо нерівності:

$$0 < \frac{1}{3} < 1, \quad 1 < \sqrt{2} < 2,$$

$$0,3 < \frac{1}{3} < 0,4, \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5,$$

$$0,33 < \frac{1}{3} < 0,34, \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42,$$

$$0,333 < \frac{1}{3} < 0,334, \quad 1,414 < \sqrt{2} < 1,415,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Для знаходження суми $\frac{1}{3} + \sqrt{2}$ почленно додають ліві і праві частини записаних нерівностей:

$$1 < \frac{1}{3} + \sqrt{2} < 3,$$

$$1,7 < \frac{1}{3} + \sqrt{2} < 1,9,$$

$$1,74 < \frac{1}{3} + \sqrt{2} < 1,76,$$

$$1,747 < \frac{1}{3} + \sqrt{2} < 1,749,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Утворення таких нерівностей і додавання їх дає змогу знайти суму чисел $\frac{1}{3} + \sqrt{2}$ з точністю до будь-якого десяткового знака. Остання із записаних вище нерівностей забезпечує у наближенні суми два перші правильні десяткові знаки.

Аналогічно виконуються інші дії над ірраціональними числами. Після введення ірраціональних чисел і побудови множини дійсних чисел R встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої. Це означає, що кожному дійсному числу відповідає точка на координатній прямій, для якої це число є координатою, і навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає дійсне число — координата цієї точки.

Означення степеня з натуральним показником і його властивості залишаються справедливими і для будь-яких дійсних чисел. Нехай a — будь-яке дійсне число, n — натуральне число, відмінне від 1. За означенням, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ співмножників}}$; якщо $n = 1, a^1 = a$.

Виконуються такі властивості для степенів: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$, $m > n$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n \times b^n$, де a і b — будь-які дійсні числа.

6. Відношення і пропорції. Частка від ділення двох дійсних чисел називається відношенням.

Відношення показує, у скільки разів одне число більше від другого або яку частину одне число становить від другого. Відношення записують так: $8 : 13$, або $\frac{8}{13}$; $2,7 : 3,5$, або $\frac{2,7}{3,5}$; $\sqrt{3} : 2$, або $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рівність двох відношень називається пропорцією. За допомогою букв пропорцію можна записати так: $a : b = c : d$, або $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Числа a і d називаються крайніми членами пропорції, числа b і c – середніми.

У правильній пропорції добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх. Навпаки, якщо в пропорції добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх, то пропорція правильна.

У буквеному запису: якщо $a : b = c : d$ – правильна пропорція, то $ad = bc$; навпаки, якщо в пропорції $a : b = c : d$, $ad = bc$, то ця пропорція правильна.

Властивості пропорції часто використовують під час розв'язування задач.

Задача. Об'єм моделі металевої деталі 48 см^3, її маса 374 г. Яка маса оригіналу деталі, якщо його об'єм 8160 см^3?

Розв'язання. $\begin{matrix} 48\text{ см}^3 & — & 374\text{ г}, \\ 8140\text{ см}^3 & — & x\text{ г}, \end{matrix}$ $\frac{48}{8160} = \frac{374}{x}$;

$$48x = 8160 \cdot 374,\ x = \frac{8160 \cdot 374}{48} = 6358\ (\text{г}).$$

7. Проценти. У практичних обчисленнях деякі дроби дістали спеціальну назву, зокрема, одну другу називають половиною, одну четверту — чвертю. Спеціальну назву дістала одна сота. Вона називається **процентом**. Процент позначають за допомогою знака %.

За означенням, $1\,\% = \frac{1}{100} = 0,01$. Звідси $2\,\% = \frac{2}{100} = 0,02$; $5\,\% = \frac{5}{100} = 0,05$; $27\,\% = \frac{27}{100} = 0,27$; $100\,\% = \frac{100}{100} = 1$; $243\,\% = \frac{243}{100} = 2,43$ і т. д.

Взагалі, будь-яке число, наприклад, $\frac{4}{5}$, можна записати як $\frac{8}{10}$, $\frac{80}{100}$, 80 %. Отже, проценти – це одна з можливих форм запису чисел.

Проценти широко застосовують у фінансових операціях (прибутки з капіталу, сплата внесків, різні касові операції та ін.), для характеристики виконання виробничих планів, визначення зростання чи зниження продуктивності праці, режиму економії, собівартості і якості продукції, у госпрозрахунках. У сільському господарстві проценти застосовують під час визначення питомої ваги окремих культур у загальних планах сільськогосподарського виробництва, визначення вологості, схожості насіння і т. д.

Проценти широко використовують і у шкільних курсах, зокрема у математиці і фізиці під час обчислення відносної похибки вимірювань і наближених обчислень, у хімії при обчисленні концентрації розчинів.

Для розв'язування задач на проценти слід уміти записувати будь-яке число у вигляді процентів і розв'язувати обернену задачу — виражати відоме число процентів у вигляді дробового чи цілого числа.

Правило 1. Щоб перетворити дане число у проценти, треба це число помножити на 100.

Приклади. 1) $0,245 = (0,245 \cdot 100)\,\% = 24,5\,\%$;

2) $0,009 = (0,009 \cdot 100)\,\% = 0,9\,\%$;

3) $\frac{3}{7} = \left(\frac{3}{7} \cdot 100\right)\% = \frac{300}{7}\,\% = 42\frac{6}{7}\,\%$;

4) $1\frac{3}{4} = \left(1\frac{3}{4} \cdot 100\right)\% = \left(\frac{7}{4} \cdot 100\right)\% - \frac{700}{4}\,\% = 175\,\%$;

5) $3 = (3 \cdot 100)\,\% = 300\,\%$.

Правило 2. Щоб перетворити дане число процентів у дріб чи ціле число, треба розділити дане число процентів на 100.

Приклади. 1) $52\,\% = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$; 2) $27\frac{2}{3}\,\% = \frac{27\frac{2}{3}}{100} =$

$= \frac{83}{3} : 100 = \frac{83}{3 \cdot 100} = \frac{83}{300}$; 3) $250\,\% = \frac{250}{100} = 2,5$.

Існують три основні задачі на проценти: 1) знаходження процентів від числа; 2) знаходження числа за відомими його процентами; 3) знаходження процентного відношення двох чисел.

8. Знаходження процентів від числа.

Задача. Місячна зарплата робітника становить 280 грн. Крім того, він одержав премію, яка становить 24 % від місячної зарплати. Скільки гривень становить премія?

Розв'язання. 1-й спосіб. Визначимо, скільки гривень становить 1 %. Для цього розділимо 280 грн. на 100. Дістанемо 2,8 грн. Обчислимо, скільки гривень становлять 24 % від 280 грн. Для цього 2,8 грн. помножимо на 24. Дістанемо 67,2 грн.

Відповідь. Премія становить 67,2 грн.

Узагальнюючи цю задачу, дістанемо таке правило: щоб знайти число b, що становить $p\,\%$ від числа a, треба число a поділити на 100 і помножити на число p, тобто $b = \frac{a}{100} \cdot p$.

2-й спосіб. Користуючись означенням процента як дробу, вимогу до задачі можна сформулювати так: знайти

$\frac{24}{100} = 0,24$ від числа 280. Отже, знаходження 24 % від числа 280 є не що інше, як знаходження дробу $\frac{24}{100} = 0,24$ від числа 280. Відомо, що для цього достатньо 280 помножити на дріб 0,24. Отже, $280 \cdot 0,24 = 67,2$ грн. Звідси дістаємо правило: щоб знайти проценти від числа, треба ці проценти записати звичайним чи десятковим дробом і дане число помножити на здобутий дріб.

9. Знаходження числа за відомими його процентами.

З а д а ч а. При помелі пшениці вихід борошна становить 80 %. Скільки пшениці треба змолоти, щоб отримати 520 кг борошна?

Р о з в ' я з а н н я. Під час розв'язування цієї задачі треба знайти таке число, 80 % якого дорівнюють 520.

1-й с п о с і б. Знайдемо число, яке дорівнює 1%. Для цього 520 слід розділити на 80. Дістанемо $\frac{520}{80} = \frac{13}{2}$. Знайдемо число, яке дорівнює 100 %. Для цього число $\frac{13}{2}$ треба помножити на 100. Дістанемо $\frac{13}{2} \cdot 100 = \frac{13 \cdot 100}{2} = 650$.

В і д п о в і д ь. Треба змолоти 650 кг пшениці.

2-й с п о с і б. Запишемо проценти у вигляді звичайного чи десяткового дробу: $80\,\% = \frac{80}{100} = 0,8$. Слід знайти число, 0,8 якого становить 520, тобто знайти число за відомим його дробом, що знаходиться діленням даного числа на дріб. Розділимо 520 на дріб 0,8. Дістанемо:

$\frac{520}{0,8} = \frac{5200}{8} = 650$ (кг).

Звідси дістаємо правило: щоб знайти число за його процентами, треба проценти записати у вигляді звичайного чи десяткового дробу і розділити дане число на цей дріб.

10. Знаходження процентного відношення двох чисел. Задачі такого типу розв'язують, наприклад, при визначенні процентів успішності, відвідування, жирності молока, вологості, усушки. Тут відношення двох чисел показує, яку частину становить перше число від другого. При цьому важливо правильно зорієнтуватися, яке з двох чисел слід вважати першим, а яке — другим, тобто основним (за основне беруть те, з яким порівнюють число).

Задача 1. З чотирьох деталей, які було заплановано, токар виточив три. На скільки процентів токар виконав завдання?

Розв'язання. Визначимо, яку частину завдання виконав токар. Дістанемо $3 : 4 = \frac{3}{4}$. Перетворимо $\frac{3}{4}$ у проценти. Для цього помножимо $\frac{3}{4}$ на 100. Дістанемо: $\frac{3}{4} = (0,75 \cdot 100)\,\% = 75\,\%$.

Звідси дістаємо правило: щоб визначити процентне відношення двох чисел, слід знайти їх відношення і виразити його в процентах, тобто помножити знайдене відношення на 100 і поставити знак процента. Між процентами і відношеннями існує така залежність: збільшити число на p процентів — це означає збільшити його у p разів. Іншими словами, збільшення числа на p процентів слід розуміти не як збільшення даного числа на p, а як збільшення цього числа у p разів.

Наприклад, збільшення числа на 50 % – це збільшення його у 1,5 раза, оскільки 150 %=1,5.

У загальному випадку: якщо число a збільшилось, наприклад, на 30 %, то воно становить $a+0,3a = 1,3a$, тобто збільшилось у 1,3 раза.

Крім того, якщо величина зменшилась, наприклад, у 1,2 раза, тобто у $\frac{6}{5}$ раза, то воно становить $\frac{5}{6}$ свого попереднього значення $\left(\text{оскільки } 1 : \frac{6}{5} = \frac{5}{6}\right)$. Навпаки, якщо після зменшення величина становить $\frac{5}{6}$ свого попереднього значення, то вона зменшилась у $\frac{6}{5}$ раза.

Вказаною залежністю між процентами і відношеннями можна пояснити такі факти: при зниженні трудомісткості праці на $33\frac{1}{3}$ % продуктивність праці (обернена величина) збільшується на 50 %; при зниженні цін на 20 % купівельна спроможність населення збільшується на 25 % і т.ін.

Задача 2. У результаті вдосконалення верстата швидкість різання збільшилась з 120 м/хв до 135 м/хв. На скільки процентів збільшилась продуктивність праці?

Розв'язання. Продуктивність праці збільшилась у $\frac{135}{120} = 1\frac{1}{8}$ раза, або у 1,125 раза, тобто становила 112,5 % свого попереднього значення. Відповідь. 12,5 %.

Задача 3. За нормою на виконання виробничого завдання робітник мав витратити $4\frac{1}{2}$ год, а фактично він витратив 3 год. На скільки процентів він перевиконав норму?

Розв'язання. Час виконання завдання становить $\frac{3}{4\frac{1}{2}}$ запланованого, тобто $\frac{3}{\frac{9}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$. Візьмемо норму за 1. Норма виконання з перевищенням у $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} = 1,5$ раза, тобто вона виконана на 150 %, а перевиконана на 50 %. Відповідь. 50 %.

Задача 4. Обсяг робіт на будівництві збільшився на 40 %. Як слід змінити кількість робітників, якщо передбачено збільшити продуктивність праці на 10 % ?

Розв'язання. Обсяг робіт збільшився у 1,4 раза, тому і кількість робітників треба збільшити у 1,4 раза. Вона становитиме 1,4 від початкової кількості, яку візьмемо за 1. Оскільки продуктивність праці слід збільшити у 1,1 раза (на 10 %), то для виконання запланованого обсягу робіт кількість робітників треба зменшити у 1,1 раза.

Отже, необхідна кількість робітників має становити $1,4 : 1,1 = 1,27$ від початкової кількості. Це означає, що їх кількість слід збільшити на 27 %. Відповідь. Кількість робітників треба збільшити на 27 %.

Задача 5. Обсяг продукції заводу зріс за перший рік на 20 %, за другий — на 25 %. На скільки процентів зріс обсяг продукції за два роки?

Розв'язання. Нехай початковий обсяг продукції становив p одиниць. Наприкінці першого року продукція заводу збільшилась на 20 %, тобто у 1,2 раза, і становила $1,2p$ одиниць. На кінець другого року обсяг продукції збільшився на 25 %, тобто у 1,25 раза порівняно з $1,2p$, і становив $1,2p \cdot 1,25 = 1,5p$. Це означає, що за два роки вона збільшилась у 1,5 раза порівняно з p, тобто на 50 %. Відповідь. 50 %.

§ 2. Тотожні перетворення виразів

1. Основні поняття. Вирази, складені з чисел, знаків, дій і дужок, називаються числовими виразами. Наприклад, $5 + 3,7$; $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 - \sqrt{2}$;

$$(27 - 3,5) \cdot 12 - 67; \ \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{1}{2} - 47,5}{\frac{4}{9} - \frac{1}{27}}.$$

Якщо у числовому виразі можна виконати всі зазначені в ньому дії, то здобуте в результаті число називають числовим значенням даного виразу.

Вирази, до складу яких входять не лише числа, а й змінні, позначені буквами, знаки дій, функції і дужки, називаються виразами із змінними. Наприклад,

$$x + 2y; \ \frac{2a + b}{\sqrt{3}(a - b)}; \ \frac{\sin A}{b}; \ \sqrt{a^2 - b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Математичні вирази, в яких над числами і буквами, що входять до виразів, виконуються дії додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до натурального степеня і добування арифметичного кореня, називаються алгебраїчними виразами. Наприклад, алгебраїчними є вирази:

$$x - y; \ \frac{2a}{b - a}; \ 5 + \frac{\sqrt{a}}{b}; \ \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - x + y}{\sqrt{x + y}}.$$

Алгебраїчний вираз називається раціональним, якщо відносно змінних (букв), що до нього входять, виконуються лише дії додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня.

Наприклад, $\frac{2a}{b - a}$; $12m - \sqrt{2} \cdot mn$; $\frac{\sqrt[3]{12}x}{x^2 - \pi x}$.

Алгебраїчний вираз називається ірраціональним, якщо в ньому виконуються дії добування арифметичного кореня з букв (змінних) або виразів, що містять букви (змінні).

Наприклад, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+2ab$; $\sqrt{3a-5}$; $\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}$.

Раціональний вираз називається цілим, якщо він не містить дії ділення на змінну (букву) або на вираз, що містить змінну. Наприклад, цілими є вирази $2\frac{7}{12}-3$; $a-b$; $\frac{x+y}{7}$; $\frac{2}{5}$; 23.

У курсі алгебри вивчали два види цілих раціональних виразів – одночлени і многочлени. Вирази, що не містять інших дій крім дії множення і піднесення до натурального степеня, називають одночленами. Наприклад, одночленами є вирази: 5, 3; $7m$; $\frac{2}{3}ab^2$; $\frac{x^2y}{5}$. Многочленом називають суму одночленів. Наприклад, многочленами є вирази $a^2+2ab+b^2$; $5+xy-2x$.

Раціональний вираз називають дробовим, якщо він містить дію ділення на змінну або на вираз, що містить змінну. Наприклад, дробовими є вирази $\frac{2a}{b}$; $\frac{5}{x}-6x$; $\frac{3x}{x-1}$.

У зв'язку з розглядом дробових виразів не слід ототожнювати поняття алгебраїчного дробу і дробового виразу.

Дріб — це вираз виду $\frac{a}{b}$, де a і b — числові вирази або вирази із змінними. Наприклад, вирази $\frac{2}{3}$, $\frac{5a}{7}$, $\frac{2,3}{b}$; $\frac{x^2-y^2}{xy}$ є дробами, але лише два останніх з них — дробові вирази.

Вирази $5-\frac{2}{a}$; $\frac{2,1x-y}{x}-5x$ — дробові, але вони не є дробами, хоча і можуть бути зведені до дробів.

Дріб – форма запису числового виразу або виразу із змінними. Звичайні дроби є окремим випадком алгебраїчних дробів і теж є формою запису числового виразу. У формі звичайного дробу можна записати як ціле, так і дробове числа, наприклад $\frac{10}{2}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{45}{7}$.

Вирази, що містять $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, називають тригонометричними.

Два вирази із змінними називаються тотожно-рівними на множині, якщо їх відповідні значення збігаються при всіх значеннях змінних, що належать цій множині. Під відповідними розуміють значення, які дістають при підстановці у вирази однакових значень змінних.

П р и к л а д. Вирази $5(x+2)$; $5x+10$ — тотожно-рівні на множині всіх чисел; вирази $\frac{4a^2}{6a}$ і $\frac{2a}{3}$ — тотожно рівні на множині всіх чисел, крім нуля. Вирази a^2-b^2 і $(a-b)(a+b)$ – тотожно-рівні на множині всіх пар чисел.

Тотожним перетворенням виразу називається заміна виразу тотожно-рівним йому.

Рівність, в якій права і ліва частини — тотожно-рівні вирази на певній множині, називається тотожністю на цій множині. Основними алгебраїчними тотожностями є такі:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);\ (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$$

$$\sqrt{a^2}=|a|;\ (\sqrt{a})^2=a.$$

Основними тригонометричними тотожностями є:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1;\ 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Під час виконання тотожних перетворень, обчислення значень тригонометричних виразів широко використовують тотожності, що дістали назву формул зведення (див. табл.4), а також тотожності:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\sin\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \text{ та ін.}$$

2. Тотожні перетворення цілих виразів. Одночлени і многочлени. Стандартним виглядом одночлена називається такий вираз, який можна зобразити як добуток коефіцієнта (числового множника) і степенів різних змінних, що взяті співмножником лише один раз. Наприклад, $2a^2b^3$; $-6,5xy^3z$; $\frac{2}{5}m^3n^2$; $-xyz$.

Щоб звести одночлен до стандартного вигляду, треба:

1) перемножити числові множники і поставити здобуте число на перше місце в добутку;

2) перемножити степені однакових змінних і записати їх як співмножники.

Зведення одночлена до стандартного вигляду — тотожне перетворення. Тотожним перетворенням одночленів є також множення одночленів і обернене до нього перетворення — зображення одночлена у вигляді добутку двох або кількох одночленів, піднесення одночленів до степеня з натуральним показником, зображення одночлена у вигляді степеня.

П р и к л а д 1. Звести вираз до стандартного вигляду одночлена:

а) $-2\frac{2}{3}m^2n \cdot \frac{3}{8}mn$; б) $-6c^2d \cdot (-3c^2d^2)$;

в) $(-3x^2y^3)^2$.

Р о з в ' я з а н н я.

а) $-2\frac{2}{3}m^2n \cdot \frac{3}{8}mn = -\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8}m^2n^2 = -m^3n^2$;

б) $-6c^2d \cdot (-3c^2d^2) = -18c^4d^3$;

в) $(-3x^2y^3)^2 = 9x^4y^6$.

П р и к л а д 2. Подати одночлени у вигляді добутку двох будь-яких одночленів:

а) $-12x^3y^2$; б) $\frac{2}{3}a^4b^6$; в) $-0,25mn^2$.

Р о з в ' я з а н н я.

а) $-12x^3y^2 = (-2xy) \cdot (6x^2y)$;

б) $\frac{2}{3}a^4b^6 = (2a^2b^2) \cdot \left(\frac{1}{3}a^2b^4\right)$;

в) $-0,25mn^2 = (0,5n) \cdot (-0,5mn)$.

П р и к л а д 3. Перетворити вирази в одночлени стандартного вигляду:

а) $(2ab^3)^4$; б) $(-0,3x^2y^4)^3$; в) $\left(\frac{2}{5}m^2n\right)^4$.

Р о з в ' я з а н н я. а) $(2ab^3)^4 = 32a^4b^{12}$;

б) $(-0,3x^2y^4)^3 = -0,027x^6y^{12}$;

в) $\left(\frac{2}{5}m^2n\right)^4 = \frac{32}{625}m^8n^4$.

П р и к л а д 4. Подати одночлени у вигляді степеня:

а) $9a^2b^6$; б) $-0,027x^6y^9$; в) $\frac{3}{4}m^2n^2$.

Р о з в ' я з а н н я. а) $9a^2b^6 = (3ab^3)^2$;

б) $-0,027x^6y^9 = (-0,3x^2y^3)^3$;

в) $\frac{3}{4}m^2n^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}mn\right)^2$.

Простішим перетворенням многочленів є зведення їх подібних членів, тобто членів, які відрізняються лише коефіцієнтами.

Щоб звести подібні члени многочлена, слід додати їх коефіцієнти і приписати до утвореного числа як співмножники степені змінних.

Основним перетворенням многочлена є зведення його до стандартного вигляду. Для цього треба:

1) всі члени многочлена звести до стандартного вигляду;

2) звести подібні члени многочлена.

П р и к л а д. Звести до стандартного вигляду многочлен:

$$a^3 + 2aba + b^2a - 2bba - 2b^2b.$$

Р о з в ' я з а н н я. $a^3 + 2aba + b^2a - 2bba - 2b^2b = a^3 + 2a^2b + ab^2 - 2ab^2 - 2b^3 = a^3 + 2a^2b - ab^2 - 2b^3$.

Якщо многочлен після зведення його до стандартного вигляду перетворюється на нуль, то його називають нульовим многочленом. Наприклад, многочлени $2x - 2x = 0$; $5m^2n - 7m^2n + 2m^2n = 0$.

Степінь ненульового многочлена — це найбільший із степенів одночленів, що входять у многочлен після зведення його до стандартного вигляду. При цьому степенем одночлена називається сума показників степенів змінних. Наприклад, одночлен $7m^2n$ має третій степінь. Многочлен $3xy^2 - 2xy + 7y^4$ є многочленом четвертого степеня.

До тотожних перетворень виразів, що мають у складі многочлени і одночлени, належать:

1) перетворення добутку (множення) одночлена на многочлен у многочлен стандартного вигляду і обернене до нього перетворення — розкладання многочлена на множники способом винесення одночленного множника за дужки;

2) перетворення добутку (множення) двох многочленів у многочлен стандартного вигляду і обернене перетворення — розкладання многочлена на множники, кожний з яких є многочленом.

Щоб помножити одночлен на многочлен, слід помножити цей одночлен на кожний член многочлена і утворені добутки додати.

Приклад. Перетворити вираз у многочлен:

$$-0,2x^3 \cdot (2,3x^2y - 0,9x + 3).$$

Розв'язання. $-0,2x^3 \cdot (2,3x^2y - 0,9x + 3) = -0,46x^5y + 0,18x^4 - 0,6x^3$.

Щоб розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки, треба:

1) знайти спільний множник всіх одночленів многочлена;

2) подати кожний член многочлена у вигляді добутку двох одночленів, що мають один спільний множник;

3) винести спільний множник за дужки, використовуючи розподільний закон множення.

Щоб знайти спільний множник, слід знайти найбільший за модулем спільний дільник усіх коефіцієнтів одночленів і помножити його на кожну змінну в степені з найменшим показником, який вона має в даному многочлені.

Приклади.

1) $12x^4 - 8x^3 + 2x^2 = 2x^2 \cdot 6x^2 - 2x^2 \cdot 4x + 2x^2 \cdot 1 = 2x^2(6x^2 - 4x + 1)$;

2) $-9x^4y^2 - 18x^2y + 12x^3y^2 = -3x^2y \cdot 3x^2y + (-3x^2y)6 - (-3x^2y) \cdot 4xy = -3x^2y(3x^2y + 6 - 4xy)$.

Щоб помножити многочлен на многочлен, треба кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена, утворені добутки додати і звести здобутий многочлен до стандартного вигляду.

П р и к л а д. $(2-2x+x^2)(x+5)=2x-2x^2+x^3+$ $+10-10x+5x^2=x^3+3x^2-8x+10.$

Перетворенням, оберненим до множення многочленів, є розкладання многочлена на множники, кожний з яких є многочленом. Виконують це перетворення способом групування. Для цього групують члени многочлена так, щоб доданки у кожній групі мали спільний множник, а після винесення спільного множника в дужках кожної групи виявились однакові многочлени. Потім однакові многочлени знову виносять за дужки.

П р и к л а д. Розкласти на множники многочлен $xy+$ $+2y-2x-4$.

Р о з в ' я з а н н я. $xy+2y-2x-4=(xy+2y)+$ $+(-2x-4)=y(x+2)-2(x+2)=(x+2)(y-2).$

У цьому разі групування можна виконати інакше:

$$xy+2y-2x-4=(xy-2x)+(2y-4)=x(y-2)+$$
$$+2(y-2)=(y-2)(x+2).$$

Під час виконання тотожних перетворень многочленів інколи зручно застосувати формули скороченого множення:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2. \qquad (1)$$

Добуток різниці двох виразів на їх суму дорівнює різниці квадратів цих виразів. Якщо записати цю тотожність справа наліво, то матимемо рівність

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b). \qquad (2)$$

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на їх суму.

Формулу (1) використовують для скороченого множення різниці двох виразів на їх суму.

П р и к л а д. $(9m^2-5n)(-9m^2-5n)=-(9m^2-$ $-5n)(9m^2+5n)=-(81m^4-25n^2)=25n^2-81m^4.$

Формулу (2) використовують для розкладу на множники різниці квадратів будь-яких двох виразів.

П р и к л а д. $81x^2y^4 - 16a^2 = (9xy^2)^2 - (4a)^2 = (9xy^2 - 4a)(9xy^2 + 4a)$.

При піднесенні до квадрата суми і різниці двох виразів використовують такі **тотожності:**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{3}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{4}$$

Квадрат суми (різниці) двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс (мінус) подвоєний добуток першого і другого виразів, плюс квадрат другого виразу. Тотожності (3) і (4) називають відповідно **формулою квадрата суми (різниці) двох виразів. Їх використовують при перетворенні** тричленів виду $a^2 \pm 2ab + b^2$ у квадрат **двочлена або при розкладанні його на множники.**

П р и к л а д. $\frac{1}{4}x^2 + 4xy + 16y^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}4y + (4y)^2 = \left(\frac{1}{2}x + 4y\right)^2$.

При множенні двочлена на тричлен певного виду зручно використовувати такі тотожності:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3, \tag{5}$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3. \tag{6}$$

Добуток суми (різниці) двох виразів на неповний квадрат їх різниці (суми) дорівнює сумі (різниці) кубів цих виразів.

П р и к л а д и. 1) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) = 8x^3 + y^3$; 2) $(0,3 - 2c)(0,09 + 0,6c + 4c^2) = 0,027 - 8c^3$.

Якщо використовувати тотожності (5) і (6) у зворотному порядку під час розкладання двочленів певного виду на множники, то дістанемо такі формули суми (різниці) кубів:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \tag{7}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \tag{8}$$

Сума (різниця) кубів двох виразів дорівнює добутку суми (різниці) цих виразів на неповний квадрат їх різниці (суми).

Приклади. 1) $27x^3 + 8y^3 = (3x)^3 + (2y)^3 = (3x+$
$+2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$;

2) $8 - \frac{1}{27}a^3 = 2^3 - \left(\frac{1}{3}a\right)^3 = \left(2 - \frac{1}{3}a\right)\left(4 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}a^2\right)$.

3. Алгебраїчні дроби та дробові вирази. Основними видами тотожних перетворень алгебраїчних дробів є:

скорочення $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, де $b \neq 0$, $c \neq 0$;

заміна дробу тотожно-рівними виразами за формулами:

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b};\ \frac{a}{b} = -\frac{a}{-b};$$

зведення їх до спільного знаменника;

перетворення суми і різниці, добутку, частки, степеня дробів у дріб, чисельник і знаменник якого — многочлени стандартного вигляду.

Як правило, алгебраїчні дроби намагаються звести до простішого спільного знаменника. Щоб знайти простіший спільний знаменник двох або кількох дробів треба:

1) скласти добуток найменшого спільного кратного коефіцієнтів знаменників даних дробів і степенів кожної змінної (букви) з найбільшим показником, який має змінна у знаменниках даних дробів;

2) знайти додатковий множник кожного з даних дробів: для цього слід зобразити спільний знаменник у вигляді добутку двох одночленів, з яких один — знаменник даного дробу, тоді другий буде її додатковим множником;

3) знайти добуток чисельника кожного дробу на додатковий множник і записати спільний знаменник.

Приклад. Звести дроби $\frac{5a}{6b^2c}, \frac{7b}{12ac^3}, \frac{11c}{18a^2b}$ до простішого спільного знаменника.

Розв'язання. 1) Простіший спільний знаменник для даних дробів є одночлен $36a^2b^2c^3$.

2) Визначимо додаткові множники дробів:

$36a^2b^2c^3 = 6b^2c \cdot 6a^2c^2$; $6a^2c^2$ – для першого;

$36a^2b^2c^3 = 12ac^3 \cdot 3ab^2$; $3ab^2$ – для другого;

$36a^2b^2c^3 = 18a^2b \cdot 2bc^3$; $2bc^3$ – для третього.

3) $\dfrac{5a}{6b^2c} = \dfrac{5a \cdot 6a^2c^2}{6b^2c \cdot 6a^2c^2} = \dfrac{30a^3c^2}{36a^2b^2c^3}$;

$$\frac{7b}{12ac^3} = \frac{7b \cdot 3ab^2}{12ac^3 \cdot 3ab^2} = \frac{21ab^3}{36a^2b^2c^3};$$

$$\frac{11c}{18a^2b} = \frac{11c \cdot 2bc^3}{18a^2b \cdot 2bc^3} = \frac{22bc^4}{36a^2b^2c^3}.$$

Додавання і віднімання алгебраїчних дробів з однаковими знаменниками здійснюють аналогічно до виконання цих дій для звичайних дробів.

Щоб додати (відняти) алгебраїчні дроби з однаковими знаменниками, треба записати у чисельнику суму (різницю) їх чисельників, а знаменник залишити спільний. Якщо можливо, то здобутий дріб треба скоротити.

Щоб додати (відняти) дроби з різними знаменниками, треба:

звести дроби до простішого спільного знаменника;

додати (відняти) здобуті дроби за правилом додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

Приклади. 1) Додати дроби: $\dfrac{12-a}{6a-36} + \dfrac{6}{6a-a^2}$.

2) Відняти дроби: $\dfrac{1}{xy-y^2} - \dfrac{1}{x^2-xy}$.

Розв'язання.

1) $\dfrac{12-a}{6a-36} = \dfrac{6}{6a-a^2} = \dfrac{12-a}{6(a-6)} + \dfrac{6}{a(6-a)} =$

$= \dfrac{12-a}{6(a-6)} - \dfrac{6}{a(a-6)} = \dfrac{12a-a^2-36}{6a(a-6)} =$

$= \dfrac{-(a^2-12a+36)}{6a(a-6)} = \dfrac{-(a-6)^2}{6a(a-6)} = \dfrac{6-a}{6a}$.

2) $\dfrac{1}{xy-y^2} - \dfrac{1}{x^2-xy} = \dfrac{1}{y(x-y)} - \dfrac{1}{x(x-y)} =$

$$= \frac{x-y}{xy(x-y)} = \frac{1}{xy}.$$

До перетворення суми або різниці дробів зводиться перетворення дробових виразів, які є сумою або різницею цілого виразу і дробу. Для цього досить записати цілий вираз у вигляді дробу із знаменником 1.

Приклад. $a+b-\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{a+b}{1} - \frac{a^2+b^2}{a-b} =$

$$= \frac{(a+b)(a-b)-(a^2+b^2)}{a-b} = \frac{a^2-b^2-a^2-b^2}{a-b} =$$

$$= \frac{-2b^2}{a-b} = \frac{2b^2}{b-a}.$$

Множення і ділення алгебраїчних дробів теж виконують за аналогією до множення звичайних дробів.

Щоб помножити дріб на дріб, треба окремо перемножити їх чисельники і знаменники і перший добуток записати як чисельник, а другий – як знаменник. Після цього здобутий дріб слід скоротити, якщо це можливо.

Приклад. $\frac{8d^2}{21c^3} \cdot \frac{6c^2}{7d} = \frac{8d^2 \cdot 6c^2}{21c^3 \cdot 7d} = \frac{16d}{49c}.$

Щоб піднести дріб до степеня з натуральним показником, треба піднести до цього степеня окремо чисельник і знаменник і перший результат записати як чисельник, а другий — як знаменник.

Приклад. $\left(\frac{2a^2b}{3mn^2}\right)^3 = \frac{(2a^2b)^3}{(3mn^2)^3} = \frac{8a^6b^3}{27m^3n^6}.$

Щоб розділити один алгебраїчний дріб на другий, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Приклад. $\frac{x^2-4y}{xy} : \frac{x^2-2xy}{3y} = \frac{x^2-4y}{xy} \cdot \frac{3y}{x^2-2xy} =$

$$= \frac{(x^2-4y)\cdot 3y}{x^2y\cdot(x-2y)} = \frac{3x^2-12y}{x^3-2x^2y}.$$

Основна задача тотожних перетворень раціональних виразів загального виду, що містять цілі і дробові вирази, полягає в зведенні виразу до дробу, у якого чисельник і знаменник — многочлени стандартного вигляду. При цьому порядок виконання перетворень такий самий, як і порядок виконання дій у числових виразах.

П р и к л а д. Спростити вираз $x - \frac{ax}{a-x} : \frac{a+x}{a} + \frac{ax^2}{a^2-x^2}$.

Р о з в' я з а н н я. $x - \frac{ax}{a-x} : \frac{a+x}{a} + \frac{ax^2}{a^2-x^2} =$

$$= x - \frac{ax}{a-x} \times \frac{a}{a+x} + \frac{ax^2}{a^2-x^2} = \frac{x}{1} - \frac{a^2x}{a^2-x^2} + \frac{ax^2}{a^2-x^2} = \frac{x(a^2-x^2) - a^2x + ax^2}{a^2-x^2} =$$

$$= \frac{a^2x - x^3 - a^2x + ax^2}{a^2-x^2} = \frac{x^2(a-x)}{a^2-x^2} =$$

$$= \frac{x^2(a-x)}{(a-x)(a+x)} = \frac{x^2}{a+x}.$$

4. Ірраціональні вирази. Квадратний корінь і його властивості. Квадратним коренем з числа a називаються числа, квадрати яких дорівнюють a. Наприклад, числа 4 і -4 — квадратні корені з числа 16, оскільки $4^2 = 16$ і $(-4)^2 = 16$. Квадратний корінь з числа 0 дорівнює 0. Корінь з числа 0 є единим, оскільки у множині дійсних чисел тільки $0^2 = 0$.

Квадратного кореня з від'ємного числа не існує, оскільки у множині дійсних чисел не існує числа, квадрат якого дорівнював би від'ємному числу. Наприклад, не існує квадратного кореня з числа -25, оскільки при множенні дійсних чисел не існує числа, квадрат якого дорівнював би -25.

Дію добування квадратного кореня з числа використовують під час розв'язування квадратних рівнянь, зокрема рівняння $x^2 = 16$. За означенням квадратного кореня, рівняння $x^2 = 16$ має два розв'язки (корені), які є квадратним коренем з числа 16. Додатний корінь 4 цього рівняння називають арифметичним квадратним коренем числа 16.

Число 0 – корінь рівняння $x^2 = 0$. Його також називають арифметичним коренем з числа 0.

У загальному випадку: арифметичним квадратним коренем з числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a, і його позначають $\sqrt{a}$.

Оскільки квадрат будь-якого числа — невід'ємне число, то для $a < 0$ вираз $\sqrt{a}$ у множині дійсних чисел не має смислу. Наприклад, не мають смислу вирази $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-0,25}$, $\sqrt{-\frac{1}{4}}$.

Арифметичний квадратний корінь має такі властивості:

1) якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, тобто корінь з добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів;

2) якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, тобто корінь з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник — додатний, дорівнює кореню чисельника, поділеному на корінь знаменника;

3) для будь-якого значення числа a маємо $\sqrt{a^2} = |a|$.

Останню тотожність використовують під час виконання тотожних перетворень ірраціональних виразів, розв'язування квадратних рівнянь і нерівностей. Зокрема, щоб розв'язати простіше квадратне рівняння $x^2 = 16$, треба добути арифметичний квадратний корінь з обох частин рівняння. Отже, $\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$; $|x| = 4$. Звідси $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, або $x_{1;2} = \pm 4$.

Основними тотожними перетвореннями ірраціональних виразів, що містять квадратні корені із змінних, є:

1) винесення множника з-під знака кореня;

2) внесення множника під знак кореня;

3) звільнення від кореня у знаменнику або чисельнику дробу.

П р и к л а д 1. Винести множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{x^9}$; б) $\sqrt{a^8b^3}$; в) $\sqrt{a^6b^{12}c^3}$; г) $\sqrt{a^5b^2}$.

Загальний підхід до розв'язування цих вправ полягає в тому, щоб попередньо подати підкореневий вираз у вигляді добутку двох співмножників, з яких один є квадратом одночлена, і скористатися тотожністю добування кореня з добутку і тотожністю $\sqrt{a^2} = |a|$.

Розв'язання. а) $\sqrt{x^9} = \sqrt{(x^4)^2 \cdot x} = \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{x} = x^4\sqrt{x}$; б) $\sqrt{a^8b^3} = \sqrt{(a^4b)^2b} = \sqrt{(a^4b)^2} \cdot \sqrt{b} = a^4b\sqrt{b}$, оскільки, за означенням арифметичного кореня, змінна b має бути невід'ємною, тобто $b \geqslant 0$;

в) $\sqrt{a^6b^{12}c^3} = \sqrt{(a^3b^6c)^2 \cdot c} = \sqrt{(a^3b^6c)^2} \cdot \sqrt{c} = |a^3|b^6c\sqrt{c}$.

За умовою існування арифметичного кореня, $c \geqslant 0$, а змінні a і b можуть бути будь-якими;

г) $\sqrt{a^5b^2} = \sqrt{(a^2b)^2 \cdot a} = \sqrt{(a^2b)^2} \cdot \sqrt{a} = a^2|b|\sqrt{a}$.

Приклад 2. Внести множник під знак кореня:

а) $5\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{a}$; в) $a\sqrt{3}$; г) $x\sqrt{-\frac{2}{x}}$.

Розв'язання. а) $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$;

б) від'ємний множник -3 не можна внести під знак кореня, оскільки його не можна подати у вигляді арифметичного кореня. Але вираз $-3\sqrt{a}$ можна перетворити так, щоб внести під знак кореня додатний множник 3; $-3\sqrt{a} = -1 \cdot 3\sqrt{a} = -\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{a} = -\sqrt{9a}$;

в) якщо $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{3} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3a^2}$; якщо $a < 0$, то $a\sqrt{3} = -(-a) \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{(-a)^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3a^2}$;

г) $x\sqrt{-\frac{2}{x}} = -(-x) \cdot \sqrt{-\frac{2}{x}} = -\sqrt{(-x)^2} \cdot \sqrt{-\frac{2}{x}} =$

$= -\sqrt{-\frac{2}{x} \cdot x^2} = -\sqrt{-2x}$, де $x < 0$ за умовою.

Приклад 3. Спростити вирази:

а) $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$;

б) $\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$.

Розв'язання. а) $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} =$

$= |2-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-1| = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 1$;

б) $\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{3}-$

$-5|+|1-\sqrt{3}|+|\sqrt{2}-1|=5-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1+\sqrt{2}-1=$
$=3+\sqrt{2}$.

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a називають невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a, і позначають його так: $\sqrt[n]{a}$.

Арифметичний корінь n-го степеня з числа a має смисл як для парного, так і для непарного показника a. Корінь непарного степеня з від'ємного числа можна записати, застосовуючи арифметичний корінь того самого степеня. Наприклад, $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$.

Взагалі, якщо n — непарне і $a < 0$, то $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$. Знак кореня n-го степеня використовують для запису розв'язків рівнянь виду $x^n = a$.

Наприклад, рівняння $x^5=-48$ у множині дійсних чисел має єдиний корінь $x=\sqrt[5]{-48}=-\sqrt[5]{48}$.

Арифметичний корінь n-го степеня має ті самі властивості, що і арифметичний квадратний корінь:

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, якщо $a \geqslant 0$, $b > 0$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$, якщо $a \geqslant 0$, n і k — натуральні числа;

4) $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$, якщо n, k, m — натуральні числа.

5. Степінь з раціональним показником і його властивості.

О з н а ч е н н я. *Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називається добуток n співмножників, кожний з яких дорівнює a. Степенем числа a з показником 1 називається саме число a, тобто*

$$a^n = a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a;\quad a^1 = a.$$

Будь-який степінь з натуральним показником додатного числа — завжди число додатне, непарний степінь від'ємного числа є число від'ємне. Справді, $3^4 = 3\cdot 3\cdot 3 \times \times 3 = 81$; $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$; $(-3)^3 = = (-3)(-3)(-3) = -27$.

Якщо $a=0$, то $a^n=0$. Наприклад, $0^3=0\cdot 0\cdot 0=0$.

Степінь з натуральним показником має такі властивості.

1) Для будь-якого a і довільних натуральних чисел m і n маємо $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, тобто при множенні степенів з однаковими основами показники степенів додаються, а основа залишається тією самою.

2) Для будь-якого a і довільних натуральних чисел m і n таких, що $m > n$, маємо $a^m : a^n = a^{m-n}$, тобто при діленні степенів з однаковими основами, відмінними від нуля, від показника степеня діленого віднімається показник степеня дільника, а основа залишається тією самою.

Будь-яке число, що не дорівнює нулю, у нульовому степені дорівнює одиниці, тобто $a^0 = 1$, $a \neq 0$.

Після введення означення степеня з нульовим показником можна застосовувати формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ і у випадку, коли $m = 0$, або $n = 0$, або $m = 0$ і $n = 0$ (якщо $a \neq 0$), а формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$, якщо $m \geqslant 0$ ($a \neq 0$).

3) Для будь-яких a і b довільного натурального числа n

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,$$

тобто при піднесенні до степеня добутку підноситься до цього степеня кожний множник окремо і результати перемножуються.

Ця властивість виконується і для степенів з нульовим показником, якщо основи відмінні від нуля.

4) Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ і довільного натурального n

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

тобто при піднесенні до степеня дробу окремо підносимо до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат ділимо на другий.

5) Для будь-якого числа a і довільних натуральних чисел m і n

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

тобто при піднесенні степеня до степеня показники степенів перемножують, а основу залишають ту саму.

Якщо $a \neq 0$ і n — ціле від'ємне число, то

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Наприклад, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Всі властивості степенів з натуральним показником виконуються і для степенів з цілим показником за умови, що основа степеня не дорівнює нулю.

Якщо a — додатне число, а $\frac{m}{n}$ — дробове число (m — ціле, n — натуральне), то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

За означенням,

$$3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3}; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{2,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^5};$$

$$3^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{3^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

Степінь, що дорівнює нулю, означається лише для додатного дробового показника: якщо $\frac{m}{n}$ — додатне дробове число (m і n — натуральні числа), то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Для степенів з раціональним, зокрема дробовим, показником виконуються всі властивості, що встановлені для степенів з цілими показниками.

Тотожні перетворення виразів, що містять арифметичні корені будь-якого степеня і степені з дробовим показником, виконують на основі властивостей арифметичних коренів і властивостей степенів.

Приклад 1. Спростити вирази:

а) $\left(\sqrt{12} - \frac{1}{5}\sqrt{75} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} - \frac{1}{5}\sqrt{75 \cdot 3} + \frac{1}{3}\sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{36} - \frac{1}{5}\sqrt{225} + \frac{1}{3}\sqrt{9} = 6 - 3 + 1 = 4;$

б) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{ab} - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\sqrt{ab} = \frac{a}{b}\sqrt{(ab)^2} - 2\sqrt{b^2} + \sqrt{\frac{ab \cdot 1}{ab}} = a^2 - 2b + 1, \quad a > 0, \quad b > 0;$

в) $\left(1 + c^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{1}{2}} = 1 + 2c^{\frac{1}{2}} + \left(c^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{1}{2}} = 1 + c;$

г) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\right) \cdot \left(\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) + \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\right) = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right) = 2a^{\frac{1}{3}} \cdot 2b^{\frac{1}{3}} = 4(ab)^{\frac{1}{3}}.$

П р и к л а д 2. Обчислити значення виразу

$$\left(\frac{5x^3+5x^2y}{2}:(x^2y-y^3)\right)\cdot\left(\frac{(x+y)^2}{4xy}-1\right),$$

якщо $x \approx 15,2$; $y \approx 3,25$.

Р о з в' я з а н н я. $\left(\frac{5x^3+5x^2y}{2}:(x^2y-y^3)\right)\cdot\left(\frac{(x+y)^3}{4xy}-\right.$

$$\left.-1\right)=\left(\frac{5x^2(x+y)}{2}:\frac{y(x+y)(x-y)}{1}\right)\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4xy}=$$

$$=\frac{5x^2(x+y)\cdot 1}{2y(x+y)(x-y)}\cdot\frac{(x-y)^2}{4xy}=\frac{5x^2(x+y)(x-y)^2}{8xy^2(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{5x(x-y)}{8y^2}\approx\frac{5\cdot 15,2(15,2-3,25)}{8\cdot 3,25^2}\approx\frac{5\cdot 15,2\cdot 12,0}{8\cdot 3,25^2}\approx 10,8.$$

§ 3. Рівняння і нерівності

1. Числові рівності і нерівності. Властивості числових рівностей і нерівностей мають певні аналогії, але й істотні відмінності (табл. 36).

Означення, властивості числових рівностей і нерівностей використовують під час доведення тотожностей і нерівностей. Нагадаємо три основних способи доведення тотожностей:

1) скласти різницю лівої і правої частин тотожності і перетворенням здобутого виразу показати, що вона дорівнює 0;

2) тотожно перетворюючи ліву частину, показати, що ліва частина тотожності дорівнює правій, або, навпаки, тотожно перетворюючи праву частину, показати, що вона дорівнює лівій;

3) ліву і праву частини тотожності окремо перетворити у той самий вираз.

П р и к л а д 1. Довести тотожність $\frac{a+b}{2(a-b)}-$

$$-\frac{a-b}{2(a+b)}=\frac{b}{a-b}-\frac{b^2-ab}{a^2-b^2}.$$

Д о в е д е н н я. $\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}-\frac{b}{a-b}+$

$$+\frac{b^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2-2b(a+b)+2(b^2-ab)}{2(a^2-b^2)}=$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2-2ab-2b^2+2b^2-2ab}{2(a^2-b^2)}=0.$$

Приклад 2. Довести тотожність $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

Доведення. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)=((a^2+1)+a)((a^2+1)-a)=(a^2+1)^2-a^2=a^4+2a^2+1-a^2=a^4+a^2+1$.

Таблиця 36

Числова рівність	Числова нерівність
1. Число a називається рівним числу b, якщо різниця $a-b$ дорівнює 0. Позначається $a=b$	1. Число a називається більшим від числа b, якщо різниця $a-b$ додатна. Позначається: $a>b$. Число a називається меншим від числа b, якщо різниця $a-b$ від'ємна. Позначається: $a<b$.
2. Для будь-якого a співвідношення $a=a$ правильне.	2. Для будь-якого a співвідношення $a>a$ і $a<a$ хибні.
3. Для будь-яких a і b, якщо $a=b$, то $b=a$	3. Для будь-яких a і b, якщо $a>b$, то $b<a$. Навпаки, якщо $a<b$, то $b>a$.
4. Для будь-яких a, b і c, якщо $a=b$ і $b=c$, то $a=c$ (властивість транзитивності рівності)	4. Для будь-яких a, b і c, якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$; якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$ (властивість транзитивності нерівностей).
5. Якщо $a=b$ і c – будь-яке число, то $a+c=b+c$	5. Якщо $a<b$ і c – будь-яке число, то $a+b<b+c$; якщо $a>b$ і c – будь-яке число, то $a+c>b+c$.
6. Якщо $a=b$ і c – будь-яке число, то $ac=bc$	6. Якщо $a<b$ і $c>0$, то $ac<bc$; якщо $a<b$ і $c<0$, то $ac>bc$; якщо $a>b$ і $c>0$, то $ac>bc$; якщо $a>b$ і $c<0$, то $ac<bc$.
7. Якщо $a=b$ і $c=d$, то $a+c=b+d$	7. Якщо $a<b$ і $c<d$, то $a+c<b+d$; якщо $a>b$ і $c>d$, то $a+c>b+d$.

Числова рівність	Числова нерівність
8. Якщо $a = b$ і $c = d$, то $ac = bd$. Наслідок: якщо $a = b$, то $a^2 = b^2$	8. Якщо $a < b$, $c < d$, a, b, c, d – додатні числа, то $ac < bd$; якщо $a > b$, $c > d$ і a, b, c, d – додатні числа, то $ac > bd$. Наслідок: якщо $a < b$ і a, b – додатні числа, то $a^2 < b^2$; якщо $a > b$ і a, b – додатні числа, то $a^2 > b^2$.
9. Якщо $a = b$ і $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	9. Якщо числа a і b – одного знаку і $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; якщо числа a і b одного знаку і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

П р и к л а д 3. Довести тотожність $\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : (a - b) = \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

Д о в е д е н н я. $\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : (a - b) =$

$$= \frac{a(a+b) - 4ab + b(a+b)}{a+b} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{a^2 + ab - 4ab + ab + b^2}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a+b}; \qquad \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} - \frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{a(a-b) + b(a+b) - 2ab}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a^2 - ab + ab + b^2 - 2ab}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Нерівності, складені за допомогою знаків $>$ або $<$, називають строгими нерівностями, а складені за допомогою знаків $\geqslant$ або $\leqslant$, називають нестрогими нерівностями. Один із способів доведення строгих і нестрогих нерівностей грунтується на означенні числових нерівностей.

П р и к л а д 4. Довести $\frac{c}{c^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Д о в е д е н н я. Складемо різницю лівої і правої частин даної нерівності і перетворимо її:

$$\frac{c}{c^2+1}-\frac{1}{2}=\frac{2c-c^2-1}{2(c^2+1)}=\frac{-(c^2-2c+1)}{2(c^2+1)}=\frac{-(c-1)^2}{2(c^2+1)}\leqslant 0.$$

Знаменник дробу для будь-якого c додатний, а вираз $(c-1)^2$ невід'ємний. Тому чисельник дробу недодатний, а отже, і дріб для будь-якого c недодатний. Оскільки доведено, що різниця лівої і правої частин нерівності недодатна, то нерівність $\frac{c}{c^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$ виконується для будь-якого c.

2. Рівняння. Нерівності зі змінною. Рівняння і системи рівнянь. Рівність із змінною, відносно якої треба встановити, для яких її значень (можливо, таких значень і не існує) рівність перетворюється у правильну числову, називається рівнянням.

Наприклад, $5x-x=28$; $x^2-4=0$; $2(x+3)=5x-7$.

Коренем (розв'язком) рівняння з однією змінною називається значення змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну числову рівність, або, інакше кажучи, при якому змінна задовольняє рівняння.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені (розв'язки) або довести, що рівняння коренів не має. Рівняння, в якому ліва і права частини є раціональними виразами, називається раціональним. Наприклад, $5(x-1)=$

$= 2x+3$; $\frac{2}{x-5}=\frac{3}{x+5}$.

Якщо ліва і права частини раціонального рівняння — цілі вирази, то рівнянння називається цілим. Раціональні рівняння, в яких хоча б одна частина рівняння є дробовим виразом, називають дробовими. Наприклад, перше з наведених вище рівнянь — ціле, а друге — дробове.

Два рівняння з однією змінною називаються рівносильними, якщо корені першого рівняння є коренями другого і, навпаки, корені другого рівняння є коренями першого.

Рівняння мають такі основні властивості:

1) якщо до обох частин рівняння додати одне й те саме число чи вираз зі змінною, що не втрачає смислу ні за яких значень змінної, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо обидві частини рівняння помножити або розділити на одне й те саме число, що не дорівнює нулю, чи на вираз зі змінною, який не перетворюється на нуль ні за яких значень змінної і не втрачає смислу на множині допустимих значень змінної для даного рівняння, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

З першої властивості випливає, що можна переносити будь-який член рівняння з однієї його частини в іншу, змінюючи попередньо знак цього члена на протилежний.

Розв'язком рівняння з двома змінними називається пара значень змінних, яка перетворює це рівняння у правильну числову рівність. Наприклад, для рівняння $x-y=5$ пара (6; 1) є розв'язком.

Якщо треба знайти спільні розв'язки двох рівнянь з двома змінними, то кажуть, що треба розв'язати систему двох рівнянь з двома змінними, наприклад

$$\begin{cases} 2x - y = 24, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називається пара значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи у правильну числову рівність. Наприклад, пара $x = 11$, $y = -2$, або (11; -2) є розв'язком попередньої системи.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що система розв'язків не має.

Дві системи рівнянь називаються рівносильними, якщо розв'язки першої системи є розв'язками другої і, навпаки, розв'язки другої системи є розв'язками першої.

Під час розв'язування систем рівнянь з двома змінними використовують спосіб підстановки, спосіб алгебраїчного додавання і графічний спосіб.

П р и к л а д 1. Розв'язати систему $\begin{cases} xy = -6, \\ x - y = 7. \end{cases}$

Р о з в ' я з а н н я. Визначимо x через y з другого рівняння і підставимо замість x його значення у перше:

$$x = 7 + y; \quad (7 + y)y = -6; \quad y^3 + 7y + 6 = 0.$$

Дістали квадратне рівняння відносно змінної y. Запишемо його розв'язки: $y_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \dfrac{-7 \pm 5}{2}$;
$y + 1 = -6$; $y_2 = -1$.

Визначимо x, підставивши послідовно значення y_1 і y_2 у рівність $x = 7 + y$. Маємо $x_1 = 1$; $x_2 = 6$. В і д п о в і д ь. $(1; -6)$ і $(6; -1)$.

П р и к л а д 2. Розв'язати систему $\begin{cases} 40x + 3y = 10, \\ 20x - 7y = 22. \end{cases}$

Р о з в ' я з а н н я. Помножимо обидві частини другого рівняння на -2, а перше залишимо без зміни:

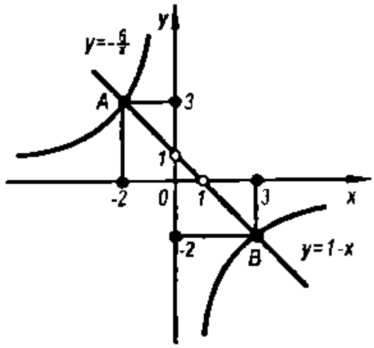
$$\begin{cases} 40x + 3y = 10, \\ -40x + 14y = -44. \end{cases}$$

Додамо ліві і праві частини обох рівнянь. Дістанемо рівняння $17y = -34$, яким замінимо одне з рівнянь даної системи $\begin{cases} 17y = -34, \\ 20x - 7y = 22. \end{cases}$

З першого рівняння здобутої системи знаходимо $y = -2$. Підставивши знайдене значення y в друге рівняння, знайдемо $x = \dfrac{2}{5}$. В і д п о в і д ь. $\left(\dfrac{2}{5}; -2\right)$.

П р и к л а д 3. Розв'язати систему $\begin{cases} xy = -6, \\ x + y = 1 \end{cases}$ графічним способом.

Р о з в ' я з а н н я. Побудуємо в одній системі координат графік рівнянь $xy = -6$ і $x + y = 1$. Для цього виразимо у кожному рівнянні змінну y через x. Дістанемо $y = \dfrac{-6}{x}$, $y = 1 - x$. Побудуємо графіки функцій, що задають ці формули, — гіперболу і пряму (мал. 194). Координати $(-2; 3)$, $(3; -2)$ точок A і B перетину графіків функцій є розв'язками системи. Отже, система має два розв'язки. В і д п о в і д ь. $(-2; 3)$, $(3; -2)$.



Мал. 194

3. Розв'язування нерівностей і систем нерівностей. Розв'язком нерівності з однією змінною називається значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність. Наприклад, число 10 є розв'язком нерівності $2x > 5$.

Розв'язати нерівність з однією змінною — означає знайти всі її розв'язки або довести, що нерівність розв'язків не має.

Дві нерівності називаються рівносильними, якщо розв'язки першої є розв'язками другої нерівності і, навпаки, розв'язки другої нерівності є розв'язками першої.

Областю визначення нерівності з однією змінною називають множину значень змінної, для яких ліва і права частини нерівності не втрачають смислу.

Нерівності з однією змінною мають такі властивості:

1) якщо до обох частин нерівності додати одне й те саме число або вираз із змінною, що не втрачає смислу в області визначення нерівності, то дістанемо нерівність, рівносильну даній;

2) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число або вираз зі змінною, який набуває додатних значень при всіх значеннях змінної з області визначення нерівності, то дістанемо нерівність, рівносильну даній;

3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число або на вираз із змінною, що набуває від'ємних значень при всіх значеннях змінної з області визначення нерівності, і змінити при

цьому знак нерівності на протилежний, то дістанемо нерівність, рівносильну даній.

Якщо треба знайти спільні розв'язки двох або кількох нерівностей, то це означає, що треба розв'язати систему нерівностей.

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називається значення змінної, яке перетворює кожну нерівність системи у правильну числову нерівність.

Розв'язати систему нерівностей — означає знайти всі її розв'язки або довести, що система не має розв'язків.

Способи розв'язування основних видів рівнянь і нерівностей мають певну аналогію (табл. 37).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник: $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Дістанемо: $2(x+1) = x^2 - x + 1 + 2x - 1$. Звідси $x^2 - x - 2 = 0$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$; $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

Якщо $x = -1$, спільний знаменник дробів перетворюється на нуль, тому цей корінь слід виключити. Якщо $x = 2$, спільний знаменник дробів не перетворюється на 0. Тому $x = 2$ є коренем рівняння. Відповідь. $x = 2$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{x^2 + x - 9}{x} < 1$.

Розв'язання.

$$\frac{x^2 + x - 9}{x} - 1 < 0; \quad \frac{x^2 + x - 9 - x}{x} < 0; \quad \frac{x^2 - 9}{x} < 0.$$

Звідси

$$\text{а)} \begin{cases} x^2 - 9 > 0, \\ x < 0, \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} x^2 - 9 < 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо графічно нерівність $x^2 - 9 > 0$. Побудуємо графік функції $y = x^2 - 9$ (мал. 195), звідки видно, що множиною розв'язків нерівності $x^2 - 9 > 0$ є об'єднання двох проміжків $(-\infty; -3)$ і $(3; +\infty)$. Множиною розв'язків системи а) є спільна частина множин розв'язків першої і другої нерівностей, тобто проміжок $(-\infty; -3)$.

Таблиця 37

Рівняння з однією змінною	Нерівність з однією змінною
1. Лінійним рівнянням з однією змінною називають рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — числа. Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$, рівняння має один корінь. Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то множиною коренів рівняння є множина всіх чисел. Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння не має коренів, тобто множина коренів — порожня множина.	1. Лінійною нерівністю з однією змінною називається нерівність виду $ax < b$ або $ax > b$ (відповідно $ax \leqslant b$ або $ax \geqslant b$, де x — змінна, a і b — числа. Якщо $a \neq 0$, то множиною розв'язків нерівності $ax < b$ є або множина $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$, або множина $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$. Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків нерівності $ax < b$ є або множина всіх чисел (для $b \geqslant 0$), або порожня множина (для $b < 0$). Якщо $a \neq 0$, то множиною розв'язків нерівності $ax > b$ є або множина $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$, або множина $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$. Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків є або порожня множина (для $b > 0$), або множина всіх чисел (для $b \leqslant 0$).
2. Квадратним рівнянням називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a \neq 0$.	2. Квадратною нерівністю з однією змінною називається нерівність виду $ax^2 + bx + c < 0$ або $ax^2 + bx + c > 0$ (відповідно $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ або $ax^2 + bx + c \geqslant 0$), де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a \neq 0$.

Рівняння з однією змінною	Нерівність з однією змінною
3. Якщо у квадратному рівнянні хоча б одне з чисел b чи c або b і c одночасно дорівнюють нулю, то таке рівняння називається неповним квадратним рівнянням. Якщо $c = 0$, дістанемо неповне квадратне рівняння $ax^2 + bx = 0$. Його розв'язують способом розкладання лівої частини рівняння на множники: $x(ax + b) = 0$. Звідси $x = 0$; $ax + b = 0$, $x = -\frac{b}{a}$. Рівняння має два корені: $x = 0$ і $x = -\frac{b}{a}$. Для $b = 0$ дістанемо квадратне рівняння $ax^2 + c = 0$, яке розв'язують так: $ax^2 = -c$, $x^2 = -\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то добуваємо арифметичний квадратний корінь з обох частин рівняння: $\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідси $\|x\| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Отже, $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $-x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідси $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.	3. Якщо у квадратній нерівності хоча б одне з чисел b чи c, або b і c одночасно дорівнюють нулю, то дістанемо неповну квадратну нерівність. Для $c = 0$ $ax^2 + bx > 0$ (або $ax^2 + bx < 0$). Її розв'язують способом розкладання лівої частини на множники: $x(ax + b) > 0$. Далі використовують твердження: добуток двох співмножників додатний тоді і тільки тоді, коли обидва співмножники мають однакові знаки. Отже, можна скласти дві системи нерівностей: а) $\begin{cases} x > 0, \\ ax + b > 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < 0, \\ ax + b < 0, \end{cases}$ які розв'язують відомим способом. Аналогічно розв'язують нерівність $ax^2 + bx < 0$. Якщо $b = 0$, маємо нерівність $ax^2 + cx > 0$ (або $ax^2 + c < 0$), яку можна розв'язати так: для $a > 0$ $ax^2 > -c$, $x^2 > -\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $\sqrt{x^2} > \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $\|x\| > \sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідси $x > \sqrt{-\frac{c}{a}}$ або $-x > \sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідси $x < -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Отже, множиною розв'язків нерівності $ax^2 + c > 0$ є два числових

Рівняння з однією змінною	Нерівність з однією змінною
Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то $x^2 = -\frac{c}{a}$ не має розв'язків, а тому і рівняння $ax^2 + c = 0$ не має коренів.	проміжки: $\left(-\infty; -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ або $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}; +\infty\right)$. Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то нерівність $ax^2 + c > 0$ не має розв'язків. При $a < 0$ $x^2 < -\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $\lvert x\rvert < \sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідки $-\sqrt{-\frac{c}{a}} < x < \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то нерівність $x^2 < -\frac{c}{a}$ не має розв'язків, тому і дана нерівність $ax^2 + c > 0$ не має розв'язків.
4. Вираз $D = b^2 - 4ac$ називається дискримінантом квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Якщо $D > 0$, то квадратне рівняння має два різних корені, які знаходять за формулою $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Якщо $D = 0$, то квадратне рівняння має два рівних корені, тобто фактично один розв'язок: $x = -\frac{b}{2a}$. Якщо $D < 0$, то квадратне рівняння не має дійсних коренів.	4. Щоб розв'язати квадратну нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ (або $ax^2 + bx + c < 0$), її подають у вигляді $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0$, якщо $a > 0$, або $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$, якщо $a < 0$. Знаходять корені відповідно квадратного рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Якщо існує два різних корені x_1 і x_2, то за теоремою Вієта розкладають тричлен на множники, подаючи дану нерівність у вигляді $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, або $(x - x_1)(x - x_2) < 0$, і розв'язують її або складаючи дві системи лінійних нерівностей $\begin{cases} x - x_1 > 0, \\ x - x_2 > 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x - x_1 < 0, \\ x - x_2 < 0, \end{cases}$

Рівняння з однією змінною	Нерівність з однією змінною
	або методом інтервалів. Якщо квадратний тричлен не має коренів, то, виділяючи квадрат двочлена, подають його у вигляді $a(x-m)^2+n>0$, де $m=-\frac{b}{2a}$, $n=\frac{b^2-4ac}{4a}$. Залежно від знака a і n роблять висновок про множину розв'язків нерівностей.
Квадратне рівняння будь-якого виду можна розв'язати графічно, побудувавши графік квадратичного тричлена — параболу. Якщо $D>0$, парабола перетне вісь Ox у двох точках, абсциси яких і будуть коренями даного квадратного рівняння. Якщо $D=0$, парабола дотикається до осі Ox. Абсциса точки дотику — корінь квадратного рівняння.	Квадратну нерівність зручно розв'язувати графічно, побудувавши графік квадратного тричлена, тобто графік функції $y=ax^2+bx+c$. За графіком встановлюють, для яких x значення функції перетворюється в 0, в яких проміжках вони додатні, а в яких — від'ємні. Ці проміжки і будуть множинами розв'язків відповідних нерівностей $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$.
5. Щоб розв'язати дробово-раціональне рівняння, треба: 1) перенести всі члени рівняння у ліву частину, тобто подати рівняння у вигляді $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$; 2) скористатися тим, що дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, тобто прирівняти до нуля чисельник, розв'язати здобуте рівняння $f(x)=0$.	5. Під час розв'язування дробових нерівностей не можна у загальному випадку замінювати їх на цілу нерівність множенням обох частин на спільний знаменник дробів, що входять до нерівності. Справді, спільний знаменник за певних значень змінної може набувати від'ємних значень, і тоді під час множення знак нерівності треба змінювати на протилежний. Тому можна використати такий спосіб:

Рівняння з однією змінною	Нерівність з однією змінною
Із знайдених розв'язків виключити ті, що перетворюють на нуль знаменник. Можна також подати дробово-раціональне рівняння у вигляді $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{q(x)}{\varphi(x)}$ і скористатися умовою рівності двох дробів з однаковими знаменниками, тобто прирівняти чисельники і розв'язати здобуте ціле раціональне рівняння $f(x) = q(x)$. Із знайдених розв'язків виключають ті, які перетворюють знаменник на нуль. Можна нарешті записати у вигляді $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{q(x)}{\psi(x)}$ і, скориставшись властивістю пропорції, скласти рівняння $f(x)\cdot\varphi(x) = q(x)\varphi(x)$. Розв'язуючи це рівняння, слід виключити ті корені, які перетворюють на нуль хоча б один із знаменників $\varphi(x)$ чи $\psi(x)$.	1) перенести всі члени нерівності у ліву частину, тобто подати нерівність у вигляді $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ (або $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} < 0$); 2) скористатися твердженням — дріб додатний тоді і тільки тоді, коли чисельник і знаменник мають однакові знаки: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) < 0, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases}$ 3) розв'язати здобуті системи; 4) об'єднати їх розв'язки, що дасть множину розв'язків даної нерівності. Можна також після запису нерівності у вигляді $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ помножити обидві її частини на $\varphi^2(x) > 0$, замінивши цим самим дробову нерівність на рівносильну цілу $f(x)\varphi(x) > 0$. Під час розв'язування нерівностей виду $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \gtrless 0$ або $f(x)\varphi(x) \gtrless 0$ можна скористатись також методом інтервалів.

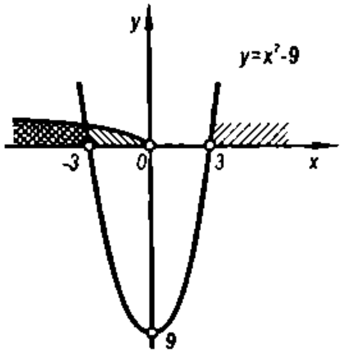
З того ж графіка випливає, що множиною розв'язків нерівності $x^2 - 9 < 0$ є проміжок $(-3; 3)$, а множиною розв'язків системи б) — спільна частина множин розв'язків обох нерівностей, тобто проміжок $(0; 3)$ (мал. 196).

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання множин розв'язків систем а) і б), тобто множина $(-\infty; -3)$ або $(0; 3)$. **Відповідь.** $(-\infty; -3)$ або $(0; 3)$.

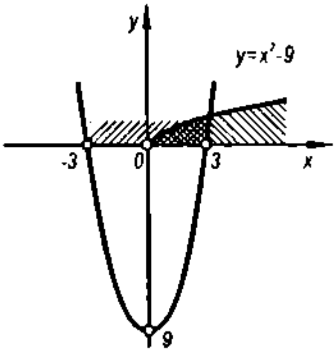
Дві чи декілька нерівностей з однією змінною утворюють систему, якщо поставити задачу знайти всі спільні розв'язки даних нерівностей.

Кожне значення змінної, при якому кожна нерівність системи перетворюється у правильну числову нерівність, називається розв'язком системи нерівностей.

Дві чи кілька нерівностей з однією змінною утворюють сукупність, якщо поставити задачу знайти всі такі значення змінної, кожне з яких є розв'язком хоча б однієї з даних нерівностей.



Мал. 195



Мал. 196

Кожне значення змінної, при якому хоча б одна з нерівностей сукупності перетворюється у правильну числову нерівність, називається розв'язком сукупності нерівностей.

Систему двох нерівностей з однією змінною записують за допомогою фігурної дужки. Наприклад,

$$\begin{cases} 2x - 3 > 13, \\ 2 - x < 6x - 8. \end{cases}$$

Для запису сукупності нерівностей вживають квадратні дужки. Наприклад,

$$\left[\begin{array}{l} 3x + 1 < x, \\ 2 - x < 6x - 8. \end{array}\right.$$

Під час розв'язування систем і сукупностей нерівностей з однією змінною зручно використовувати графічну ілюстрацію на координатній прямій.

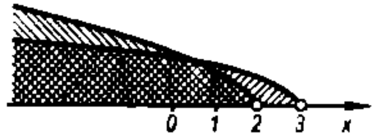
П р и к л а д 1. Розв'язати систему нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} 2x + 3 < 12 + 5x, \\ 2 - x < 22 - 6x. \end{array}\right.$$

Р о з в' я з а н н я. Розв'яжемо обидві нерівності окремо. З першої нерівності дістанемо рівносильну нерівність $3x > -9$, звідки $x > -3$. З другої нерівності маємо $5x < 20$, звідки $x < 4$. Отже, дану систему замінимо рівносильною: $\begin{cases} x > -3, \\ x < 4. \end{cases}$.

Зобразимо на координатній прямій множини розв'язків кожної нерівності здобутої системи і позначимо їх штриховкою різного нахилу. Множина розв'язків утвориться в результаті перетину штриховок різного нахилу (мал. 197). В і д п о в і д ь. $(-3; 4)$.

Мал. 197



Мал. 198

П р и к л а д 2. Розв'язати сукупність нерівностей

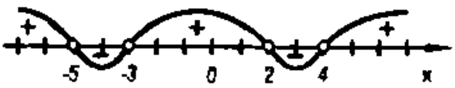
$$\begin{cases} 2x + 7 > 5x - 2, \\ 5 - 2 < 20 - 6x. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Розв'язуючи кожну нерівність окремо відносно x, матимемо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} 3x < 9, \\ 11x < 21, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x < 2. \end{array}\right.$$

Множиною розв'язків останньої, а отже, і даної сукупності, є інтервал $(-\infty; +\infty)$ (мал. 198).

4. Метод інтервалів. Розглянемо метод інтервалів за допомогою прикладу на розв'язування нерівності $\frac{x^2 + x - 20}{x^2 + x - 6} \leqslant 0$. Ліва частина нерівності — раціональний дріб, який задає функцію $f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x^2 + x - 6}$. Після розкладу чисельника і знаменника на множники маємо: $f(x) = \frac{(x+5)(x-4)}{(x+3)(x-2)}$. Ця функція перетворюється на нуль, якщо $x = -5$, $x = 4$, і не визначена, якщо $x = -3$ і $x = 2$. Розмістимо ці чотири числа на координатній прямій. Вони розіб'ють її на п'ять інтервалів (звідси назва «метод інтервалів»: $(-\infty; -5)$, $(-5; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; 4)$ і $(4; +\infty)$. Якщо $x > 4$, тобто на інтервалі $(4; +\infty)$, всі чотири множники чисельника і знаменника додатні, тому і функція $f(x) = \dfrac{(x+5)(x-4)}{(x+3)(x-2)}$ додатна. Рухаючись вздовж координатної прямої справа наліво, помічаємо (це легко перевірити, обчислюючи значення функції для довільного x з кожного інтервалу), що в кожній з чотирьох точок змінює знак лише один з чотирьох множників, тому змінює знак і значення функції, тобто ліва частина нерівності. На кожному з п'яти інтервалів функція зберігає знак, тобто $f(x)$ є знакосталою.



Мал. 199

Зміну знаків функції зручно проілюструвати за допомогою хвилястої кривої (мал. 199), яку креслять справа наліво, починаючи зверху від координатної прямої. На тих інтервалах, де крива розміщена над координатною прямою, $f(x) > 0$, а там, де під прямою, $f(x) < 0$. Побудовану криву називають **кривою знаків**.

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання двох множин $[-5; 3)$ і $(2; 4)$. Оскільки дана нерівність нестрога, то точки -5 і 4 (нулі функції) включаємо до множини розв'язків. В і д п о в і д ь. $[-5; 3)$ або $(2; 4]$.

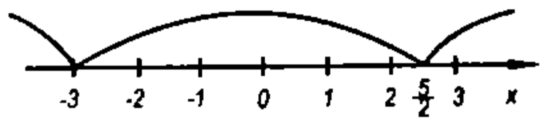
Метод інтервалів використовують і під час розв'язування рівнянь, які містять невідоме під знаком модуля.

П р и к л а д. Розв'язати рівняння $|5 - 2x| + |x + 9| = 2 - 3x$.

Р о з в ' я з а н н я. Дане рівняння містить два вирази з невідомим під знаком модуля. Ідея розв'язування рівнянь з модулем, як і нерівностей з модулем, полягає в тому, щоб звільнитися від них і перейти до рівняння, яке не містить модуля і розв'язується вже відомим способом.

Вирази з модулями, які входять у дане рівняння, перетворюються на нуль відповідно, якщо $x = \dfrac{5}{2}$ і $x = -3$.

Точки $A(-3)$ і $\left(\frac{5}{2}\right)$ розбивають координатну пряму на три інтервали: $(-\infty; -3)$, $\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ і $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ (мал. 200). Перетворимо вирази з модулями на кожному з трьох інтервалів, починаючи з лівого.



Мал. 200

1) Для $x < -3$ маємо: $|5 - 2x| = 5 - 2x$; $|x + 3| = -x - 3$. Після підстановки в дане рівняння значення модулів рівняння набере вигляду: $5 - 2x - x - 3 = 2 - 3x$, або $2 = 2$. Це означає, що будь-яке значення x з проміжку $(-\infty; -3)$ є розв'язком даного рівняння.

2) Якщо $-3 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$, маємо: $|5-2x| = 5-2x$, $|x+3| = x + 3$.

Рівняння матиме вигляд: $5-2x+x+3 = 2-3x$. Звідси $2x = -6$, $x = -3$.

На цьому відрізку рівняння має єдиний корінь $x = -3$.

3) Якщо $x > \frac{5}{2}$, $|5 - 2x| = -5 + 2x$, $|x + 3| = x + 3$.

Рівняння набирає вигляду: $-5 + 2x + x + 3 = 2 - 3x$. Звідси $6x = 4$, $x = \frac{2}{3}$. Але $x = \frac{2}{3}$ не належить до розглядуваного інтервалу. Це означає, що на інтервалі $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ рівняння не має коренів. В і д п о в і д ь. Множиною розв'язків даного рівняння є множина $(-\infty; -3]$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

До § 1

1. Як виникли натуральні числа?

2. Чи означається натуральне число?

3. Що таке десяткова система запису натуральних чисел і яка її основна властивість?

4. Як прочитати багатоцифрове число?

5. Сформулювати правило порівняння багатоцифрових натуральних чисел.

6. Як тлумачити додавання натуральних чисел?

7. Що означає помножити натуральне число m на натуральне число n?

8. Як тлумачити віднімання і ділення натуральних чисел?

9. Які дії можна виконувати у множині натуральних чисел?

10. Як формулюються закони дій з натуральними числами?

11. Як формулюються ознаки подільності натуральних чисел на 2; 3; 9; 5 і на 10?

12. Яке натуральне число називається простим; складеним?

13. Як розкласти натуральне число на прості множники?

14. Що таке дільник числа a? Що таке найбільший спільний дільник двох або кількох чисел?

15. Як знайти найбільший спільний дільник двох або кількох чисел?

16. Яке натуральне число називається кратним певному числу? Що називається найменшим спільним кратним двох або кількох чисел?

17. Як знайти найменше спільне кратне двох або кількох натуральних чисел?

18. Які числа називаються дробовими?

19. Що таке чисельник і знаменник звичайного дробу?

20. Який звичайний дріб називається правильним, а який — неправильним?

21. Як виділити з неправильного дробу цілу частину? Як перетворити неправильний дріб у число, що містить цілу і дробову частини?

22. Як порівнюються звичайні дроби з однаковими знаменниками?

23. Як додати (відняти) два дроби з однаковими знаменниками?

24. Як формулюється основна властивість звичайних дробів?

25. Як звести звичайні дроби до найменшого спільного знаменника?

26. Як додати дроби з різними знаменниками?

27. Як додати числа, що містять цілу і дробову частини?

28. Як відняти числа, що мають цілу і дробову частини?

29. Як перемножити звичайні дроби?

30. Як розділити число на дріб?

31. Як можна прийти до поняття десяткового дробу?

32. Як порівняти два десяткові дроби?

33. Як виконують додавання і віднімання десяткових дробів?

34. Як перемножити два десяткові дроби?

35. Як розділити число на десятковий дріб?

36. Як округлити натуральне число до певного розряду?

37. Як округлити десятковий дріб?

38. Що таке абсолютна похибка наближеного значення?

39. Що таке відносна похибка наближеного значення?

40. Як додають (віднімають) наближені значення?

41. Яка цифра наближеного значення називається правильною?

42. Які цифри наближеного значення називаються значущими?

43. Як формулюється правило множення і ділення наближених значень?

44. Чому були введені додатні і від'ємні числа?

45. Які числа називають цілими? Як позначають множину натуральних і цілих чисел?

46. Які числа називають раціональними? Як позначають раціональні числа?

47. Що називається модулем числа a?

48. Як порівнюють раціональні числа?

49. Як додати два числа з однаковими знаками?

50. Як додати два числа з різними знаками?

51. Як формулюється правило розкриття дужок?

52. Як формулюються правила множення і ділення раціональних чисел?

53. Що спричинило введення ірраціональних чисел? Які джерела їх утворення?

54. Як утворилася множина дійсних чисел? Як її позначають?

55. Як виконують дії над ірраціональними числами?

56. Яке співвідношення існує між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої?

57. Що називається відношенням чисел?

58. Що називається пропорцією?

59. Як формулюється основна властивість пропорції?

60. Що називається процентом?

61. Які три основні задачі на проценти вам відомі? Як вони розв'язуються?

До § 2

1. Які вирази називаються числовими? Що таке числове значення виразу?

2. Що таке вираз із змінними?

3. Які математичні вирази називаються алгебраїчними?

4. Які алгебраїчні вирази називаються раціональними?

5. Які раціональні вирази називаються цілими?

6. Що називається одночленом?

7. Що називається многочленом?

8. Які раціональні вирази називаються дробовими?

9. Що таке алгебраїчний дріб?

10. Які вирази називаються тригонометричними?

11. Які два вирази називаються тотожно-рівними?

12. Що називається тотожним перетворенням виразу?

13. Що називається тотожністю на множині?

14. Який вигляд одночлена називається стандартним? Як звести одночлен до стандартного вигляду?

15. Які основні види тотожних перетворень многочленів ви знаєте?

16. Які члени многочлена називаються подібними? Як звести подібні члени многочлена?

17. Який вид многочлена називають стандартним? Як звести многочлен до стандартного виду?

18. Що називається степенем ненульового многочлена?

19. Як помножити одночлен на многочлен? Яке перетворення є оберненим до нього?

20. Як знайти спільний множник одночленів даного многочлена?

21. Як розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки?

22. Як перемножити два многочлени? Яке перетворення є оберненим до множення двох многочленів?

23. Як розкласти многочлен на множники способом групування?

24. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів на їх суму?

25. Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?

26. Чому дорівнює квадрат суми (різниці) двох виразів?

27. Чому дорівнює добуток суми (різниці) двох виразів на неповний квадрат їх різниці (суми)?

28. Чому дорівнює сума кубів двох виразів?

29. Чому дорівнює різниця кубів двох виразів?

30. Назвати основні види тотожних перетворень алгебраїчних дробів.

31. Як знайти найменший спільний знаменник двох або кількох алгебраїчних дробів?

32. Як додати (відняти) алгебраїчні дроби з однаковими знаменниками?

33. Як додати (відняти) алгебраїчні дроби з різними знаменниками?

34. Як перемножити два алгебраїчні дроби?

35. Як розділити один алгебраїчний дріб на другий?

36. У чому полягає задача тотожних перетворень раціональних виразів?

37. Що називається квадратним коренем з числа a?

38. Який квадратний корінь з числа a називається арифметичним?

39. Назвати властивості арифметичного квадратного кореня.

40. Назвати основні види тотожних перетворень ірраціональних виразів.

41. Що називається арифметичним коренем n-го степеня з числа a?

42. Як записати корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь того ж степеня?

43. Що називається степенем числа a з натуральним показником.

44. Чому дорівнює будь-яке число, що не дорівнює нулю, у нульовому степені?

45. Назвати властивості степеня з довільним натуральним показником.

46. Сформулювати означення степеня числа, відмінного від нуля, з цілим від'ємним показником.

47. Сформулювати означення степеня додатного числа a з дробовим показником $\frac{m}{n}$, де m — ціле, а n — натуральне число.

48. Які вирази називаються тригонометричними?

До § 3

1. Коли число a називається рівним числу b? Коли число a називається більшим (меншим) від числа b?

2. Сформулювати властивості числових рівностей.

3. Сформулювати властивості числових нерівностей, аналогічні відповідним властивостям числових рівностей. Довести одну з них.

4. Які властивості числових нерівностей відмінні від відповідних властивостей числових рівностей? Довести одну з них.

5. Назвати способи доведення тотожностей.

6. Яку рівність із змінною називають рівнянням?

7. Що означає розв'язати рівняння з однією змінною? Що називається коренем рівняння з однією змінною?

8. Які рівняння називають цілими, дробовими?

9. Сформулювати основні властивості рівнянь та наслідок з них.

10. Які два рівняння називаються рівносильними?

11. Що називається розв'язком рівняння з двома змінними?

12. Що таке система двох рівнянь з двома змінними?

13. Що називається розв'язком системи рівнянь з двома змінними? Що означає розв'язати систему двох рівнянь з двома змінними?

14. Які дві системи рівнянь називаються рівносильними?

15. Назвати основні способи розв'язування систем рівнянь з двома змінними. В чому полягає кожний із способів?

16. Що називається розв'язком нерівності з однією змінною? Що означає розв'язати таку нерівність?

17. Які дві нерівності називаються рівносильними?

18. Що називається областю визначення нерівності з однією змінною?

19. Назвати властивості нерівності з однією змінною.

20. Що означає вимога: розв'язати систему нерівностей?

21. Що називається розв'язком системи нерівностей з однією змінною?

22. Назвати основні види нерівностей з однією змінною.

23. Яка нерівність з однією змінною називається лінійною? Як розв'язується така нерівність?

24. Яке рівняння називається квадратним?

25. Яка нерівність з однією змінною називається квадратною?

26. Як розв'язуються рівняння виду $ax^2 + bx = 0$ і нерівності виду $ax^2 + bx > 0$ ($ax^2 + bx < 0$)?

27. Як розв'язуються рівняння виду $ax^2 + c = 0$ і нерівності виду $ax^2 + c > 0$ ($ax^2 + c < 0$)?

28. Як розв'язуються квадратні рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де $b \neq 0$, $c \neq 0$?

29. Як розв'язуються нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$), де $b \neq 0$, $c \neq 0$?

30. Як розв'язуються дробові рівняння?

31. Як розв'язуються дробові нерівності?

32. Коли два або кілька рівнянь утворюють сукупність рівнянь? Що називається розв'язком сукупності рівнянь?

33. У чому полягає метод інтервалів розв'язування нерівностей?

34. **Як застосовується метод інтервалів під час розв'язування цілих рівнянь, які містять невідоме під знаком модуля?**

ВПРАВИ

До § 1

1. Обчислити значення виразу:

1) $\left(2\frac{3}{4}+0,15-1\frac{8}{25}\right):\left(2\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}+0,04\right)$;

2) $1,456:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0,125+4\frac{1}{2}\cdot 0,8$;

3) $\dfrac{\frac{4}{5}-2,7\cdot 2\frac{1}{3}}{5,2-1\frac{2}{5}:\frac{3}{7}}$; 4) $\dfrac{\left(-2,4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4,375}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$.

2. Знайти числове значення виразів:

1) $\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$, якщо:

а) $x=-3$; $y=-2$; б) $x=-0,4$; $y=0,5$;

в) $x=\frac{2}{3}$; $y=-\frac{3}{5}$; г) $x=-\frac{1}{3}$; $y=-0,25$.

2) $\dfrac{a-b}{a^2-ab+2b^2}$, якщо:

а) $a=-4$; $b=-1$ б) $a=\frac{3}{4}$; $b=-0,5$;

в) $a=-\frac{2}{3}$; $b=0,5$; г) $a=1\frac{1}{3}$; $b=-1,5$.

3. Знайти площу трапеції, основи якої $a\approx 4,6$ см, $b\approx$ $\approx 3,28$ см і висота $h\approx 3,0$ см.

4. Знайти опір за формулою $R=R_1+\frac{U}{I}$, де $R_1\approx$ $\approx 5,15$ Ом, $U\approx 12,5$ В, $I\approx 2,1$ А.

5. Господарство продало державі 836 т м'яса, що становить 80 % плану поставок м'яса. Який план поставок м'яса?

6. Корова дала за рік 5500 кг молока жирності 4 %. Скільки кілограмів масла можна одержати при переробці цієї кількості молока?

7. Сума двох сторін трикутника дорівнює 85 см, а довжина третьої сторони становить 80 % цієї суми. Визначити периметр трикутника.

8. Одна сторона трикутника 12 см, а дві інші становлять 125 % цієї сторони. Обчислити периметр трикутника.

9. На заводі 40 % усіх верстатів перевели на підвищені швидкості, внаслідок чого продуктивність праці збільшилась на 30 %. На скільки процентів збільшилось виробництво продукції на заводі?

10. Продуктивність праці підвищилась на 14 %. На скільки процентів знизилась трудомісткість праці?

(Трудомісткістю праці називається кількість робочого часу, що витрачається на одиницю продукції.)

11. Визначити процент виконання норми виробітку, якщо на дану операцію встановлена норма часу 10,5 хв, а робітник протягом 5 днів виконав 256 таких операцій.

(Кількість продукції, що виробляється за одиницю часу, називається виробітком.)

12. На скільки процентів зміниться ціна товару, якщо спочатку підвищити її на 20 %, а потім знизити на 20 %?

13. На скільки процентів збільшиться продуктивність праці, якщо час на виконання певної операції скоротити на 20 %?

14. На скільки процентів збільшиться реальна зарплата, якщо ціни на всі продовольчі і промислові товари зменшити на 20 %?

15. Скільки води слід долити до 7,5 кг 12-процентного розчину, щоб дістати 10-процентний розчин?

До § 2

1. Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

1) $(5x^2 - 2xy + y^2)(2x - y^2)$;

2) $(0,2y - x)(x + 0,2y) + (x - 3y)(3y + x)$;

3) $-7(x+9y)(y-3x)$; 4) $(3a-b)(b+3a)-(b+a)(a-b)$;

5) $\left(\frac{2}{3}m + 3n\right)\left(6m - \frac{1}{6}n\right)$; 6) $(0,1x + y)^2$;

7) $\left(\frac{1}{5}a + \frac{3}{7}b\right)(14a - b)$ 8) $\left(\frac{1}{2}a - 2b\right)^2$;

9) $(0,02x - 2,7y)(1,5y - 0,2x)$; 10) $16ab - (3a + 2b)^2$;

11) $\left(1\frac{2}{5}a + 2\frac{1}{5}b\right)\left(\frac{7}{5}a - \frac{11}{5}b\right)$;

12) $(a+2)^2 - (a-2)^2$; 13) $(2,5m - 0,3n)(2,5m - 2n)$;
14) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$;

15) $\left(2\frac{1}{3}x - y\right)\left(1\frac{2}{5}y - \frac{1}{4}x\right)$;

16) $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$;

17) $\left(1 - \frac{2}{3}x\right)\left(1 + \frac{2}{3}x\right)$; 18) $(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)$;

19) $\left(-\frac{5}{8} - a^3\right)\left(\frac{5}{8} - a^3\right)$; 20) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$.

2. Розкласти многочлени на множники:
1) $a^3b^2 - b^4$; 2) $27 + x^3$; 3) $12a^7 - 4a^3b$; 4) $1 - 8a^3$;
5) $a(x-y) + b(x-y)$; 6) $a^3 + b^3$; 7) $m(3-n) - 3n(n-3)$;
8) $8 - a^3b^3$; 9) $2x(a - b) - (b - a)$; 10) $125a^3 - 27b^3$;
11) $a^2 + ab - ac - bc$; 12) $a^6 + 1$; 13) $3x + 3y - ax - ay$;
14) $1,1a^3 - 1,1b^3$; 15) $a^2b + ab^2 - ac^2 - bc^2$;
16) $27x^3 - y^3$; 17) $10mn - 25mp - 6qn + 15pq$;
18) $9a^3 - 9b^3$; 19) $9x^2 - 16$;
20) $2m^3 - 4m + 2$; 21) $a^2 - 2a + 1$; 22) $x^3 + x^2y + x^2 + xy$;
23) $2\frac{7}{9} - y^4$; 24) $0,09x^6 - 0,09y^2$; 25) $4a^2 + 4a + 1$;
26) $a^{12} + 1$.

3. Знайти значення виразу:

1) $15,2 \cdot 14,8$; 2) $9,9^2$; 3) $55^2 - 45^2$;

4) $4a^2 + 9 - 12a$, якщо $a = 2,5$; 5) $\left(4\frac{1}{6}\right)^2 - \left(1\frac{1}{6}\right)^2$;

6) $3(m-1)^2 + (m+2)(m^2 - 2m + 4) - (m+1)^3$, якщо $m = 1,1$;

7) $0,849^2 - 0,151^2$; 8) $a^3 - (a - 2)(a^2 + 2a + 4) + 5a$, якщо $a = 0,6$;

9) $(100 - 1)^2$;

10) $(x+2)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2 - 2x + 1)$, якщо $x = 2$.

4. Розв'язати рівняння:

1) $(3y+1)(4y-5)-(6y-11)(2y-7)=24$;
2) $x(x+2)-(x+3)(x-3)=13$;
3) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$;
4) $(x-7)^2+3=(x-2)(x+2)$;
5) $15(x^2-4)+5x(x-3)^2-5(x-1)^3=5$;

5. Спростити вирази:

а) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$;
б) $\frac{b-c}{a+b}-\frac{ab-b^2}{a^2-ac}\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$;
в) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m+5}$;
г) $\frac{3}{x+y}-\frac{3x-3y}{2x-3y}\cdot\left(\frac{2x-3y}{x^2-y^2}-2x+3y\right)$.

6. Обчислити значення виразу, спростивши його:

а) $\frac{4a^2+8ab+4b^2}{2a^2-2b^2}$, якщо $a=6\frac{7}{40}$, $b=-1,375$;
б) $\frac{b^2-b}{(1+ab)^2-(a+b)^2}$, якщо $a=-56$, $b=125$;

7. Довести тотожності:

а) $\left(a-\frac{a^2+x^2}{a+x}\right)\cdot\left(\frac{2a}{x}+\frac{4a}{a-x}\right)=2a$;
б) $\left(\frac{ab+b^2}{5a^2-5ab}+ab+b^2\right)\cdot\left(\frac{5a}{a+b}-\frac{b}{a-b}\right)=5ab$;
в) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1+\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{x-y}$;
г) $\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2:\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x+y}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)=1$.

8. Винести множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{5x^2}$, де $x\geqslant 0$;
б) $\sqrt{54a^2}$, де $a<0$; в) $\sqrt{75b^4}$, де $b>0$;
г) $\sqrt{27c^6}$, де $c<0$.

9. Чи правильна рівність $a\sqrt{5}=\sqrt{5a^2}$, якщо а) $a=3$; б) $a=-5$; в) $a=2$; г) $a=-7$?

10. Внести множник під знак кореня: а) $x\sqrt{7}$, де $x \geqslant 0$;

б) $x\sqrt{7}$, де $x < 0$; в) $a\sqrt{\frac{5}{a}}$; г) $a\sqrt{\frac{-5}{a}}$.

11. Обчислити значення виразів з точністю до 0,01:

а) $\sqrt{50} + 2\sqrt{72} + \frac{1}{2}\sqrt{8}$; б) $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$;

в) $\sqrt{80} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{25}$; г) $(1 + \sqrt{7})(\sqrt{7} - 1)$;

д) $(\sqrt{20} + \sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{5}$; е) $(5\sqrt{3} + 6)^2$;

є) $(4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 1) \cdot 2\sqrt{3}$; ж) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2$.

12. Спростити вирази:

а) $\sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$; б) $(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x)$;

в) $\sqrt{(\sqrt{15} - 2)^2} - \sqrt{(\sqrt{15} - 3)^2}$;

г) $(\sqrt{a} + 2)(a - 2\sqrt{a} + 4)$.

13. Звільнитися від знака кореня у знаменнику дробу:

а) $\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; б) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{5\sqrt{3}}$; в) $\frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}}$; г) $\frac{2\sqrt{7} - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{7} - 2\sqrt{2}}$.

14. Обчислити:

а) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0\right)^{-0,5} - 7,5 \cdot 4^{-\frac{3}{2}} - (-2)^{-4} + 81^{0,25}$;

б) $0.027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} - 3^{-1} + (5,5)^0$.

15. Записати у вигляді суми:

а) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $(2 - x^{1,5})(2 + x^{1,5})$;

в) $\left(x^{\frac{1}{2}} - 2\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 2\right)$; г) $\left(x^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

16. Спростити вирази:

а) $\frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}$;

б) $\frac{a}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b} + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a} - \frac{a + b}{\sqrt{ab}}$.

До § 3

1. Розв'язати рівняння:

А

1) $\frac{1}{5}x = 3$; 2) $x^2 + 3 = 0$; 3) $5x + 4 = 0$;
4) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; 5) $9x - 2(x - 3,5) = 2x - 1,5$;
6) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; 7) $\frac{x-1}{5} - \frac{2x}{3} = 4$;
8) $x^2 - 7x = 6 - 2x$; 9) $5x^2 = 0$; 10) $3x^2 - 5x - 2 = 0$;
11) $x(3+x) = 0$; 12) $x^2 - 3x + 4 = 0$; 13) $(x+2)(x-5) = 0$;
14) $\frac{x^2 - 16}{x + 2} = 0$; 15) $6x^2 - 3x = 0$; 16) $\frac{y^2}{y+5} = \frac{y}{y+5}$;
17) $2x = 3x^2$; 18) $\frac{2x}{1-x} = \frac{1}{x}$; 19) $-2x^2 + 8 = 0$;
20) $\frac{x^2 - 6x}{x - 1} = \frac{5}{1-x}$; 21) $3x^2 = 27$; 22) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} = 1$;
23) $x^2 - 5 = 0$; 24) $\frac{2y+3}{2y-1} = \frac{y-5}{y+3}$.

Б

25) $\frac{kx}{k-1} - \frac{3x+2}{k+1} = \frac{1}{k-1}$; 26) $8x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$;
27) $3(y+1) - \frac{10-y}{2} = \frac{4y+11}{5} + 12$;
28) $x^2 + 5|x| + 6 = 0$; 29) $\frac{0,01 - x}{0,02} - 2\frac{1}{2} = \frac{2-3y}{0,01}$;
30) $1,3x - 2 - (3,3x + 5) = 2x + 1$;
31) $-\frac{3x}{5} - \frac{1}{2} = -3\frac{1}{2}$; 32) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 3\frac{1}{3}$;
33) $\frac{6x+7}{7} + x = \frac{80+4x}{5} - \frac{30-2x}{2}$;
34) $1 + \frac{2}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} = \frac{3}{x+1}$; 35) $ax + 6 = 2a + 3x$;
36) $\frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{x^2+2x} - \frac{7}{2x - x^2}$;
37) $(x-4)^2 \cdot (x^2 - x + 2) - (x-5)^2(x^2 + x - 1) = 22$;
38) $\frac{x-2}{x+1} = \frac{2}{1-x} + \frac{6}{x^2-1}$;
39) $(x-a)^2 + (x-b)^2 = a^2 + b^2$;
40) $\frac{x+2}{3x+1} + \frac{8x^2+3}{1-9x^2} = \frac{x+0,5}{9x+3}$; 41) $\frac{x^2}{a} - \frac{x}{b} = 0$;

42) $\dfrac{30}{y^2-1} - \dfrac{13}{y^2+y+1} = \dfrac{7+18y}{y^3-1}$;

В

43) $\dfrac{2x}{3n} + \dfrac{x-1}{n} = \dfrac{4}{n^2-n}$; 44) $|y-6| - |y-1| = 3$;

45) $(x-2)^3 + (1-x)^3 = -1$;

46) $|x| + |x-1| + |x-2| = x$;

47) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x-3} = \dfrac{6}{x+6}$; 48) $x^2 = |5x-6|$.

2. Розв'язати системи рівнянь:

А

1) $\begin{cases} x+y=6, \\ 3x-5y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y=18, \\ x+2y=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+2y=34,5, \\ 2x-y=12,5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x-y=2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y=12, \\ xy=35; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y^2=16, \\ x+5y=10; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y=14, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x-y=1. \end{cases}$

Б

9) $\begin{cases} \dfrac{5x+9y}{3} = \dfrac{2x+3y}{2}, \\ \dfrac{x-3y}{2} = \dfrac{2x-3y}{3}; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dfrac{x-a}{y-a} = \dfrac{b}{c}, \\ \dfrac{x-b}{y-c} = \dfrac{a+b}{a+c}; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+y=120, \\ x^2+y^2=10\,400; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7; \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{y} = 11, \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 17; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=43, \\ x^2+2yx+3y^2=33. \end{cases}$

В

15) $\begin{cases} xy=80, \\ \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2, \\ xy=2(x+y); \end{cases}$

IDИ YKÍNSbKY DYPY

17) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 35; \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y} + \dfrac{2}{3x-2y} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{3}{2x-3y} - \dfrac{4}{3x-2y} = 1; \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

А

1) $0,4x \geqslant 2$; 2) $(x-11)(x-3) < 0$; 3) $4x - 7 > 0$;
4) $x^2 - 2x - 3 > 0$; 5) $3 - 2x < 12 - 5x$; 6) $9x^2 - 25 > 0$;
7) $2x - 3 < 7(1+x)$; 8) $2x^2 - 3x - 2 > 0$; 9) $5 - 4x \leqslant 0$;
10) $x(x-1)(x-3) < 0$; 11) $3x - 5 < 2(1-x)$;
12) $x(x-4)(x+4) < 0$; 13) $x^2 - 4 \leqslant 0$; 14) $\dfrac{x+2}{x-5} < 0$;
15) $x(3-x) > 0$; 16) $\dfrac{2x-1}{x+2} \geqslant 0$;

Б

17) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{3}{5} < 4x - 3$; 18) $\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + 21 > 0$;
19) $(x-1)^2 + 7 > (x+4)^2$; 20) $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2x}{3} > \dfrac{3x-10}{4}$;
21) $2,5(2-y) - 1,5(y-4) \leqslant 3 - y$;
22) $\dfrac{2+x}{9} - x \leqslant \dfrac{2x-5}{3} - (4-x)^2$;
23) $0,2x^2 - 0,2(x-6)(x+6) > 3,6x$; 24) $x^2 + |x| - 2 \geqslant 0$;
25) $\dfrac{y-1}{2} - \dfrac{2y+3}{8} - y > 2$; 26) $\dfrac{3-x}{x-3} < \dfrac{2}{3}$;
27) $x + 4 - \dfrac{x}{3} < \dfrac{2x}{3}$; 28) $\dfrac{3x-1}{3x+1} + \dfrac{x-3}{x+3} \geqslant 2$;
29) $-\dfrac{1}{3}x^2 + x + \dfrac{4}{3} \geqslant 0$; 30) $\dfrac{x-3}{x^2-5x+6} \geqslant 2$;
31) $0,1x^2 - 1,1x + 1 \geqslant 0$; 32) $\dfrac{3x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x} \leqslant 5$.

В

33) $|2x+1|+|3x+2|\leqslant 11$; 34) $\frac{1}{3}x^2+3|x|+6<0$;

35) $|2-5x|+|x+1|\geqslant x+3$; 36) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}>0$;

37) $\frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4}\leqslant 0$; 38) $\left|\frac{x+2}{x^2-1}\right|\geqslant 1$;

39) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{x}\right)+3<0$;

40) $|x^2-3x+2|>x+3$.

4. Розв'язати системи нерівностей:

А

1) $\begin{cases} 2(3x-1)<3(4x+1)+16, \\ 4(2+x)<3x+8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x>3-\frac{13x-2}{11}, \\ \frac{x}{6}+\frac{2}{3}(x-7)<\frac{3x-20}{2}. \end{cases}$

Б

3) $\begin{cases} x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{3}\leqslant\frac{x-1}{4}-2, \\ 1,5x-2,5\leqslant x; \end{cases}$

4) $-2<\left|\frac{x-2}{x+1}\right|<1$.

В

5) $\begin{cases} \frac{x^2+x-4}{x}<1, \\ x^2<64; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{4}{x-2}<0, \\ \left|\frac{x^2-1}{x+2}\right|<1. \end{cases}$

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Властивості степенів

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ a^x : a^y = a^{x-y};\ (a^x)^y = a^{xy};$$

$$(ab)^x = a^x b^x;\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};\ a^0 = 1;\ a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Многочлени

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b);$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b);$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Властивості арифметичного кореня

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ (b \neq 0);\ (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k};\ (\sqrt[n]{a})^n = a,\ (a > 0);$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|,\ \sqrt[2n-1]{-a} = -\sqrt[2n-1]{a},\ (a \geqslant 0);$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{якщо}\ a \geqslant 0; \\ -a, & \text{якщо}\ a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b},\quad \text{якщо}\ 0 \leqslant a < b.$$

Тотожні перетворення тригонометричних виразів

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\quad n \in \mathrm{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\quad x \neq n\pi,\quad n \in \mathrm{Z};$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \neq \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbf{Z};$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z};$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Формула додавання

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y;$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x + y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z};$$
$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x - y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x;$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Формули половинного аргументу

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}};\ \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}};$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}};\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

Формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x + y}{2} \cos\frac{x - y}{2};$$
$$\sin x - \sin y = 2 \cos\frac{x + y}{2} \sin\frac{x - y}{2};$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x + y}{2} \cos\frac{x - y}{2};$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x + y}{2} \sin\frac{x - y}{2};$$

Формули зведення

u	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin u$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos u$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} u$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} u$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y},\quad x,y\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n\in Z;$$
$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y},\quad x,y\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad n\in Z.$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y));$$
$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$$
$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)).$$

Співвідношення між $\sin x$, $\cos x$ *і* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x\neq(2n+1)\pi,\quad n\in Z;$$
$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x\neq(2n+1)\pi,\quad n\in Z.$$

Основні властивості логарифмів

$$\log_a 1=0;\quad \log_a a=1;$$
$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y,\quad \text{якщо } x>0,\ y>0;$$
$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y,\quad \text{якщо } x>0,\ y>0;$$
$$\log_a x^p=p\log_a x,\quad \text{якщо } x>0,\ p\in\mathrm{R};$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\quad \text{якщо } x>0,\ b>0,\ b\neq1;$$
$$a^{\log_a x}=x,\quad \text{якщо } x>0.$$

Первісні

$f(x)$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x)+C$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$f(x)$	$\frac{1}{x}$	e^x	a^x	$f'(ax+b)$	
$F(x)+C$	$\ln\|x\| + C$	$e^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\frac{1}{a}f(ax+b)+C$ $a \neq 0$	

Формули диференціювання

$$c' = 0;\ (x)' = 1;\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \text{якщо}\ \alpha \neq 1.$$

$$(\sin x)' = \cos x;\ (\cos x)' = -\sin x;\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(e^x)' = e^x;\ (a^x)' = a^x \ln a;\ (\ln x)' = \frac{1}{x};\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ (f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x);$$

$$(f_1(x) \cdot f_2(x))' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x);$$

$$(cf(x))' = cf'(x);\ (f(kx+b))' = kf'(kx+b);$$

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)};$$

$$(f(u(x)))' = f_u'(u) \cdot u'(x).$$

Прогресії

Арифметична прогресія

$a_n = a_1 + d(n-1)$, a_1 — перший член, d — різниця, n — число членів, a_n — n-й член;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$, S_n — сума n перших членів;

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, k = 2, 3, \ldots, (n-1);$$
$$a_k + a_m = a_p + a_q, \text{ де } k + m = p + q.$$

Геометрична прогресія

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, b_1 — перший член, q — знаменник, $(q \neq 0)$, n — число членів, b_n — n-й член;

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1, \; S_n \text{ — сума } n \text{ перших членів;}$$
$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}, \quad k = 2, 3, \ldots, (n-1);$$
$$b_k \cdot b_m = b_p \cdot b_q, \quad \text{де } k + m = p + q;$$

$S = \dfrac{b_1}{1-q}$, де $|q| < 1$, S — сума нескінченної геометричної прогресії.

Комплексні числа

Комплексним називається число виду $a + bi$, де a і b — дійсні числа, i — уявна одиниця, $i^2 = -1$;

$a + bi = c + di$ тоді і лише тоді, коли $a = c$, $b = d$.

Додавання і віднімання двох комплексних чисел $a + bi$ *та* $c + di$:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i;$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i.$$

Множення і ділення двох комплексних чисел $a + bi$ *та* $c + di$:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ab + bc)\,i;$$
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

Піднесення до степеня комплексних чисел

Щоб піднести число i до степеня з натуральним показником n, треба показник степеня поділити на 4 і піднести до степеня, показник якого дорівнює остачі від ділення. В загальному вигляді:

$$i^{4n} = 1, \; i^{4m+1} = i, \; i^{4m+2} = i^2, \; i^{4m+3} = -i.$$

Добування квадратного кореня з від'ємних чисел якщо $a > 0$, то

$$\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a} \cdot i.$$

Модулем комплексного числа $a + bi$ називається значення $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргументом комплексного числа $a + bi$ називається числове значення кута α (виміряного в радіанах), утвореного радіус-вектором OA, що зображає це комплексне число.

Вираз $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ **називається тригонометричною формою комплексного числа** $a + bi$.

Тут $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а кут α визначається з рівності $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Множення і ділення комплексних чисел у тригонометричній формі

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)).$$

Множини і операції над ними

Множина — первісне поняття.

Множини позначаються великими буквами латинського алфавіту (A, B, X, Y, M та ін.), а елементи множин — малими буквами (a, b, x, y, m та ін.).

Належність елемента a множини A позначається символом $\in$. Наприклад $a \in A$.

Множина B називається *підмножиною* множини A, якщо кожний елемент множини B належить множині A. Позначається $B \subset A$.

Дві множини A і B називаються *рівними*, якщо вони складаються з тих самих елементів. Позначається $A = B$.

Перерізом множин A і B називається множина C, яка складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать кожній з даних множин A і B. Позначається: $C = A \cap B$.

Об'єднанням (або сумою) двох множин A і B називається така множина C, яка складається з усіх елементів множин A і B і лише з них. Позначається $C = A \cup B$.

Різницею двох множин A і B називається така множина C, яка складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B. Позначається $C = A \backslash B$.

У випадку, коли $A \subseteq B$, то $C = A \backslash B$ називається *доповненням* множини B відносно множини A і позначається $C_A B$.

Сполуки без повторень

Будь-яка впорядкована множина, яка складається з n елементів, називається *перестановкою* з n елементів.

Число перестановок з n елементів позначається P_n. Обчислюється за формулою $P_n = n!$.

Розміщенням з m елементів по n називається будь-яка впорядкована підмножина з n елементів даної множини M, яка містить m елементів, де $n < m$.

Отже, розміщення відрізняються одне від одного або елементами, або порядком елементів.

Число розміщень з m елементів по n позначається A_m^n. Обчислюється за формулою $A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1)) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$.

Комбінацією з m елементів по n називається будь-яка підмножина з n елементів даної множини M, яка містить m елементів.

Отже, комбінації відрізняються одна від одної лише складом елементів.

Число комбінацій з m елементів по n позначається C_m^n. Обчислюється за формулою: $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{P_n}$, або

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3\ \ldots, (n-1)n}.$$

Основні властивості комбінацій:

1. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

2. $C_m^{n+1} = \dfrac{m-n}{n+1} C_m^n$.

3. $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

Формула *бінома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots + \\ + C_n^n b^n.$$

4. $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 \ldots C_m^n = 2^m$.

Формули початків теорії імовірностей

$P = \dfrac{m}{n}$, де $P(A)$ — імовірність випадкової події A, n — загальна кількість рівноможливих і несумісних подій, які утворюють повну групу, m — число елементарних подій, які сприяють події A.

Якщо A — випадкова подія, то $0 < P(A) < 1$.

Імовірність *суми* двох несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ (теорема додавання).

Імовірність *добутку* двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ (теорема множення).

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — *взаємно-незалежні*, то імовірність здійснення принаймні однієї з цих подій обчислюється за формулою:

$$P(A) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \ldots (1 - P(A_n)).$$

Формула Бернуллі: $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$, де $P_{m,n}$ — імовірність того, що подія A настане m разів, якщо виконується n незалежних випробувань, p — імовірність здійснення події A, q — імовірність нездійснення події A.

ВІДПОВІДІ

До розділу I

1. 1) $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$; 2) $(2;+\infty)$; 3) $(-\infty;-2)\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$; 4) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$, $[5;+\infty)$; 5) $(-\infty;2)$, $(2;\ 3)$, $(3;+\infty)$; 6) $(-\infty;-2]$, $[1;+\infty)$; 7) $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$; 8) $(-\infty;0)$, $(0;\ 5)$, $(5;+\infty)$; 9) $[0;3]$; 10) R; 11) $[-4;4]$; 12) $[-4;4]$; 13) $(-\infty;-3)$, $(-3;1)$, $(1;+\infty)$; 14) $(-5;5)$; 15) $(3;+\infty)$; 16) $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$; 17) $(-\infty;-4)$, $(-4;4)$, $(4;+\infty)$; 18) $[2;3)$, $(3;4]$; 19) $(-9;5)$; $(5;\ 9)$; 20) $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$; 21) $\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right]$. $[6;+\infty)$; 22) $(-\infty;-2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2};+\infty)$. **2.** 1) Непарна; 2) парна; 3) непарна; 4) непарна; 5) парна; 6) парна; 7) парна; 8) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 9) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 10) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 11) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 12) парна; 13) парна; 14) непарна; 15) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 16) непарна; 18) парна. **4.** а) $\beta = 180^\circ + 360^\circ\cdot(-1)$; б) $\beta = 300^\circ+360^\circ\cdot(-3)$; в) $\beta=140^\circ+360^\circ\cdot4$; г) $\beta=42^\circ+360^\circ\cdot20$; д) $\beta = 110^\circ+360^\circ\cdot(-5)$. **7.** $16\frac{4}{11}$ хв. **8.** 0,262; 0,329; 0,890; 2,75; 2,83. **9.** 72°; 216°; 86°; 143°. **19.** 1) $-3\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\approx0,671$; 3) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0,870$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx1,891$; **20.** 1) 2; -2; 2) 5; -5; 3) 5; 1; 4) -1; -5; 5) 6; -4; 6) 5; 2; 7) 3; 2; 8) 1; $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. **22.** 1) $\sin65^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; 3) $\cos50^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $\sin\frac{\pi}{3}$; 6) $\cos(-45^\circ)$; 7) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{10}\pi\right)$; 8) $\operatorname{tg}60^\circ$. **26.** 1) $\frac{1}{4}\sin^2 6\alpha$; 2) 1. **33.** 1) $x\neq n\pi$, $n\in Z$; 2) $x\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\in Z$; 3) $x\neq0$; 4) $x\neq\frac{\pi}{2}n$, $n\in Z$. **34.** 1) $[-1;1]$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) $[3,+\infty)$; 4) $[0;\ 2]$. **36.** 1) у II або III чверті; 2) у I або III чверті; 3) у III або IV чверті; 4) у II або IV чверті. **38.** 1) $y>0$ при $n\pi<x<\frac{\pi}{2}+n\pi$; $y<0$, якщо $\frac{\pi}{2}+n\pi<x<\pi+n\pi$; $y=0$, якщо $n\frac{\pi}{2}$, $n\in Z$; 2) $y>0$, якщо

$2n\pi < x < \pi+2n\pi$; $y < 0$, якщо $\pi+2n\pi < x < 2\pi+2n\pi$; нулів немає; 3) $y > 0$, якщо $-\frac{3\pi}{2}+6n\pi < x < \frac{3\pi}{2}+6n\pi$; $y < 0$, якщо $\frac{3\pi}{2}+6n\pi < x < \frac{9\pi}{2}+6n\pi$; $y = 0$, якщо $x = \frac{3\pi}{2}+3n\pi$, $n \in Z$; 4) $y > 0$, якщо $x \neq n\pi$; $y = 0$, якщо $x = n\pi$, $n \in Z$; 5) $y > 0$, якщо $2n\pi < x < \pi+2n\pi$; $y < 0$, якщо $\pi+2n\pi < x < 2\pi+2n\pi$; $y = 0$, якщо $x = 2n\pi$; 6) $y > 0$, якщо $\frac{n\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$; $y < 0$, якщо $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{2}$; $y = 0$, якщо $x = \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$. **40.** 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 3) $2\sin\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; 5) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 6) $1+\sin^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha$; 8) 1; 9) $1-\cos\alpha$; 10) 0; 11) -1; 12) 1; 13) $\frac{3}{2}$; 14) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 15) 1; 16) $\frac{4}{|\sin\alpha|}$. **41.** 1) m^2-2; 2) $m(m^2-3)$; **42.** а) $\frac{4}{25}$; б) $2\frac{1}{12}$. **44.** 1) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3\frac{3}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{7}{24}$; 2) $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{24}{25}$, $\cos x = -\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}x = \frac{24}{7}$; 4) $\cos x = +\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}x = -2\frac{2}{5}$, $\operatorname{ctg}x = -\frac{5}{12}$. **46.** $\sin\alpha \approx 0,88$; $\operatorname{tg}\alpha \approx 1,835$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx$ $\approx 0,55$. **47.** 1) 7,658; 2) 22,105; 3) 74,115; 4) 47,210. **48.** 1) 60°; 2) 27°; 3) 38°; 4) 31°50′. **49.** 2,70. **50.** $v \approx 2,5\cdot10^7$ м/с. **51.** 1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, 2) $\frac{7}{25}$; 3) $2-\sqrt{3}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 3; 5) $-0,4-0,3\sqrt{3}$ або $-0,4+0,3\cdot\sqrt{3}$; 6) 1; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) -4; 9) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; 10) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$. **52.** 1) $\cos\beta$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$; 3) $2\sin 26°$; 4) $\operatorname{tg}4\alpha$; 5) $\cos 2\alpha$; 6) $\sqrt{2}|\cos 4\alpha|$; 7) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$; 8) $4\cos x\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$; 9) $\sin 2\alpha$; 10) 1; 11) $|\sin 2\alpha|$; 12) $\cos 2\alpha$; 13) 2; 14) $\cos^2\alpha$; 15) $\operatorname{ctg}4\alpha$; 16) 1; 17) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$; 18) $2\cos\alpha$; 19) $2|\operatorname{ctg}\alpha|$; 20) $2\sin 2\alpha$; 21) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$; 22) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **53.** 1) $2\sin\alpha\cos\beta$; 2) $2\sin^2\frac{3\alpha}{4}$; 3) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$; 5) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}2\alpha\ \operatorname{tg}3\alpha$; 7) $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha-\beta}{2}$; 8) $4\cos 0,5x\cos x\cos 2,5x$;

9) $-4\sin 25^\circ \sin 5^\circ$; 10) $\sqrt{2}\left|\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|$; 11) $2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta$; 12) $\dfrac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$; 13) $\operatorname{tg}^4\alpha$; 14) $\dfrac{8\cos 4\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin^2 4\alpha}$; 15) $4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$; 16) $-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

До розділу II

1. 1) $x=n\pi$; 2) $\pm(\pi-\arccos 0,4827)+2n\pi,\ n\in Z$; 3) $x=n\pi,\ n\in Z$; 4) $x=-\operatorname{arctg}0,5+n\pi,\ n\in Z$; 5) $x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$; 6) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2},\ n\in Z$; 7) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$; 8) $x=-\frac{2\pi}{3}+4n\pi,\ n\in Z$; 9) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$; 10) $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}n\pi,\ n\in Z$; 11) $x=\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z$; 12) $x=\frac{\pi}{6}-1+n\pi,\ n\in Z$; 13) $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2n\pi,\ n\in Z$; 14) $x==(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$; 15) $x=-\operatorname{arctg}0,6009+n\pi,\ n\in Z$; 16) $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$; 17) $x=(-1)^k\arcsin 0,2753+k\pi,\ k\in Z$; 18) розв'язків немає. **2.** 1) $x=-\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$; 2) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3},\ n\in Z$; 3) $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z$; 4) $x==\pm\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z$; 5) $x_1=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ x_2=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+k\pi,\ n,k\in Z$; 6) $x_1=\frac{k\pi}{2};\ x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\ k\in Z,\ n\in Z$; 7) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z$; 8) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+n\pi$; 9) $x=\frac{n\pi}{4},\ n\in Z$; 10) розв'язків немає; 11) $x_1=2n\pi,\ x_2=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ n,k\in Z$; 12) $x=\frac{2}{3}n\pi,\ n\in Z$; 13) $x_1=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2==\operatorname{arctg}5+k\pi,\ n,k\in Z$; 14) $x=\operatorname{arctg}(\sqrt{3}-2)+n\pi,\ n\in Z$; 15) $x=\pm\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$; 16) $x=\frac{\pi}{8}+(-1)^{k+1}+\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$; 17) $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$; 18) $x=2n\pi,\ n\in Z$; 19) $x_1=\pi+2n\pi,\ x_2=\pm\frac{4\pi}{3}+4k\pi,\ n,k\in Z$; 20) розв'язків немає; 21) $x_1=\pi+2n\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ n,k\in Z$; 22) $x_1=\frac{\pi}{2}+2n\pi,$

$x_2 = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{9} + 2k\pi, n, k \in Z$; 23) $x = -\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$; 24) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi, x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, n, k \in Z$; 25) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$; 26) $x = 2n\pi, n \in Z$; 27) $x = 2n\pi, n \in Z$; 28) $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi, x_2 = = \operatorname{arctg} 2 + k\pi, n, k \in Z$; 29) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$; 30) $x + \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$; 31) $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$; $x_2 \pm \arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + 2m\pi$; $x_3 = = \pm\arccos\frac{-1-\sqrt{5}}{4} + 2k\pi, k, m, n \in Z$; 32) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + +n\pi, x_2 = k\pi, n, k \in Z$; 33) $x_1 = k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{16}(2n+1), n, k \in Z$; 34) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, x_2 = \pi + 2k\pi, n, k \in \in Z$; 35) $x = \frac{n\pi}{2}, n \in Z$; 36) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi, x_2 = = \operatorname{arctg} 3 + k\pi, n, k \in Z$; 37) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$; 38) розв'язків немає; 39) $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$; 40) $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$; 41) розв'язків немає; 42) $x_1 = \frac{n\pi}{2}$; $x_2 = \frac{k\pi}{5}$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + m\pi, n, k, m \in Z$; 3. 1) $-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$; 3) розв'язків немає; 4) $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \operatorname{arctg} 2 + n\pi, n \in Z$; 5) $\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < < \frac{7\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z$; 6) $\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, n, k \in Z$; 7) $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in Z$; 8) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

До розділу III

2. 1) 4; 2) 0,4; 3) 0,04; 4) 0,004; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $\frac{3}{2}$; 7) $1\frac{1}{4}$; 8) 1,8; 9) 1,25; 10) 0,11; 11) 1,5; 12) 1,4. **3.** 1) 6,3; 2) 1,91; 3) $6\frac{3}{5}$; 4) $\frac{4}{5}$ **4.** 1) $\pm 0,5$; 2) $\pm 1,5$; 3) $\pm 0,7$; 4) $\pm 1\frac{1}{3}$. **5.** 1) так; 2) ні; 3) так; 4) так; 5) ні. **6.** 1) $a \geqslant 0$; 2) $a \leqslant 0$; 3) будь-які дійсні числа; 4) $x \leqslant 0$; 5) $x \geqslant 5$; 6) $x > 4$. **7.** 1) 10; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) -1; 6) 0; 7) 0,1; 8) $-1,5$. **9.** 1) 28; 2) 0,2; 3) 16,7; 4) -20. **10.** 1) $-\sqrt[3]{7}$; 2) $-\sqrt[3]{8}$; 3) $-\sqrt[5]{2a}$. **12.** $|a-6|$. **13.** 1, якщо $a > 0$; -1, якщо

$a < 0$ і n парне; 1, якщо $a < 0$ і n непарне. **14.** 1) 10; 2) 2; 3) x^2; 4) 3; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 1,5. **15.** 1) 10; 2) 0,3; 3) 1,5; 4) 3. **16.** 1) $\sqrt[10]{a^9}$; 2) $\sqrt[11]{25}$; 3) $\sqrt[6]{2}$. **17.** 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[6]{36}$; 3) $\sqrt[3]{25}$; 4) $\sqrt[5]{a^2b^3c^4}$. **18.** 1) $\sqrt[12]{3^6}$; $\sqrt[12]{3^4}$; $\sqrt[12]{3^3}$; 2) $\sqrt[6]{16a^4}$; $\sqrt[6]{8a^3}$. **19.** 1) 14; 2) $\frac{1}{10}$; 3) 2; 4) 2; 5) 3. **20.** $x^4 + y^4$. **21.** 1) 0; 2) $2\sqrt{15}$. **22.** $\sqrt[6]{6}$; $\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[6]{9}$. **23.** 1) a^{m-n}; 2) c^{a-b}; 3) $a - 4\sqrt[3]{a}$. **24.** 1) $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$; 2) -1; 3) $2b$; 4) $|5 - a| = a - 5$; 5) $1 - x$, якщо $x = \frac{1}{2}$; $x - 1$, якщо $x = 4$. **26.** 2) Плюс. **27.** $\sqrt[6]{(2 + \sqrt{3})^5}$. **28.** 1) $m^2\sqrt[3]{m^2n^2}$; 2) $2b^2\sqrt[4]{a^3b^3}$; 3) $\frac{2b}{3c}\sqrt[5]{\frac{a^2b}{c^2}}$. **29.** 1) $2(m + n)\sqrt[3]{3(m - n)^2}$; 2) $a^2\sqrt[7]{a^3}$; 3) $a^{2(n-1)}$; 4) $a^xb^3\sqrt[7]{a^2z^3}$. **30.** $x^2\sqrt[4]{2cx^3}$, якщо $x < 0$ і $c < 0$, то $x^3 < 0$ і $x^2 > 0$; тоді підкореневий вираз залишається додатним, а весь вираз — від'ємний $-x^2\sqrt[4]{2cx^3}$. Різні знаки x і c не можуть мати, бо в цьому випадку під коренем четвертого степеня було б від'ємне число. **31.** $ab\sqrt[7]{a - b}$. **32.** $x < 0$. **33.** 1) $\sqrt[3]{24}$; 2) $\sqrt[4]{9}$; 3) $\sqrt[5]{4}$; 4) $\sqrt[3]{2a^3}$; 5) $\sqrt[4]{5b^4}$; 6) $\sqrt{(a + b)^3}$. **34.** 1) $\sqrt[4]{a^3}$; 2) $\sqrt[6]{20}$; 3) $\sqrt[12]{x^4}$; 4) $\sqrt[20]{a^5}$. **35.** 1) $\frac{1}{c^2}\sqrt{abc^2}$; 2) $\frac{1}{a^2 + b^2}\sqrt[3]{m(a^2 + b^2)^2}$. **36.** 1) $\sqrt[4]{4a^{12}b}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{3a^2(a + b)^2}{a - b}}$. **37.** 1) $\sqrt[9]{b^4}$; 2) $-\sqrt{2a(a - 2)}$. **38.** 1) $\sqrt[3]{5} > \sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; 2) $\sqrt[3]{7} < \sqrt{3\sqrt[3]{2}}$. **39.** 1) $-\sqrt{\frac{2(y + x)}{y - x}}$; 2) $\sqrt[6]{4a^3(x - y)^1}$. **40.** 1. **44.** 1) $\frac{x}{y}\sqrt{xy}$; 2) $\sqrt[3]{x^2y^2}$; 3) $\frac{2a}{bc}\sqrt[3]{5ab^2c}$. **45.** 1) $\frac{1}{a + b}\sqrt[3]{a(a + b)}$; 2) $\begin{cases} a, & a > 2b, \\ -a, & a < 2b. \end{cases}$ **46.** 1) $y^2\sqrt[7]{x^2y^2}$; $2(\sqrt{x} + \sqrt{a})^2\ (1 + (x - \sqrt{ax} + a)^2)$. **47.** $-\sqrt{x}$. **48.** 1) так; 2) ні; 3) ні; 4) ні. **51.** Ні. **53.** 1) так; 2) ні. **54.** 1) $210\sqrt[5]{15a^4}$; 2) $0,8\sqrt[7]{\frac{14a^5}{b^3}}$; 3) $\frac{1}{4}ab\sqrt{2ab}$. **55.** 1) $6\sqrt[13]{a^5}$; 2) $\sqrt[24]{a^{21}b^7}$; 3) $a - 2\sqrt[6]{a^5} + \sqrt[3]{a^2}$. **56.** 1) $\sqrt[60]{4000a^{26}}$; 2) $\sqrt[24]{m^5}$; 3) $a^2 - b$. **57.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{a}}{b}$; 3) $3a\sqrt[3]{a^2}$; 4) $\frac{\sqrt{mn}}{2n}$; 5) $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{7})$; 6) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. **58.** 1) $2\sqrt{5} + \sqrt{7}$; 2) $\frac{5a(a\sqrt{7} + 2\sqrt{a})}{7a^2 - 4a}$; 3) $\frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{10})$;

4) $\frac{(7\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2}{49a-4b}$; 5) $7(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$; 6) $(a^2+ax+$ $+x^2)(\sqrt{a}+\sqrt{x})$. **59.** 1) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}}{12}$; 2) $-\frac{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}$. **60.** 1) $\frac{3}{2ab\sqrt[7]{a^3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}-1}$; 3) $\frac{41}{(3\sqrt{5}+2)^2}$; 4) $\frac{5}{3\sqrt{7}+2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{x}{\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x}}$; 6) $\frac{47}{55\sqrt{3}-28\sqrt{6}-54\sqrt{2}+96}$; 7) $\frac{1}{(x-\sqrt{x^2-1})^2}$. **61.** 1) 4; 2) 28; 3) 16; 4) 16; 5) 1; 6) $a+b^2$. **62.** 1) 4; 2) 7. **63.** 1) 16 і 8; 2) $-0{,}5$. **64.** 1) розв'язків немає; 2) -2. **65.** 6. **66.** 1) $-0{,}5$; 2) $\frac{2}{9}$. **67.** 1) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; 3) a і $-b$; 4) -1 і 3. **68.** 1) 2; 2) 6. **69.** 1) -1 і $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. **70.** 1) 0; 2) 62. **71.** 1) $-\frac{2}{3}$ і 3; 2) 0 і 1; 3) 0, 1, 8, 9; 4) $3a$ і $4a$. **75.** 1) $\frac{1}{4}$ і 1; 2) коренів немає. **76.** 1) -1; 2) -2; 3) 0; 4) -6, -5, $-\frac{11}{2}$. **77.** 1) 1, $-\frac{1}{3}$; 2) ±21; 3) $5 \leqslant x \leqslant 10$; 4) 3. **78.** 1) 8; 2) 1, -6; 3) 32; 4) 64. **79.** 1) (9; 4), (4; 9); 2) (1; 4), (4; 1); 3) (8; 2), (2; 8). **80.** 1) (1; 9), (9; 1); 2) (5; 20), (20; 5); 3) (1; 64), (64; 1); 4) (−1; −64), (64; 1). **81.** 2) $((a+b)^2; (a-b)^2)$; 4) (12; 4), (34; −30). **82.** 1) (4; 9), (9; 4); 2) (1; 4), (4; 1); 3) $(9a^2; a^2)$; 4) (4; 1). **83.** 1) (3; −2; 6); 2) (16; 1); 3) (16; 1), (1; 16); 4) $(\sqrt{10}; \sqrt{6})$, $(\sqrt{10}; -\sqrt{6})$. **84.** 1) $\left(\frac{25}{3}, \frac{16}{3}\right)$; 2) (2; 3); (−2; −3); (2; −3); (−2; 3); 3) (5; 3), (5; 4); 4) (5; 4; 5). **85.** 1) a^{16}; 2) x^{7n}; 3) b^3; 4) c^n; 5) a^2; 6) b^2. **86.** 1) $16x^{12}y^8z^4$; 2) $-27a^6b^{12}c^{18}$; 3) $-\frac{27}{125}$; 4) $\frac{a^4}{16b^4}$. **87.** 1) a^8; 2) $-\frac{64x^3y^6}{125z^9}$; 3) $a^{4(n-1)}$; 4) $-\frac{2^{2n-1}}{3^{2n-1}}$. **88.** 1) 1; 2) $\frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{4a}{3b^2x}$; 4) $\frac{1}{32}$. **89.** 1) a^{-m}; 2) 10^{-12}; 3) $\frac{16a^8}{b^{12}}$; 4) $2x^3$. **90.** 1) a^{12}; 2) $625a^4b^8c^{12}$; 3) $p^{m(2n-1)}$; 4) $4^5m^5n^5$; 5) 7^{-18}; 6) $\frac{3a^4+1}{a^2}$. **91.** 1) $\frac{16}{81a^8b^{36}}$; 2) $15x^{2n}$; 3) $\frac{24a^8+b^4}{x^7y^8}$; 4) $\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$. **92.** $4a^{6x}+a^{x+1}x+\frac{x^2}{16a^{2(2x-1)}}$. **93.** 1) c^3; 2) $\left(\frac{c+x}{a-b}\right)^m$. **95.** $\left(\frac{a^2b^4}{2b^2+a}\right)^{-1}$. **96.** 1) x^4; 2) $a^{\frac{13}{12}}$; 3) $b^{-\frac{1}{4}}$; 4) a^{-4}; 5) c^2; 6) $\frac{16}{25}$. **97.** 1) $x^{-\frac{1}{18}}$; 2) $p^{-\frac{2}{7}}q^{\frac{37}{28}}$; 3) b^2. **98.** 1) $3^{\frac{27}{8}}$;

2) 27, 125^{-2}. 99. 1) $a^{-\frac{61}{60}}$; 2) $2a^{-\frac{17}{8}}b^{\frac{2}{3}}$. 100. 1) 1; 2) $a^{\frac{12}{20}}x^{\frac{2}{15}}$. 101. 1) 9; 2) 32; 3) 15; 4) $\frac{1}{a^2}$. 103. 1) $\frac{2^{\frac{1}{2}}-1}{5}$; 2) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+3}$; 3) $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}$; 4) $\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$. 104. 1) $ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x$; 2) $4-y^3$. 105. 1) $b^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}}$; 2) $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}$. 106. 1) $(a-3^{\frac{1}{2}})\cdot(a+3^{\frac{1}{2}})$; 2) $(b^{\frac{1}{3}}-5)\cdot(b^{\frac{1}{3}}+5)$; 3) $(x^{\frac{1}{3}}-2)\cdot(x^{\frac{1}{3}}+2)$; 4) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}})$. 107. 1) $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}}{2}\right)^{\frac{1}{24}}$; 2) $x-y$. 109. $x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$; 2) $x^{-2}-2x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y$. 110. 1) $a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+1)$; 2) $(5-b^{\frac{1}{3}})\cdot(25+5b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$; 3) $(18^{\frac{1}{3}}-6^{\frac{2}{3}})(18^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{2}{3}})$; 4) $a^{\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}})$. 111. 1) 5; 2) 41. 112. 32. 113. 1) 0; 2) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$; 3) y^2; 4) $x+1$; 5) $\frac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}$.

До розділу IV

1. 1) 6; 2) 4,5; 3) -4; 4) 4; 5) 2,5; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 3 і 4; 9) -2 і 1; 10) -2; 11) 1,5; 12) 5; 13) 1; 14) 1; 15) 3; 16) 0; $\log_7 5$; 7) 11; 18) -4; 19) 35; 20) 3; 21) 9; 22) 2; 23) 2; 24) 4; 25) $\log_3 2$; 26) 9; 27) розв'язків немає; 28) $\frac{4}{3}$, $\frac{\log_2 3+3}{3}$; 29) -3; 30) $-\frac{1}{2}$; 31) 3; 32) 1 і 2; 33) -1 і 1; 34) -2 і 2; 35) -2 і 2; 36) $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$; 37) 2; 38) 0; 39) 3; 9; 40) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 41) 3; 42) 0,5; 43) $\frac{3}{4}$; 44) 0; 45) 1; 46) -2; 47) 0 і $\frac{1}{2}$; 48) -4; 10; 49) 10; 50) $-2,5$; 3. 2. 1) $x>-1$; 2) $x>0$; 3) $x<2$; 4) $x<-2$; $x>3$; 5) $x>0$; 6) $x\geqslant 3$; 7) $x>-\frac{2}{3}$; 8) $x<-3$; $x>1$; 9) $x\leqslant -4$; 10) $x<\frac{3}{2}$; 11) $x<-4$; $x>2$; 12) $x\in R$; 13) $-\frac{10}{7}<x<10$; 14) $x>\frac{6}{11}$; 15) $x<-0,25$; 17) $-1<x<7$; 18) $1<x<2$; 19) $(-0,5;1)$; 20) $x>\frac{21}{11}$; 21) $(0;1)$; 22) $(-\infty;-7,5)$ і $(-0,5;+\infty)$; 23) $(0;+\infty)$; 24) $(-\infty;6)$; 25) $(1,5;\infty)$; 26) $(1;\infty)$; 27) $(-3;\infty)$; 28) $(0;2]$; 29) $(-\infty;1]$; 30) $[0;1]$; 31) $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$; 32) $(0;+\infty)$; 33) $(0;+\infty)$; 34) $[0;4]$; 35) $(-1;0)\cup(0;1)$.

До розділу V

2. 1) $4=\log_3 81$; 2) $-2=\log_4\frac{1}{16}$; 3) $\frac{1}{3}=\log_8 2$; 4) $\frac{1}{3}=\log_{27}3$; 3. 1) 3; 2) -1; 3) 0; 4) -1; 5) 9; 6) -7. 4. 1) -2; 2) 3; 3) -4; 4) 6; 5. 1) 25; 2) 216; 3) 16; 4) 1; 5) 8; 6) 0,001. 7.

1) $\log_{\frac{2}{3}} 2,25 = -2$; 2) $\log_{0,1} 0,01 = 2$; 3) $\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$; 4) $\log_{343} 7 = \frac{1}{3}$. **8.** 1) (1; 2) -3; 3) 4; 4) 0; 5) -5; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{2}$; 8) $-2\frac{1}{2}$. **9.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 4; 4) $\frac{1}{2}$. **10.** 1) так; 2) так. **11.** 1) 2; 2) 2. **12.** 2. **13.** 1) -2; 2) -2; 3) $2\frac{1}{2}$; 4) -2; 5) 1; 6) 0; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $\frac{3}{5}$. **14.** 1) 81; 2) $\frac{1}{25}$; 3) 1,25; 4) 4; 5) $a+1$; 6) 729. **15.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 32; 3) 1; 4) $\frac{1}{343}$; 5) $\frac{1}{216}$; 6) 8. **16.** 1) -1; 2) 0. **17.** 1) 8; 2) $1\frac{3}{7}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2; 5) 0,8; 6) 3. **18.** 1) 10; 2) 7; 3) 5; 4) 3; 5) $\frac{1}{7}$; 6) 8. **19.** 1) 5; 2) 7,4; 3) 2; 4) 64; 5) 24; 6) 1,25. **20.** 1) 0,3; 2) 9; 3) 1,5; 4) 7. **22.** 1) 20; 2) $\frac{4}{5}$. **24.** 1) $\lg a + 3\lg b - 2\lg c$; 2) $\frac{1}{5}\lg a - \lg b - 2\lg c$; 3) $2\lg a + \frac{1}{3}\lg b$; 4) $3\lg a + \frac{1}{2}\lg b + \frac{1}{2}\lg c - 2\lg(a+b)$. **25.** 1) $2\lg a + \frac{1}{2}\lg b + \frac{1}{2}\lg c - \lg 3 - \frac{3}{5}\lg(a+b)$; 2) $\lg 2 + \frac{3}{4}\lg a - \frac{1}{2}\lg b$; 3) $\sqrt[3]{1,2}\lg 0,6$. **26.** 1) $\lg 3 + 1\frac{3}{5}\lg a + \frac{2}{5}\lg(a+b)$; 2) $\frac{1}{3}(\lg a - \lg b)$; 3) $\frac{3}{2}\lg a + \frac{1}{2}\lg b$; 4) $-1\frac{5}{6}\lg a$; 5) $\frac{5}{8}(\lg a - \lg b)$. **27.** 1) $\log_{12} 20$; 2) 1. **28.** 2. **29.** 1) 2; 2) 2. **31.** 1) $\frac{7a^3}{5}$; 2) 12; 3) $\frac{\sqrt{a+b}}{a^2 \cdot b^3}$; 4) $\frac{2(a+b)}{3a}$. **32.** 1) $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[3]{(a+b)^2} \cdot \sqrt[3]{a^2}}$; 2) $\frac{2ab^3}{3\sqrt[4]{b-a}}$. **33.** 1) $\frac{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt[3]{a+b}}{a-b}$; 2) $\sqrt[24]{\frac{b^6(a-b)}{a^{16}}}$. **34.** 1) 3; 2) $1\frac{7}{9}$. **35.** 1) 2; 2) 4. **41.** 1) $x > 2$; 2) $x < 5$. **42.** Додатний. **44.** Число N у 100 разів більше, ніж число M. **45.** 1) $(-2; \infty)$; 2) $(-\infty; \infty)$; 3) $(-2; 2)$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **46.** 1) $(-\infty; -2)$, $(2; \infty)$; 2) $(-2; 3)$; 3) $(-1; 2)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right)$. **47.** 1) $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right)$; $(5; \infty)$; 2) $(-\infty; -1)$; $(3; \infty)$; 3) $(-\infty; -2,5)$; $(1, \infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; $(3,5; \infty)$; 5) $\mathbf{R}$, крім $x = 0$; 6) $\mathbf{R}$, крім $x = 0$; $x > 0$ і $x < 0$. **52.** 1) 4; 2) 3; 3) $-2,35$; 4) розв'язків немає; 5) 0; 1; 6) 3; 7) 15; 8) 1 і 125; 9) 100 і 1000; 10) 9 і $\frac{1}{3}$; 11) 100 і 0,01; 12) 10; 0,0001; 13) 10^{10}; 14) 10 і 0,001. **53.** 1) 6,5; 2) 4,5; 3) 1; 4) $\frac{9}{4}$; 5) 3; 6) 14 і 6; 7) 10; 0,1; 1000; 0,01; 8) 100 і 0,01; 9) 1 і -3; 10)

0; 1; 4; 11) 13; 12) коренів немає; 13) 10; 100; 14) $\frac{1}{3}$; 15) 0,0001 і 10; 16) 80. **54.** 1) -3; 2) 95 і 5; 3) 100 і 10^6; 4) 8; 5) 3,5; 6) 4; 7) 4; 8) $\frac{1}{2}$ і 16; 9) 2; 10) 3; $\frac{\sqrt{2-8}}{8}$; 11) 3; 12) 100; 13) a^{-1} і a^2; 14) 10 і $\frac{1}{10}$; 15) 3; 2; 16) 2; 3; 17) 1; 10^3; 10^{-2}; 18) 1; 19) $-\frac{5}{4}$; 20) 6; 21) 1; 22) $\sqrt[3]{3}$; 23) 3. **55.** 1) (100; 10); 2) (2; 5); (5;2); 3) (1; 2); (2;1); 4) (2; 1). **56.** 1) (6; 8); (8; 6); 2) (2; 18); (18; 2); 3) $\left(\frac{1}{12}; \frac{4}{3}\right)$. **57.** 1) $\left(12\frac{5}{9}; -12\frac{4}{9}\right)$; 2) (4,5; 0,5); 3) (27; 4); $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$; 4) (5; 5); 5) (3; 9); (9; 3); 7) (4; 16); 8) (5; 5); 9) (6; 8); (8; 6); 10) (9; 7); 11) (8; 4); 12) (2; 4). **58.** 1) $0 < x < 81$; 2) $x > 25$; 3) $x > \frac{1}{8}$; 4) $0 < x < 0,027$; 10) $(-3; 1)$; 11) $3 < x < 5$; 12) розв'язків немає. **59.** 1) $(0;1)$; 2) $(7;\infty)$; 3) $n > 3$; 4) $x < 4$; 5) $1,6 < x < 5$; 6) $x > 0$, крім $x = 1$; 7) $x > 0$; 8) $x > 2$; 9) $(0; 0,001)$; $(10;\infty)$; 11) $(2;+\infty)$; 12) $3 < x \leqslant 81$. **60.** 1) $(0;3) \cup (9;12)$; 2) $(-\infty;-4)$; $(2;+\infty)$; 3) $3 < x < 4$; 4) $(0;1)$; $(8;9)$; 6) $-3 < x < -\sqrt{2,5}$; $\sqrt{2,5} < x < 3$; 8) $(0;1)$; 9) $2 \leqslant x < \frac{11}{4}$; $4 \leqslant x < +\infty$; 10) $\sqrt[6]{\frac{1}{3}} < x < 1$; 11) $(1;2)$; 12) $x > 0$; 13) $2 + \sqrt{2} < x < 4$; 14) $1 + \sqrt{5} < x < +\infty$; 15) $0,1 < x < \sqrt{10}$, $x > 100$; 16) (3;4).

До розділу VI

1. 1) $a > 0$; $|a| > -a$; $a \leqslant 0$; $|a| = -a$; 2) $a > 0$; $-|a| < a$; $a \leqslant 0$; $-|a| = a$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant a < \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $|3a^2 - 1| = 1 - 3a^2$; $a < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ або $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|3a^2 - 1| > 1 - 3a^2$; **2.** 1) -1; 2) -3; -2; 2; 3; 3) $-\frac{13}{2}$, $\frac{9}{4}$; 4) $[-3; 3]$; 5) $-\frac{1}{3}$; 6) 0; 6; 7) -2; 8) 0; 9) -2; 10) [3;4] або [7; 8); 11) $\varnothing$. **3.** 1) $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right)$ або $(5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1)$ або $(3; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{9}\right)$ або $(1; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ або $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 5) $(-3; -2)$ або $(2; 3)$; 6) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$; 7) $(-\infty; 1 + \sqrt{2})$ або $(3; +\infty)$; 8) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$; 9) $\left(-\frac{2}{3}; 4\right)$; 10) $\left[\frac{-5 - \sqrt{109}}{6}; -2\right) \cup \left(1; \frac{\sqrt{61} - 1}{6}\right]$. **6.** 1) $k < 0$; 2) $k > 0$. **9.** $\frac{1}{2}$. **11.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{3}{4(1-a)}$, якщо $|a| < 1$; не має границі, якщо $a \geqslant 1$. **12.** 1) $\delta = 0,005$; 3) $\delta = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$. **13.** 1) 4; $\frac{m}{n}$. **14.** 1) -1; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 1; 5) -1; 6) $\frac{1}{2}$. **15.** 1) 5; 2) 0.

До розділу VII

1. 1) 3; 2) 30; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{3}{16}$. **2.** -1. **4.** 1) $3a$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; 3) 5; 4) $\frac{1}{4}$. **7.** 1) -3; 2) 0; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $-\frac{1}{\sin^2 x}$. **10.** 1) $10x^9 + 5x^4 + 1$; 2) $\frac{x^3 - \frac{3}{2}x^2 \sin 2x}{x^6 \cos^2 x}$; 3) $4x + \frac{1}{2}$; 4) $-\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 5) $2x \sin x + x^2 \cos x$; 6) $2\cos x + \sin 2x$; 7) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 8) $\frac{3}{2a}\cos 3x$; 9) $-\frac{2}{(x-1)^2}$; 10) $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; 11) $3x^2 - 2x - 1$; 12) $-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(5-2x)^2}}$; 13) $\frac{x^3 \cos x - \cos x - 3x^2 \sin x}{(x^3-1)^2}$; 14) $-3\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$; 15) $\frac{15x^2 - 15x + 12x\sqrt{x} - 10\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$; 16) $\frac{2}{n}x^{\frac{2-n}{n}}$; 17) $-21x^6 + 12x^5 + 3$; 18) $\frac{a + 2bx}{am + bm^2}$; 19) $\frac{-3x^2 + 2x + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$; 20) $-\frac{5}{2x\sqrt{x}}$; 21) $5(a+b)t^4$; 22) $\frac{5}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$; 23) $3ax^2 + 3a^3x^2 + a^3$; $4a^3 + 3a^5$; 24) $\frac{3(-x^6 + 2x^5 - x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 1)}{(1-x)^4}$; 25) $-\frac{3}{4}$; 26) $\frac{\sin 4x + 4\sin 2x \sin^2 x}{\cos^2 2x}$; 27) $\frac{4x - 2x^4}{(x^3+1)^2}$; 28) $\frac{4\cos 2x}{(1 - \sin 2x)^2}$; 29) $(1+x^2)\sin x - x\cos x$; 30) $2nx(x^2+1)^{n-1}$; 31) $\frac{x(\cos x + \sin x) + \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \frac{x \sin x}{\cos^2 x}}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$; 32) $-6x\sin(3x^2 - 1)$; 33) $-3 + \sqrt{\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}} - \frac{2}{\sqrt[3]{t}} - \frac{1}{t\sqrt[3]{t}}$; 34) $2\left(\frac{mu+n}{p}\right) \cdot \frac{m}{p}$; 35) $\frac{-30x^4 + 18x^2 + 6x}{((1-x^2)(1-2x^3))^2}$; 36) $-\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{1}{(1+\sqrt{t})^2} + \frac{1}{(1-\sqrt{t})^2}\right)$; 37) $\frac{4\sin 4x}{(1 + \cos 4x)^2}$; 38) $-3x^2 \sin 2x^3$; 39) $\frac{6x+9}{5} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x^2+3x-1}{5}}{\cos^4 \frac{x^2+3x-1}{5}}$;

40) $2\left(\cos^2\frac{x+1}{2}-\sin 0,8x\right)\left(-\frac{1}{2}\sin x+1-0,8\cos 0,8x\right)$.

11. 45°; **12.** $\operatorname{arctg} 3$. **13.** $\frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2}$. **14.** 1) $120x$; 2) $\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; 3) $-2\cos 2x$; 4) $\frac{10}{27x^2\sqrt{x^2}}$. **16.** 30 разів. **17.** 2) $(-1)^n\frac{an!}{x^{n+1}}$; 3) $\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. **19.** 1) $y^n(x) = \begin{cases} 6x, \text{ якщо } x>0; \\ -6x, \text{ якщо } x<0; \\ 0, \text{ якщо } x=0; \end{cases}$ 2) $y''(0)$ не існує, $y''=2\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ для $x\neq 0$.

До розділу VIII

1. 1) $(-\infty;0)$ — спадає; $(0;+\infty)$ — зростає; 2) спадає на $(-\infty;2)$; зростає на $(2;+\infty)$; 3) спадає на $(-\infty;+\infty)$; 4) спадає на $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 5) зростає, якщо $x>-\frac{b}{2a}$, спадає, якщо $x<-\frac{b}{2a}$, якщо $a>0$; 6) зростає на $(0;+\infty)$; 7) спадає на $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; 8) зростає на $(-\infty;+\infty)$; 9) зростає на $(1;+\infty)$; спадає на $(0;1)$; 10) спадає на $(-\infty;-1)$ і $(-1;\infty)$; 11) зростає на $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, спадає на $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ і $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$; 12) зростає на $(2;+\infty)$, спадає на $(-\infty;0)$; 14) зростає на $(1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;1)$; 15) зростає на $(-1;0)\cup(1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;-1)\cup(0;1)$; 16) зростає при $x\in(-\infty;1)\cup(1;1,5)$; спадає при $x\in(1,5;+\infty)$; 17) зростає на $\left(0;\frac{1}{8}\right)$, спадає на $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$; 18) зростає на $(-\infty;-1)\cup\cup(1;+\infty)$; спадає на $(-1;1)$; 19) зростає на $\left(-\frac{\pi}{3}+2n\pi;\frac{\pi}{3}+\right.$ $\left.+2n\pi\right)$, $n\in Z$, спадає на $\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi;\frac{5\pi}{3}+2n\pi\right)$, $n\in Z$.
2. 1) $y_{\max}=f(2)=4$; 3) $y_{\max}=f(-2)=-4$; $y_{\min}=$ $=f(2)=4$; 4) не має локальних екстремумів; 5) максимум у точках $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$; мінімум у точках $x=$ $=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, $n\in Z$; $y_{\min}=-1$; $y_{\max}=1$; 6) $y_{\min}=$ $=f\left(\frac{3}{4}a\right)=-\frac{a^2}{8}$; 7) $y_{\min}=f(1)=-1$; 8) $y_{\max}=f(-4)=-2$; $y_{\min}=f(4)=2$; 9) $y_{\max}=f(0)=-2$; $y_{\min}=f(2)=2$;

10) $y_{\min} = f(2) = 0$; 11) $y_{\max} = \sqrt{2}$ в точках $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$; $y_{\min} = \sqrt{2}$ в точках $x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$; 13) $y_{\min} = f(0) = 0$; $y_{\max} = f(8) = 65\,536$; $y_{\min} = f(12) = 0$; 14) функція не має екстремумів; 15) $y_{\min} = f(-\sqrt{2}) = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$; $y_{\max} = f(\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; 16) $y_{\min} = f(1,5) = -1,5\sqrt[3]{0,5}$; 17) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ — точки max; $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ — точки min; $y_{\max} = 2$; $y_{\min} = -2$; 18) $y_{\max} = f(0) = \sqrt{2}$. 3. 1) найбільше значення $f(0) = 3$, найменше значення $f(2) = -\frac{7}{3}$; 2) найбільше значення $f(0) = 3$, найменше значення $f(-2) = f(2) = 13$; 3) найбільше значення $f(0) = 0$, найменше значення $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}$; 4) найбільше значення $f(4) = 53\frac{1}{3}$, найменше значення $f(0) = 0$; 5) найбільше значення $f(4) = 6$, найменше значення $f(1) = 2$; 6) найбільше значення $f(0) = -1$, найменше значення $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}$; 7) найбільше значення $f(0,7) = 3,9399$, найменше значення $f(0) = 3$; 8) найбільше значення $f(-1) = -3$, найменше значення $f(-8) = -4$. 4. 1) $x = -\frac{1}{2}$; 3) $v = \frac{2a^3}{27}$; 4) $\frac{a}{4} : \frac{a}{2}$; 5) $\alpha = 2$ рад, $r = \frac{p}{4}$; 6) ширина сторінки $\sqrt{\frac{bs}{a}} + 2b$, довжина сторінки $\sqrt{\frac{as}{b}} + 2a$; 7) квадрат із стороною 5 см; 8) $p = \frac{4R(1+\sqrt{2})}{\sqrt{3}}$; 9) 16 км/год.

До розділу IX

3. 1) $\frac{x^2}{2} + C$; 2) $2\sin x + C$; 3) $-\frac{3}{2}\cos x + C$; 4) $-3\,\mathrm{tg}\,x + C$; 5) $\mathrm{ctg}\,x + C$; 6) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$; 7) $\frac{1}{3}\cos 3x + C$; 8) $\frac{x^5}{5} + C$. 4. 1) $6x$; 2) $-\frac{1}{\cos^2 x}$; 3) $-4\cos x$; 4) $-\frac{1}{\sin^2 x}$. 5. $s(t) = \frac{7t^3}{3} - t - 4\frac{2}{3}$. 6. $s(t) = 3\sin t + 2$. 7. $v(t) = 12t + 100$. 8. $s(t) = 4t^2 + 5t + 24$. 10. 1) $\frac{3}{2}$; 2) $55 + 12\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$; 3) $74\frac{1}{3}$; 4) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 5) 60; 6) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 7) $10 - 4\sqrt{3}$; 8) $5\sqrt{3}$; 9) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 10) $7,5$; 11) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 12) $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$; 13) $\frac{26}{3}$;

14) $\frac{63}{6}$; 15) $8(\sqrt{3}-1)$; 16) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$; 17) $\frac{4\pi-8-\sqrt{3}}{64}$; 18) $8\sqrt{3}$; 19) $\frac{62}{15}$; 20) 3; 21) $1+\frac{\pi}{2}$; 22) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **11.** 2) $10\frac{2}{3}$ (кв. од.); 3) 4 (кв. од.); 4) 4 (кв. од.); 5) 1) $1\frac{1}{3}$ (кв. од.); 6) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ (кв. од.); 7) $\frac{1}{6}$ (кв. од.); 8) $21\frac{1}{3}$ (кв. од.); 9) $30\frac{53}{162}$ (кв. од.); 10) $\frac{17}{24}$ (кв. од.); 11) $6\frac{3}{4}$ (кв. од.); 12) 4,5 (кв. од.); 13) $3,5\sqrt{21}$ (кв. од.); 15) 36 (кв. од.); 16) 36 (кв. од.). **12.** 1) $\frac{31,25}{3}\pi$ (куб. од.); 2) $\frac{\pi^2}{4}$ (куб. од.); 3) $\frac{127}{7}\pi$ (куб. од.); 4) $\frac{1}{3}\pi H(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$. **13.** 1) 13,5 (м). 2) $\frac{31}{6}$ (м); 3) 28,5 (м); 4) $\frac{23}{6}$ (м). **14.** 1) $A=\frac{\pi g R^2H^2}{2}$ (Дж). **15.** $A=2,16$ (Дж). **16.** $A=100l^2$ (Дж), де l — довжина пружини. **17.** $m\approx 0,44$ (кг). **18.** 420 (Кл). **19.** ≈ 171 од.

До розділу X

2. 1) e^x; 2) $7e^{7x}$; 4) $4x^3e^{x^4}$; 5) $3x^2e^{x^3-1}$; 6) $-3e^{2-3x}$; 7) $5^x\ln 5$; 8) $-10^{1-x}\ln 10$; 9) $2\cdot 3^{2x+1}\ln 3$; 10) $3\cdot 7^x\ln 7$; 11) $4\cdot 2,1^{3+4x}\ln 2,1$; 12) $(10x+1)2^{5x^2+x-1}\ln 2$; 13) $\frac{1}{x}$; 14) $\frac{2}{2x-3}$; 15) $x^2(3\ln x+1)$; 16) $\frac{1}{x\ln 7}$; 17) $\frac{1}{x\ln 5}$; 18) $\frac{1}{x\ln 0,3}$; 19) $-2e^{-2x}$; 20) $-7e^{3-7x}$; 21) $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$; 22) $(6x-4)e^{3x^2-4x-2}$; 23) $6e^{2x}-e^x$; 24) $-\frac{(x-1)^2}{e^x}$; 25) $3\cdot 5^{3x}\ln 5$; 26) $6\cdot 2^x\ln 2$; 27) $-7^{1-x}\ln 7$; 28) $-7\cdot 12^{5-7x}\ln 12$; 29) $5\cdot 2,3^{4+5x}\ln 2,3$; 30) $2^x(\ln 2\cos x-\sin x)$; 31) $\frac{3}{1+3x}$; 32) $x^2(3\ln x+1)$; 33) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 34) $\frac{2(x^2+1)-(3+2x)2x\ln(3+2x)}{(3+2x)(x^2+1)^2}$; 35) $\frac{\sqrt{x}}{x}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$; 36) $-\operatorname{tg} x$; 37) $\frac{1}{x\ln 2}$; 38) $-\frac{2}{(3-2x)\ln 9}$; 39) $\frac{4}{(3+4x)\ln 10}$; 40) $\frac{7}{(7x+2)\ln 0,5}$; 41) $\frac{1}{x\ln 10}$; 42) $\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+\frac{1}{\ln 10}\right)$; 43) $2e^{2x}+2e^{\frac{x}{2}}$; 44) $(x+2)e^x$; 45) $\frac{4-5x}{e^x}$; 46) $2xe^{-x^2}(1-x^2)$; 47) $35e^{7x}-9e^{3x}$; 48) $-5\sin 5xe^{\cos 5x}$; 49) $(2x+3)\cdot 2^{3x+x^2}\ln 2$; 50) $4^x(3+10x+3x^2)+(3x+5x^2+$

$+x^3)4^x\ln 4$; 51) $\dfrac{3x^2(4^x+5)-x^3\cdot 4^x\ln 4}{(4^x+5)^2}$; 52) $x\times$ $\times 2^{-x}(2-x\ln 2)$; 53) $5\cdot 3^{5x}\ln 3+49\cdot 2^{5-7x}\ln 2$; 54) $\dfrac{-0,3^{-x}\ln 0,3(\sqrt{x}+0,5)-0,3^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+0,5)^2}$; 55) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$; 56) $\dfrac{x(2\ln x-1)}{3\ln^2 x}$; 57) $e^{x+2}\left(\ln(x+5)+\dfrac{1}{x+5}\right)$; 58) $a^{x^2}\left(2x\ln a\ln(x^2+4x+12)+\dfrac{2x+4}{x^2+4x+12}\right)$; 59) $y'=\dfrac{3}{(2+3x)\ln 7}$; 60) $\dfrac{3}{(7+3x)\ln 0,2}$; 61) $3\log_5(x+1+x^2)+\dfrac{(3x+4)(2x+1)}{(x^2+x+1)\ln 5}$; 62) $\dfrac{3x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}}{(x^3+4\sqrt{x}+5)\ln 11}$; 63) $\dfrac{\cos x+2^x\ln 2}{(\sin x+2^x)\ln 10}$; 64) $\dfrac{2-x}{(x^2-4x+6)\ln 2}$. 3. 1) $\frac{1}{2}e^{2x}$; 2) $\dfrac{4^x}{\ln 4}$; 3) $\dfrac{3\cdot 5^x}{\ln 5}$; 4) $3e^x-6\cdot\dfrac{0,3^x}{\ln 0,3}$; 5) $\ln|x+3|$; 6) $\frac{1}{2}\ln|2x-5|$; 7) $\frac{1}{3}\ln|3x+1|$; 8) $\dfrac{7\cdot 3^x}{\ln 3}$; 9) $\frac{5}{4}e^{4x}$; 10) $\frac{4}{3}e^{3x}-\dfrac{5\cdot 0,2^x}{\ln 0,2}$; 11) $\frac{3}{5}\ln|5x-8|$; 12) $\frac{1}{4}\ln|4x-1|$; 13) $3\ln x+2\ln|x+1|$; 14) $\frac{1}{7}e^{7x}$; 15) $e^x(x-2)$; 16) $\dfrac{a^x x}{\ln^2 a}-\dfrac{2a^x}{\ln^3 a}$; 17) $e^{-x}(x+2)$. 4. 1) $\dfrac{6}{\ln 2}$; 2) $\ln 4$; 3) $\ln 6-\ln 3=\ln 2$; 4) $\dfrac{80}{9\ln 3}$; 5) $-\dfrac{7\frac{3}{4}}{\ln\frac{1}{2}}$; 6) $2\ln 5$. 5. 1) $\ln 3$; 2) $\ln a, (a>1)$; 3) $2\ln 3=\ln 9$. 6. 1) $y=2x+2$; 2) $y=6(1+\ln 2(x-1))$. 7. 1) спадає на $(1;+\infty)$, зростає на $(-\infty;1)$, $y(1)=\frac{2}{e}$ – max. 8. 1) $100x^{99}$; 2) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 3) $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$; 4) $0,1x^{-0,9}$; 5) $\pi x^{\pi-1}$; 6) $-5x^4$; 7) $-20x^{19}$; 8) $\frac{7}{10}x^{-\frac{3}{10}}$; 9) $-10x^{-2}$; 10) $5x^{\frac{3}{2}}$; 11) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$; 12) $\dfrac{(2x+3+7x^6)\sqrt{x^2+1}-(x^2+3x+x^7)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$; 13) $-\frac{9}{2}x^{-\frac{5}{2}}$; 14) $\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$; 15) $3x^{\frac{1}{2}}+2,5x^{-\frac{1}{2}}$; 16) $2(3x^3+8x^2-5)(9x^2+$

$+16x)$; 17) $\frac{1}{10\sqrt{11}}x^{-\frac{3}{2}}$; 18) $\frac{50}{3}x^{2\frac{1}{3}}$; 19) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$; 20) $\frac{1}{5}(x+\sqrt{x})^{-\frac{4}{5}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$; 21) $\frac{12(2x+5x^2)}{7\sqrt[7]{(3x^2+5x^3)^3}}$; 22) $4\left(\frac{1}{5}x^5+7\right)\left(2x^{\frac{14}{3}}+\left(\frac{1}{5}x^5+7\right)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)$; 23) $5(ax^3+bx)^4(3ax^2+b)$; 24) $10\left(\ln\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)^9\left(\frac{1}{2x}+\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}-2x^{-3}\right)$. **10.** 1) $y=x^3+3x$; 2) $y=\pm(x+1)$. **11.** $x'=x\ln 2$, $x=C\cdot 2^t$. **12.** $x'=x\ln 0,99$; $x=C\cdot 0,99^t$. **13.** $T=-\frac{\ln 2}{\ln 0,99}$. **14.** $\frac{6\ln 10}{\ln 2}$. **15.** $\frac{t}{\log_2 a-\log_2 b}$.

До розділу XI

1. 1) $1+7i$; 2) $3+2i$; 3) $-2,9-1,6i$; 4) $8-13i$; 5) $\frac{7}{12}-\frac{1}{20}i$; 6) $8x+4yi$; 7) $3a+3bi$; 8) $-8c-2di$; 9) $\frac{13}{20}-1\frac{3}{4}i$. **2.** 1) $-1+17i$; 2) $(\sqrt{2}+2)+(2\sqrt{2}-1)i$; 3) $\frac{7}{29}+\frac{26}{29}i$; 4) $1-2i$; 5) 13; 6) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})i$; 7) $3(a+bi)$; 8) $-8c-2di$; 9) $\frac{13}{20}-1\frac{3}{4}i$; 10) $\frac{85}{64}$; 11) $(8\sqrt{3}+3)+(6-4\sqrt{3})i$; 12) $(2a^2+3b^2)+5abi$; 13) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 14) $\frac{5\sqrt{3}-7}{4}-\frac{5+7\sqrt{3}}{4}i$. **3.** 1) $(a+3bi)(a-3bi)$; 2) $(0,8+0,7xi)(0,8-0,7xi)$; 3) $(\sqrt{a}+5i)(\sqrt{a}-5i)$; 4) $\left(b+\frac{4}{5}i\right)\left(b-\frac{4}{5}i\right)$; 5) $(\sqrt{3}+\sqrt{x}i)(\sqrt{3}-\sqrt{x}i)$; 6) $\left(\sqrt{7}+\frac{1}{3}i\right)\left(\sqrt{7}-\frac{1}{3}i\right)$; 7) $(x+2i)(x-2i)$; 8) $(x^2+y^2i)(x^2-y^2i)$; 9) $(4+i)(4-i)$. **4.** 1) $-3i$; 2) $-2i$; 3) 7; 4) -5; 5) $-10i$; 6) $6-i$. **5.** 1) $5+12i$; 2) -4; 3) $-2+2i$; 4) $1+4\sqrt{3}i$; 5) 16; 6) $-142-65i$; 7) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 8) -64; 9) 1. **6.** 1) $6\pm 3i$; 2) $\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{23}}{4}i$; 3) $-3\pm 3i$; 4) $-\frac{1}{2}\pm\frac{4\sqrt{5}}{3}i$; 5) $-\frac{7}{6}\pm\frac{\sqrt{11}}{6}i$; 6) $2+i$, $-2+i$. **8.** 1) 2; $\frac{\pi}{3}$; 2) 2; $\frac{2}{3}\pi$; 3) 4; $\frac{\pi}{3}$; 4) 1; $\frac{4}{3}\pi$; 5) 1; $\frac{5}{3}\pi$; 6) 6; $\frac{\pi}{2}$. **9.** 1) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 2) $5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $2(\cos 0+i\sin 0)$; 4) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; 5) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; 6) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$; 7) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\right.$

$+i\sin\frac{4\pi}{3}\Big)$; 8) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; 9) $2\cos\frac{5\pi}{9}\Big(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\Big)$.
10. 1) $2\sqrt{3}+2i$; 2) $1+i$; 3) $-20\sqrt{3}+60i$; 4) 2; 5) $5-5i$; 6) -7. **11.** 1) $3(\cos 110^\circ+i\sin 110^\circ)$; $\frac{1}{12}\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$; 2) $\sqrt{6}\Big(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\Big)$; $\frac{\sqrt{6}}{3}\Big(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\Big)$; 3) $130(\cos 149^\circ+$ $+i\sin 149^\circ)$; $\frac{10}{13}(\cos 65^\circ+i\sin 65^\circ)$; 4) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; $\cos\frac{2\pi}{3}-$ $-i\sin\frac{2\pi}{3}$; 5) $3(\cos 105^\circ+i\sin 105^\circ)$; $6(\cos 95^\circ+i\sin 95^\circ)$; 6) $\sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\frac{11\pi}{12}\Big)+i\sin\Big(-\frac{11\pi}{12}\Big)\Big)$. **12.** 1) -64; 2) $-32\cos^5\frac{3\pi}{5}i$.
13. 1) $2\Big(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\Big)$; 2) $\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}-$ $-i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\Big)$; 3) $\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\Big)$, $k=$ $=0,1,2,3$.

До розділу XII

§ 1. 1. 1) $A=\{7;14;21;28;35;42;49;56\}$; 2) $B=\{-2;5\}$. **2.** $\{5\}$; $\{12\}$; $\{6\}$; $\{5;12\}$; $\{5;6\}$; $\{12;6\}$; $\{5;12;6\}$, $\varnothing$. **4.** $A\backslash B=$ $=\{a;c\}$. $B\backslash A=\{p;q;r\}$. **5.** 9, 0, -24, 128, 1242048. **7.** а) A; б) $M\cup P=\{$множина чисел виду $2m-1$, де $m\in N\}$. **8.** а) $A\cap B=$ $=\{17;19;23;29;31;37\}$; б) $A\backslash B=\{1;3;5;7\}$. **9.** Правильне. **10.** а) правильне; б) правильне; в) неправильне. **11.** Англійську — 18, німецьку і англійську, але не французьку — 0, французьку, але не англійську — 40.

§ 2. 3. 18. **4.** 7. **5.** 1190. **6.** 45. **11.** 44650. **12.** 378. **13.** 2772. **14.** $x=5$. **16.** $T_7=C_{16}^6x^3$. **18.** 91. **19.** 260. **21.** 60.

До розділу XIII

1. $\frac{1}{3}$. **2.** 0,225. **3.** $\frac{1}{120}$. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{4}{9}$. **7.** 0,41. **8.** 0,5. **9.** 0,729. **10.** 0,64. **11.** $P(A)\approx 0{,}9999$. **12.** 0,97. **13.** 0,36. **14.** $\frac{27}{64}$. **15.** $P(A)\approx 0{,}25$. **16.** 0,1; а) 0,2; б) $\frac{1}{7}$. **17.** $\frac{10}{19}$. **18.** $P(A)+\frac{1}{11\,748}$. Це означає, що лише одному з 11 748 учасників доведеться сплатити 500 грн., а 674,8 грн. власники лотереї одержать самі. **19.** $\frac{1}{A_{30}^5}=\frac{1}{17\,100\,720}$. **20.** $P=\frac{8\cdot p_3\cdot p_7}{p_{10}}=\frac{1}{15}$. **21.** 0,9. **24.** 1)

0,612; 2) 0,997. **25.** 0,0005. **26.** $n > 690$. **27.** $P(A) \approx 0,27$; б) $P(A) \approx 0,42$; в) $P(A) \approx 0,23$; г) $P(A) \approx 0,99$; д) $P(A) \approx 0,92$. **28.** 0,0729. **29.** а) імовірніше виграти три партії з чотирьох; б) імовірніше виграти не менше 5 партій з 8. **33.** 0,2. **34.** а) $\approx 0,273$; б) 0,085; в) 0,384. **36.** $\frac{11}{35}$. **37.** 0,25. **38.** $\frac{2501}{6188}$. **39.** 0,78. **40.** $n = 10$. **43.** а) 0,0021; б) 0,035; в) 0,96. **44.** $p_{1,6} \approx p_{0,6} \approx 0$; $p_{2,6} \approx 0,03$; $p_{3,6} \approx 0,13$; $p_{4,6} \approx 0,30$; $p_{5,6} \approx 0,36$; $p_{6,6} \approx 0,18$.

До розділу XV

§ 1. 1. 1) 2; 2) 11,3; 3) $-2\frac{49}{58}$; 4) -6. **2.** 1) а) $\frac{6}{19}$; б) $-\frac{20}{21}$; в) $-\frac{90}{91}$; г) $\frac{12}{37}$. **2.** а) $-\frac{3}{14}$; б) $\frac{140}{129}$; в) $-\frac{21}{23}$; г) $\frac{51}{149}$. **3.** ≈ 12 см^3. **4.** $\approx 11,1$ Ом. **5.** 1045 т. **6.** 220 кг. **7.** ≈ 153 см. **8.** 27 см. **9.** 12 %. **10.** 12,3 %. **11.** 112 %. **12.** Зменшиться на 4 %. **13.** Зросте на 25 %. **14.** Збільшиться на 25 %. **15.** 1,5 кг.

§ 2. 1. 1) $10x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - 5x^2y^2 + 2xy^3 - y^4$; 2) $-8,96y^2$; 3) $21x^2 + 182xy - 63y^2$; 5) $4m^2 + 17\frac{8}{9}nm - \frac{1}{2}n^2$; 6) $0,01x^2 + 0,2xy + y^2$; 7) $2\frac{4}{5}a^2 + \frac{3}{7}b^2 - 6\frac{1}{5}ab$; 8) $\frac{1}{4}a^2 - 2ab + 4b^2$; 9) $0,57xy - 0,004x^2 - 4,05y^2$; 10) $4ab - 9a^2 - 4b^2$; 11) $\frac{49}{25}a^2 - \frac{121}{25}b^2$; 12) $8a$; 13) $6,25m^2 - 5,75mn + 0,6n^2$; 14) $x^3 + 1$; 15) $3\frac{31}{60}xy - 1\frac{2}{5}y^2 - \frac{7}{12}x^2$; 16) $8a^3 - b^3$; 17) $1 - \frac{4}{9}x^2$; 18) $a^3 - 27b^3$; 19) $a^6 - \frac{25}{64}$; 20) $8x^3 + y^3$. **2.** 1) $b^2(a^3 - b^2)$; 2) $(3 + x) \cdot (9 - 3x + x^2)$; 3) $4a^3(3a^4 - b)$; 4) $(1 - 2a)(1 + 2a + 4a^2)$; 5) $(a + b)(x - y)$; 6) $(a + b^3)(a^2 - ab^3 + b^6)$; 7) $(3 - n)(m + 3n)$; 8) $(2-ab)\cdot(4+2ab+a^2b^2)$; 9) $(a-b)\cdot(2x+1)$; 10) $(5a-3b)\cdot(25a^2 + 15ab + 9b^2)$; 11) $(a - c)(a + b)$; 12) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$; 13) $(3 - a)(x + y)$; 14) $1,1(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; 15) $(a + b)(ab - c^2)$; 16) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$; 17) $(5m - 3q)(2n - 5p)$; 18) $9(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; 19) $(3x + 4)(3x - 4)$; 20) $2(m - 1)^2$; 21) $(a - 1)^2$; 22) $x(x + 1)(x + y)$; 23) $\left(1\frac{2}{3} + y^2\right)\left(1\frac{2}{3} = y^2\right)$; 24) $0,09(x^3 - y)(x^3 + y)$; 25) $(2a + 1)^2$; 26) $(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)$. **3.** 1) 224.96; 2) 98,01. 3) 1000; 4) 4; 5) 16; 6) 0,1; 8) 11; 9) 9801; 10) 31. **4.** 1) 2; 2) 2; 3) 2; 4) 4; 5) 2. **5.** а) $\frac{1-a}{1-2a}$; б) $-\frac{c}{a}$; в) $\frac{10}{2m-1}$; г) $3(x - y)$. **6.** а) $1\frac{41}{15}$; б) $\frac{25}{627}$. **8.** а) $x\sqrt{5}$; б) $-3a\sqrt{6}$; в) $5b^2\sqrt{3}$

г) $-3c^3\sqrt{3}$. **10.** а) $\sqrt{7x^2}$; б) $-\sqrt{7x^2}$; в) $\sqrt{5a}$; г) $-\sqrt{-5a}$. **11.** а) $\approx 25,45$; б) 1; в) $\approx 26,30$; г) 6; д) 18,87; е) 214,92; є) 3,57; ж) 0,56. **12.** а) 1; б) $1-x\sqrt{x}$; в) 1; г) $a\sqrt{a}+8$. **13.** а) $\frac{\sqrt{x}-x}{x}$; б) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$; в) $\sqrt{11}+\sqrt{7}$; г) $\frac{6-\sqrt{14}}{11}$. **14.** а) 3; б) 32. **15.** а) $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$; б) $4-x^3$; в) $x-4$; г) $a-b$. **16.** а) $-\frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{x}(x-y)}$; б) $\frac{b+a}{b-a}$.

§ 3. 1. 1) 15; 2) коренів немає; 3) $-\frac{4}{5}$; 4) -3; $\frac{1}{2}$; 5) $-1,7$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) -9; 8) -1; 6; 9) 0; 10) $-\frac{1}{3}$; 2; 11) 0; -3; 12) коренів немає; 13) -2; 5; 14) -4; 4; 15) 0; $\frac{1}{2}$; 16) 0; 1; 17) 0; $\frac{2}{3}$; 18) -1; $\frac{1}{2}$; 19) -2; 2; 20) 5; 21) -3; 3; 22) -1; 2; 23) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; 24) $-\frac{1}{5}$; 25) якщо $k = \pm1$, то рівняння не має смислу; якщо $k \neq 1$, то $x = \frac{3k-1}{k^2-2k+3}$; 26) якщо $a \neq 0$, то $x = -\frac{3}{4}a$, $x = \frac{1}{2}a$; якщо $a = 0$, то $x = 0$; 27) 6; 28) розв'язків немає; 29) $\frac{101}{125}$; 30) -2; 31) 5; 32) ±6; 33) 0; 34) 2; 35) якщо $a \neq 3$, то $x = 2$, якщо $a = 3$, то x — будь-яке число; 36) -1; 10; 38) 2; 39) 0; $a+b$; 41) якщо $a = 0$, або $b = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $x = 0$ і $x = \frac{a}{b}$; 42) -4; 9; 43) якщо $n = 0$ або $n = 1$, то рівняння розв'язків не має; для всіх інших значень n $x = \frac{3(n+3)}{5(n-1)}$; 45) 1; 2; 46) немає розв'язків; 47) $\frac{6}{5}$; $2\frac{2}{5}$; 48) -6; 1; 2; 3. **2.** 1) (4; 2); 2) $(-4,5; 2,25)$; $(4; -2)$; 3) $(8,5; 4,5)$; 4) $(-3; -5)$, $(5; 3)$; 5) $(5; 7)$; $(7; 5)$; 6) $(15; -1)$; $(-20; 6)$; 7) $(-6; 22)$; $(3; -5)$; 8) $(-4; -5)$; $(5; 4)$; 9) $(0; 0)$; 11) $(20; 100)$; $(100; 20)$; 12) $(1; 0)$; 13) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$; 14) $(3; 2)$; $(-3; -2)$; $\left(\frac{8}{\sqrt{3}}; -\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{8}{\sqrt{3}}; \frac{7}{\sqrt{3}}\right)$; 15) $(20; 4)$; $(-20; -4)$; 17) $(2; 3)$; $(3; 2)$; $(1; 5)$; $(5; 1)$; 18) $(6; -1)$; $(5-\sqrt{10}; \sqrt{10})$; $(5+\sqrt{10}; -\sqrt{10})$; 19) $(4; 2)$; 20) $(-3\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(3\sqrt{2}; \sqrt{2})$.