

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
Ю. М. Рабінович
М. С. Якір

11

АЛГЕБРА

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ
І КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ**



 ГІМНАЗІЯ

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонський
Ю.М. Рабінович
М.С. Якір

Алгебра

11 клас

Збірник задач і контрольних робіт

Схвалено

*для використання у загальноосвітніх навчальних закладах
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України*

Харків
«Гімназія»
2011

УДК 373:512
ББК 22.151.я721
М52

Схвалено

*для використання у загальноосвітніх навчальних закладах
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України*

Мерзляк А. Г.

М52 Алгебра. 11 кл. : збірник задач і контрольних робіт /
А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. —
Х. : Гімназія, 2011. — 96 с. : іл.

ISBN 978-966-474-163-4.

Посібник є дидактичним матеріалом з алгебри та початків аналізу для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Він містить близько 700 задач. Першу частину «Тренувальні вправи» поділено на три однотипних варіанти по 239 номерів у кожному. Друга частина містить контрольні роботи (два варіанти) для оцінювання навчальних досягнень учнів відповідно до державної програми з математики.

Для вчителів загальноосвітніх навчальних закладів та учнів 11 класів.

УДК 373:512
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-474-163-4

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський,
Ю. М. Рабінович, М. С. Якір, 2011
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, 2011

ВІД АВТОРІВ

Учням

Любі учні! У цьому році ви поширите і поглибите свої знання з алгебри та початків аналізу, познайомитеся з багатьма новими поняттями, фактами. Ми сподіваємося, що задачі, запропоновані в цій книжці, допоможуть зробити це знайомство не лише корисним, але й цікавим.

Учителю

Ми дуже сподіваємося, що, придбавши цю книжку не тільки для себе, а й «на клас», Ви не пошкодуєте. Навіть тоді, коли Вам пощастило і Ви працюєте за підручником, який подобається, все одно задач, як і грошей, буває або мало, або зовсім мало. Ми маємо надію, що цей посібник допоможе ліквідувати «задачний дефіцит».

Першу частину — «Тренувальні вправи» — поділено на два однотипних варіанти по 239 номерів у кожному. До багатьох (найбільш складних) задач першого варіанта наведено відповіді та вказівки до розв'язування. Відсутність відповідей до вправ другого варіанта, на нашу думку, розширює можливості вчителя при складанні самостійних і перевірочних робіт. На стор. 4, 5 наведено таблицю тематичного розподілу тренувальних вправ.

Друга частина посібника містить 7 контрольних робіт (два варіанти). Зміст завдань для контрольних робіт поділимо умовно на дві частини. Перша відповідає початковому і середньому рівням навчальних досягнень учнів. Завдання цієї частини позначено символом n° (n — номер завдання). Друга частина відповідає достатньому і високому рівням. Завдання кожного з цих рівнів позначено символами n^{\bullet} і $n^{\bullet\bullet}$ відповідно. Виконання першої частини максимально оцінюється у 6 балів. Правильно розв'язані задачі рівня n^{\bullet} додають ще 4 бали, тобто учень має можливість отримати відмінну оцінку 10 балів. Якщо учневі вдалося ще розв'язати задачу $n^{\bullet\bullet}$, то він отримує оцінку 12 балів.

Тематичний розподіл тренувальних вправ

Тема	Номери вправ
Границя числової послідовності	1 – 3
Границя функції. Неперервність функції	4 – 8
Приріст функції. Поняття похідної	9 – 11
Правила обчислення похідних	12 – 22
Похідна складеної функції	23 – 28
Дотична до графіка функції	29 – 42
Механічний зміст похідної	43 – 45
Ознаки зростання і спадання функції	46 – 49
Точки екстремуму функції	50 – 54
Найбільше і найменше значення функції на відрізку	55 – 61
Побудова графіків функцій	62; 63
Показникова функція та її властивості	64 – 67
Показникові рівняння	68 – 73
Показникові нерівності	74 – 77
Логарифм та його властивості	78 – 82
Логарифмічна функція та її властивості	83 – 87
Логарифмічні рівняння	88 – 93
Логарифмічні нерівності	94 – 97
Системи показникових і логарифмічних рівнянь	98
Похідна показникової та логарифмічної функцій	99 – 116

Тема	Номери вправ
Перестановки	117 – 124
Розміщення	125 – 133
Комбінації	134 – 149
Біном Ньютона	150 – 163
Ймовірність випадкової події	164 – 171
Обчислення ймовірностей за допомогою правил комбінаторики	172 – 182
Ймовірність суми подій	183 – 186
Ймовірність добутку подій	187 – 199
Схема Бернуллі	200 – 205
Первісна. Основна властивість первісної	206 – 209
Правила знаходження первісної	210 – 222
Інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца	223 – 226
Площа криволінійної трапеції	227 – 237
Об'єм тіла обертання	238; 239

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ**Варіант 1****Границя числової послідовності**

1. Послідовність задано формулою загального члена $a_n = \frac{n+1}{n}$. Для заданого числа ε укажіть такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|a_n - 1| < \varepsilon$: 1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$; 2) $\varepsilon = 0,1$; 3) $\varepsilon = 0,01$.
2. Користуючись означенням границі послідовності, доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{3}{2}$.
3. Обчисліть границю:
 - 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-4}$;
 - 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3n^2+44}{6n^2-3n+7}$;
 - 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+3)}{n+3}$;
 - 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$.

Границя функцій. Неперервність функцій

4. Для кожної з функцій, графік якої зображено на рисунку 1, установіть:
 - 1) чи визначена ця функція в точці x_0 ;
 - 2) чи існує границя функції в точці x_0 ;
 - 3) якщо границя в точці x_0 існує, то чи дорівнює вона значенню функції в цій точці.
5. Користуючись означенням границі функції, доведіть, що:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.
6. Обчисліть границю:
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 4)$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$;
 - 3) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{2-\sqrt{x-3}}$;
 - 4) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} \right)$;
 - 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{3x}$;
 - 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cos \frac{1}{x}$.

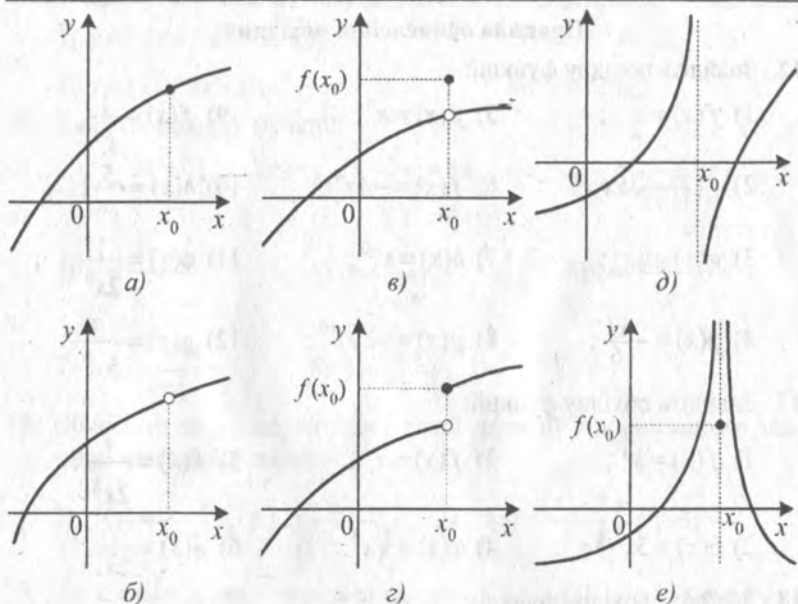


Рис. 1

7. Доведіть, що функція f неперервна в точці x_0 :

1) $f(x) = 3x - 1$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{якщо } x < 4, \\ 3x, & \text{якщо } x \geq 4, \end{cases} \quad x_0 = 4$.

8. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \neq 1, \\ -1, & \text{якщо } x = 1, \end{cases}$ не є неперервною в точці $x_0 = 1$.

Приріст функції. Поняття похідної

9. Знайдіть приріст функції f у точці x_0 при вказаному прирості аргументу Δx :

1) $f(x) = 3x - 2$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,3$;

2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $\Delta x = \frac{\pi}{6}$.

10. Для функції $f(x) = \cos 3x$ знайдіть $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

11. Користуючись означенням, знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 1 - 2x$;

2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

Правила обчислення похідних

12. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x$;

5) $f(x) = x^8$;

9) $f(x) = \frac{1}{x^4}$;

2) $f(x) = \sqrt{5}x$;

6) $f(x) = -4x^4$;

10) $h(x) = \frac{5}{x^6}$;

3) $g(x) = 3x^2$;

7) $h(x) = x^{-3}$;

11) $\varphi(x) = \frac{1}{2x^8}$;

4) $\varphi(x) = -\frac{x^2}{6}$;

8) $g(x) = -2x^{-10}$;

12) $g(x) = \frac{3}{5x^{10}}$.

13. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$;

3) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$;

5) $f(x) = \frac{1}{2x^{\frac{2}{9}}}$;

2) $h(x) = 5x^{-\frac{2}{5}}$;

4) $\varphi(x) = \sqrt[5]{x^3}$;

6) $g(x) = \frac{7}{\sqrt[4]{x}}$.

14. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 3x^3\sqrt{x}$;

3) $\varphi(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[3]{x}}$;

2) $g(x) = \frac{4}{x\sqrt{x}}$;

4) $h(t) = \sqrt{t}\sqrt[3]{t}$.

15. Знайдіть похідну функції:

1) $y = 3x^7 - 6x^5 - 4x^2 + 17$;

4) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$;

2) $y = \frac{1}{3}x^6 - 8\sqrt{x} + 2x$;

5) $y = \frac{x^3}{3} + \sqrt{3}\sin x - \cos \frac{\pi}{3} - 3x^2$;

3) $y = x - \frac{4}{x}$;

6) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

16. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \sqrt{3}$, $x_0 = 3$;

3) $f(x) = \sqrt{x} - 16x^2$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

17. Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;

2) $y = \sqrt{x}(3x^2 + 2)$;

3) $y = (\sqrt{x} + 1)(3 - 2\sqrt{x})$;

5) $y = x^2 \sin x$;

4) $y = (x^2 - 3x + 1)(x^4 - 3x + 2)$;

6) $y = 3x \operatorname{tg} x$.

18. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{3x-7}{5-2x}$;

4) $y = \frac{2x^2+3x}{x^2-4}$;

7) $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$;

2) $y = \frac{4x+1}{x^2-2}$;

5) $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$;

8) $y = \frac{3\cos x}{x^3}$.

3) $y = \frac{x^2+5x}{x-3}$;

6) $y = \frac{\sqrt{x}}{4x-1}$;

19. Обчисліть значення похідної даної функції при вказаному значенні незалежної змінної:

1) $f(x) = \frac{2-3x}{x-1}$, $f'(2) = ?$

2) $f(x) = \frac{x^3-5}{x^3+5}$, $f'(-3) = ?$

20. Чи є правильним твердження, що $f'(1) < g'(1)$, де $f(x) = 4\sqrt{x}$, $g(x) = \frac{2x+5}{3-4x}$?21. Розв'яжіть нерівність $f'(x) + g'(x) \leq 0$, якщо $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $g(x) = 9x^2 + 72x$.22. Знайдіть, при яких значеннях x дорівнює нулю похідна функції $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2$.**Похідна складеної функції**

23. Знайдіть похідну функції:

1) $y = (3-x)^5$;

4) $y = 3(x-2)^5 + 2(1-x)^4$;

2) $y = (6x^5 - 2x)^8$;

5) $y = \sqrt{2x-1}$;

3) $y = \frac{1}{(x^2-3x)^3}$;

6) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$.

24. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = (x^2 - 5x + 1)^{10}$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x}$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^5$, $x_0 = 4$;

4) $f(x) = \frac{3x^2 - 7}{\sqrt{2x - 3}}$, $x_0 = 2$.

25. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \cos 6x$;

3) $y = \sin^2 x$;

5) $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$;

2) $y = \operatorname{ctg} \left(3x + \frac{\pi}{6} \right)$;

4) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$;

6) $y = \frac{\sin 3x}{x-1}$.

26. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = \sin \frac{x}{5}$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$;

3) $f(x) = \cos^4 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{9}$;

2) $f(x) = \operatorname{tg} x^2$, $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

4) $f(x) = 3x \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

27. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g(x)$, якщо $f(x) = 2x^2 \cos^2 \frac{x}{2}$,
 $g(x) = x - x^2 \sin x$.

28. При яких значеннях x похідна функції $f(x) = 3 \sin \frac{x}{3} + x \frac{\sqrt{3}}{2}$ більша за нуль?

Дотична до графіка функції

29. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x - 2 \text{ у точці з абсцисою } x_0 = -2.$$

30. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{\pi}{12}$.

31. Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = x^3 - 5x$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \sqrt{5x-3} - x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \cos^3 x$ у точці з абсцисою $x_0 = \pi$.

32. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ у точці перетину його з віссю ординат.

33. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x-4}{x^2-2}$ у точці перетину його з віссю абсцис.

34. Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x) = x^3 - 2,5x^2 + x + 4$, у якій дотична до цього графіка паралельна прямій $y = 3x - 5$.

35. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 4x + 6$, яка паралельна прямій $y = 4x + 7$.

36. Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $f(x) = x^4 - 4x^2 - 8$.
37. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.
38. Знайдіть, у якій точці графіка функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 7$ дотична нахилена до осі абсцис під кутом $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
39. Під якими кутами парабола $y = x^2 + 3x - 18$ перетинає вісь абсцис?
40. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 - x^2 + 6x - 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.
41. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^2 + 2$, яка проходить через точку $M(0; 1)$.
42. При яких значеннях b і c парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = 3x - 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$?

Механічний зміст похідної

43. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 3t^2 - 5t + 8$ (час t вимірюється в секундах, переміщення x — у метрах). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t = 4$.
44. Обертання тіла навколо осі здійснюється за законом $\varphi(t) = 6t - 2t^2$. Знайдіть, у який момент часу тіло зупиниться (t — час у секундах, $\varphi(t)$ — кут повороту в радіанах).
45. Тіло масою 5 кг рухається прямолінійно за законом $s(t) = 4t^3 - 3t^2 + 10t$. Знайдіть кінетичну енергію тіла і силу, що діє на нього, у момент часу $t = 2$ (час t вимірюється в секундах, переміщення s — у метрах).

Ознаки зростання і спадання функцій

46. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^3 - 18x$;

3) $f(x) = 0,2x^5 - x^3 + 2x - 9$;

2) $f(x) = 1 + 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$;

4) $f(x) = \frac{x^2 - 2,5x}{x + 2}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$;

6) $f(x) = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

47. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$ зростає на множині дійсних чисел.

48. Доведіть, що функція $f(x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}$ спадає на проміжку $[1; +\infty)$.

49. Знайдіть, при яких значеннях a зростає на \mathbb{R} функція:

1) $f(x) = ax^2 + 4x + 5$;

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + 4x - 10$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{(2a+1)x^2}{2} + 2ax + a - 3$.

Точки екстремуму функції

50. Знайдіть критичні точки функції:

1) $f(x) = 2x^3 + 2,5x^2 - x$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

2) $f(x) = (x+1)^2(x-3)^2$;

51. Знайдіть, при яких значеннях a не має критичних точок функція

$$f(x) = \sqrt{(x+4)^3} - (a-4)x.$$

52. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 10$;

3) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;

2) $f(x) = (x-3)^3(x+2)^2$;

4) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$.

53. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$;

5) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$;

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$;

6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$;

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$;

7) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$;

4) $f(x) = (x+1)^3(x-2)^4$;

8) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

54. Знайдіть, при яких значеннях a функція $f(x) = a \sin^2 x - (2a + 1)x$:

- 1) не має критичних точок;
- 2) не має точок екстремуму.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

55. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

- 1) $f(x) = 1 - 3x^2 - x^3$, $[-1; 2]$;
- 3) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$, $[3; 6]$;
- 2) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, $[-2; 1]$;
- 4) $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$, $[0; \pi]$.

56. На яку множину функція $f(x) = 6x - 2x^3$ відображає відрізок $[-1; 3]$?

57. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = -x^3 + 3x|x - 3|$ на проміжку $[0; 4]$.

58. Подайте число 60 у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

59. Знайдіть додатне число, потроєний квадрат якого більший за подвоєний куб цього числа на найбільше значення.

60. Якими мають бути сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 60 см, щоб його площа набувала найбільшого значення?

61. У рівнобедрений трикутник, кут при основі якого дорівнює α , вписано коло радіуса r . Знайдіть площу трикутника. При якому значенні α площа трикутника буде найменшою?

Побудова графіків функцій

62. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

- 1) $f(x) = 3x^2 - x^3$;
- 4) $f(x) = \frac{x + 3}{x - 1}$;
- 2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4$;
- 5) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$;
- 3) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$;
- 6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

63. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

- 1) $f(x) = x - \sqrt{x}$;
- 2) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$;
- 3) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

$$5) \frac{4}{2^{x-2}+2} - \frac{1}{2^{x-2}-3} = 2; \quad 7) 3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4;$$

$$6) 2^x + 2^{2-x} = 5; \quad 8) \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} \right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}} \right)^x = 10.$$

71. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0; \quad 3) 5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} = 8 \cdot 15^x;$$

$$2) 6 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x - 4^x = 0; \quad 4) 4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}.$$

72. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2^x = 3 - x; \quad 2) 3^x + 4^x = 5^x; \quad 3) 2^{\cos x} = x^2 + 2.$$

73. При яких значеннях a рівняння $4^x - (a+3) \cdot 2^x + 4a - 4 = 0$ має один дійсний корінь?

Показникові нерівності

74. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 4^x > \frac{1}{64}; \quad 5) 8 \cdot 2^{x^2+6x} > 0,25;$$

$$2) \left(\frac{1}{3} \right)^x \leq \frac{1}{81}; \quad 6) (0,4)^{\frac{x^2-4}{x}} \leq \frac{125}{8};$$

$$3) \left(\frac{5}{6} \right)^{x^2} \geq \left(\frac{6}{5} \right)^{4x-5}; \quad 7) (0,2)^{x-2} \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$4) (0,6)^{\frac{x^2-7x+12}{x}} \leq 1; \quad 8) \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2-\frac{x-3}{x+2}} \leq \left(\frac{\pi}{3} \right)^{\frac{x-2}{x+1}}.$$

75. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9;$$

$$2) (0,5)^{x-1} + (0,5)^{x+1} \leq 26;$$

$$3) 7^x - 2^{x+2} < 5 \cdot 7^{x-1} - 2^{x-1};$$

$$4) 12^x - 2 \cdot 6^x \leq 36 \cdot 2^x - 72.$$

76. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0; \quad 3) 5^{-x} + 24 < 25 \cdot 5^x;$$

$$2) 3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0; \quad 4) (0,1)^{-2x} - 9 \cdot (0,1)^{-x} - 10 \geq 0.$$

77. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 9 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{-\frac{1}{x}} < 4 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}; \quad 2) 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \geq 0.$$

Логарифм та його властивості

78. Знайдіть:

- 1) $\log_2 8$; 3) $\log_{14} 1$; 5) $\log_5 0,04$; 7) $\lg 0,001$; 9) $\log_{0,5} 32$.
 2) $\log_{13} \frac{1}{13}$; 4) $\log_{20} 20$; 6) $\log_{81} 3$; 8) $\log_{36} 216$;

79. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 512$; 6) $\frac{\lg 27}{\lg 3}$;
 2) $\log_9 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$; 7) $\log_{64} \sqrt[3]{2}$;
 3) $\log_2 32 - \log_{21} \sqrt{21} - 3 \log_4 \frac{1}{64}$; 8) $10^{2 \lg 7}$;
 4) $\log_{18} 36 + \log_{18} 9$; 9) $27^{1 - \log_3 4}$;
 5) $\log_{13} 26 - \log_{13} 2$; 10) $5^{\frac{4}{\log_3 5}}$.

80. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3^x = 5$; 2) $7^{2x-3} = 6$; 3) $2^{x+9} = 12$.

81. Обчисліть значення виразу $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3} + \frac{1}{3} \log_3 8} - 27 \log_2 \sqrt[4]{2 \sqrt[3]{2}}$.

82. Виразіть $\log_{35} 28$ через a і b , якщо $a = \log_{14} 7$, $b = \log_{14} 140$.

Логарифмічна функція та її властивості

83. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \log_{0,2} (2x - 7)$; 3) $y = \log_{x-1} (5 - x)$;
 2) $y = \lg (4 - x^2)$; 4) $y = \lg (1 + \sin x)$.

84. Порівняйте з нулем:

- 1) $\log_3 7$; 2) $\log_5 0,6$; 3) $\log_{\frac{2}{3}} 0,1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$.

85. Порівняйте числа a і b , якщо:

- 1) $\log_{2,6} a > \log_{2,6} b$; 2) $\log_{\frac{3}{7}} a \leq \log_{\frac{7}{7}} b$.

86. Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

- 1) $\log_a 10 < \log_a 9,6$; 2) $\log_a 0,4 > \log_a 0,3$.

87. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \log_2 (-x)$; 3) $y = \lg |x|$; 5) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;
 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$; 4) $y = \log_3 \operatorname{tg} x + \log_3 \operatorname{ctg} x$; 6) $y = \frac{\log_2 x}{\log_2 x}$.

Логарифмічні рівняння

88. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2 x = 4$;

6) $\log_x 8 = 3$;

2) $\log_{0,2}(x+4) = -2$;

7) $\log_{x-1} 25 = 2$;

3) $\log_{\frac{8}{27}}(x^2 - 6x) = -\frac{2}{3}$;

8) $\log_x 225 = \frac{2}{3}$;

4) $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$;

9) $\log_{x-2}(4x^2 - 14x + 7) = 2$.

5) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$;

89. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_8(x^2 - 7x + 4) = \log_8(x - 3)$;

2) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$;

3) $\log_5(x+1) - \log_5(1-x) = \log_5(2x+3)$;

4) $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$;

5) $2\log_4(4-x) = 4 - \log_2(-2-x)$;

6) $\lg 5 - 1 = \lg(x-3) - \frac{1}{2}\lg(3x+1)$;

7) $2\log_7(x-2) = \log_7(x-10)^2 - 2$;

8) $\log_3(4-x) + \log_9(2-x)^2 = 1$.

90. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$;

5) $\lg(10x) \cdot \lg(0,1x) = \lg x^3 - 3$;

2) $\lg^2 x - \lg x^2 - 3 = 0$;

6) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^4 - 3) = 0$;

3) $\log_5^2 x^3 - 10\log_5 x + 1 = 0$;

7) $\log_{\frac{1}{2}} 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$;

4) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$;

8) $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4$.

91. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0,0001$; 2) $x^{\log_4 x} = 2^{3(\log_4 x + 3)}$; 3) $x^{\lg 3} + 3^{\lg x} = 54$.

92. З'ясуйте, при яких значеннях a дане рівняння має корені, та знайдіть їх:

1) $\log_8(x+2) = \log_8(2x-a)$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2ax) = \log_{\frac{1}{3}}(-x - 2a + 2)$.

93. При яких значеннях b рівняння $2\log_{\frac{1}{2}}(x+3) = \log_{\frac{1}{2}}(2b+1)x$ має єдиний корінь?

Логарифмічні нерівності

94. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_3 x > 2;$$

$$7) \log_{0.7}(3x-5) < \log_{0.7}(x+1);$$

$$2) \log_8 x \leq 1;$$

$$8) \log_5(4x-3) > \log_5(3-2x);$$

$$3) \log_{0.2} x \geq -2;$$

$$9) \log_3 \frac{2-3x}{x} \geq -1;$$

$$4) \log_{\frac{1}{27}} x < \frac{1}{3};$$

$$10) \log_{\frac{1}{6}}(x+4) > \log_{\frac{1}{6}}(x^2+2x-2);$$

$$5) \log_5(2x-7) < 3;$$

$$11) \log_{0.3} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} \geq 0;$$

$$6) \log_{0.3}(6-x) > -1;$$

$$12) \lg(x-2) + \lg(27-x) < 2;$$

$$13) 2\lg(-x) > \lg(x+6);$$

$$14) \log_{0.4}(x-1) + \log_{0.4} x \geq \log_{0.4}(x+3).$$

95. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_{0.2}^2(x-1) > 4;$$

$$3) \log_3^2 x - 2\log_3 x - 8 \geq 0;$$

$$2) \log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 < 0;$$

$$4) 2\log_{\frac{1}{4}}^2(x+2) + 3\log_4(x+2) - 2 \leq 0.$$

96. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_x(x^2+3x-3) > 1;$$

$$2) \log_{2x+4}(x^2+1) \leq 1.$$

97. При яких значеннях a число -1 є розв'язком нерівності $\log_a(1-3x) < 4$?

Системи показникових і логарифмічних рівнянь

98. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3(\log_y x - \log_x y) = 8, \\ xy = 16; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(y-x) + \log_2 \frac{1}{y} = -2, \\ 2y - x = 5; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 4^{x+y} - 3^{x-y} = 247, \\ 4^{\frac{x+y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{2}} = 13; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x-6y) = 3. \end{cases}$$

Похідна показникової та логарифмічної функцій

99. Знайдіть похідну функції:

1) $y = e^{6x}$;

7) $y = 0,4^{\lg x}$;

13) $y = \frac{e^x}{x-1}$;

2) $y = e^{-x^3}$;

8) $y = 10 \cdot 7^{4-0,2x^2}$;

14) $y = \frac{5^x - 4}{5^x + 2}$;

3) $y = e^{4x-x^2}$;

9) $y = e^x(x^2 + 3x - 6)$;

15) $y = e^{\operatorname{ctg} 4x}$;

4) $y = e^{\sin x}$;

10) $y = e^x \cos x$;

16) $y = \sin 2^{x^2+5}$;

5) $y = 5^{-x}$;

11) $y = 2^{-x} \sqrt{x}$;

6) $y = 6^{2x-5}$;

12) $y = 3^{\sqrt{x}}(x-5)$;

100. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = e^{2x} - e^{-3x^2}$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = e^{3x}(x^2 + 1)$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = 2^{4x-5x^2+1}$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \frac{e^{4x}}{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

101. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq g'(x)$, якщо:

1) $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$, $g(x) = 2xe^{-x}$;

2) $f(x) = 9^{4x-1}$, $g(x) = 4 \cdot 3^{2x}$.

102. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \log_8 x$;

9) $y = \frac{x^3}{\ln^2 x}$;

2) $y = \ln 4x$;

3) $y = \ln(x^2 + 2x)$;

10) $y = x^2 \ln(x^3 + 1)$;

4) $y = \lg \sin x$;

11) $y = \log_4(4^x + 10^x)$;

5) $y = \ln^4 x$;

12) $y = \sqrt{\lg x - 2}$;

6) $y = x^3 \ln x$;

13) $y = \log_{0,3}(2x^2 - 4x + 3)$;

7) $y = (5x^2 - 3) \ln^2 x$;

14) $y = \frac{x \ln x}{x-1}$;

8) $y = \frac{\ln x}{x^2}$;

103. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = \ln(2x + 1)$, $x_0 = 1,5$;

2) $f(x) = \frac{1}{6} \ln(-9x)$, $x_0 = -\frac{1}{12}$;

3) $f(x) = \log_4(x^2 + 4x - 3)$, $x_0 = -5$;

4) $f(x) = \ln \cos \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

104. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \geq g'(x)$, якщо $f(x) = 1,5x^2 + 2x$, $g(x) = \ln(-2x)$.

105. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 \ln(x^2 + 5x - 23)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

106. Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = xe^{-x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$;

2) $f(x) = e^{x^2 - 5x + 6}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$;

3) $f(x) = 5^{3x-4}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$;

4) $f(x) = \ln(4x + 5)$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$;

5) $f(x) = 2 - \ln(x + 1)$ у точці перетину з віссю ординат;

6) $f(x) = \log_5(2x + 7)$ у точці з абсцисою $x_0 = 9$.

107. У якій точці графіка функції $f(x) = \ln(3x - 2)$ дотична до нього нахилена до осі абсцис під кутом $\alpha = 45^\circ$?

108. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, яка паралельна прямій $y = e^2x - 10$;

2) $f(x) = e^{3x-2}$, яка паралельна прямій $y = 3x + 17$.

109. Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x) = (3^x + 6)(3^x - 60)$.

110. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x - e^x$;

7) $f(x) = 3^{3x-1} - 6 \cdot 3^{2x} + 27 \cdot 3^x$;

2) $f(x) = e^{6x-x^2+5}$;

8) $f(x) = 1 - x \ln x$;

3) $f(x) = e^{x^3}$;

9) $f(x) = x^2 \ln x$;

4) $f(x) = (2x - 1)e^{4x}$;

10) $f(x) = 3x \ln^2 x$;

5) $f(x) = xe^{-\frac{x}{3}}$;

11) $f(x) = x^3 \log_3 x$;

12) $f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$;

6) $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$;

13) $f(x) = \ln^3 x - 3 \ln x$;

14) $f(x) = \log_2^4 x - 2\log_2^2 x + 8$;

15) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3\ln(-x) + 6$;

16) $f(x) = 2\ln(x+1) - x^2 - 2x + 4$;

17) $f(x) = x\ln^3 x - 4x\ln x + 4x + 2$.

111. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

1) $f(x) = xe^{\frac{x}{4}}$, $[-8; 0]$;

2) $f(x) = 8^{x^2+2x-1}$, $[-2; 0]$;

3) $f(x) = 3^{-x} + 3^x$, $[-1; 2]$;

4) $f(x) = e^{3x+2}(4x^2 - 5x)$, $[0; 2]$;

5) $f(x) = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x$, $[-1; 1]$.

112. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = 4xe^{\frac{x}{2}}$;

5) $f(x) = 2\ln x - x^2$;

2) $f(x) = xe^{-x^2}$;

6) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

3) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$;

7) $f(x) = \ln(4 - x^2)$;

4) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

8) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$.

113. При яких значеннях a функція $f(x) = 4e^{-x} - ax + 6$ не має критичних точок?

114. При яких значеннях a функція $f(x) = 3^a x \ln 3 - 27x \ln 3 - 3^{3x-2}$ спадає на множині дійсних чисел?

115. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = e^x - x - 1$ і доведіть, що $e^x > x + 1$ при $x > 0$.

116. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = x - \ln(1+x)$ і доведіть, що $x \geq \ln(x+1)$ при $x > -1$.

Перестановки

117. Скоротіть дріб:

1) $\frac{n!}{(n+1)!}$; 2) $\frac{n!}{(n-2)!}$; 3) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$; 4) $\frac{n!}{(n-k)!}$, $n > k$.

118. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!};$$

$$2) \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}.$$

119. Розв'яжіть рівняння $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$.

120. Обчисліть:

$$1) \frac{P_5 + P_4}{P_3};$$

$$2) \frac{P_{10} - P_9}{9P_8};$$

$$3) \frac{P_{3k}}{P_{3k-2}}.$$

121. Скількома способами можна скласти список з 5 учнів?

122. У ліцеї n класів і n класоводів. Скількома способами можна розподілити класне керівництво між учителями?

123. Скільки різних чотирицифрових чисел можна записати з допомогою цифр 0, 2, 4, 6, якщо кожен з них використовувати тільки один раз?

124. Скільки різних слів можна одержати, переставляючи букви слова:

1) «ліцей»; 2) «галушка»; 3) «шаровари» (словом вважається будь-яка послідовність літер)?

Розміщення

125. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{A_{15}^4 + A_{14}^5}{A_{15}^3};$$

$$2) \frac{A_{12}^4 \cdot P_7}{A_{11}^9}.$$

126. Доведіть, що $A_n^{n-1} = P_n$.

127. Розв'яжіть рівняння:

$$1) A_x^2 = 20;$$

$$2) A_{x+1}^2 = 156.$$

128. У футбольній команді з 11 гравців треба обрати капітана та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

129. У ліцеї в 9 класі вивчають 12 предметів. Денний розклад містить 6 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад?

130. Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких непарні і різні?

131. Скільки існує звичайних дробів, чисельник і знаменник яких — різні прості числа, не більші за 20?

132. Скільки існує правильних дробів, чисельник і знаменник яких — прості числа, не більші за 20?

133. Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких різні і парні?

Комбінації

134. Обчисліть:

1) C_8^4 ; 2) C_7^6 ; 3) $C_6^2 + C_6^0$; 4) C_{27}^4 ; 5) $C_{1999}^{1999} + C_{1999}^1$.

135. Доведіть, що:

1) $C_6^3 + C_6^2 = C_7^3$; 2) $C_9^4 + C_9^3 = C_{10}^4$.

136. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{n} C_{n+1}^{n-1}$; 2) $\frac{3}{n} C_{2n}^{2n-1}$.

137. Обчисліть:

1) C_{25}^{24} ; 2) C_{19}^{17} ; 3) C_{1000}^{999} .

138. Доведіть, що:

1) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$;

2) $C_6^0 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^6 = C_6^1 + C_6^3 + C_6^5$.

139. Розв'яжіть рівняння:

1) $A_x^2 + C_x^1 = 256$; 4) $C_x^{19} = C_x^6$;

2) $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x$; 5) $C_{27}^8 + C_{27}^7 = C_{28}^x$;

3) $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$; 6) $C_{23}^9 + C_{23}^x = C_{24}^9$.

140. Розв'яжіть рівняння:

1) $C_x^2 = 153$; 3) $C_x^{x-2} = 45$; 5) $3C_{2x}^{x+1} = 2C_{2x+1}^{x-1}$;

2) $C_{x+2}^3 = 8(x+1)$; 4) $\frac{C_{x+1}^2}{C_x^3} = \frac{4}{5}$; 6) $11C_{2x}^x = 6C_{2x+1}^{x+1}$.

141. У класі 32 учня. Скількома способами можна сформувати команду з 4 чоловік для участі в математичній олімпіаді?

142. На площині розміщені 25 точок так, що ніякі три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

143. Скільки можна скласти з простих дільників числа 2730 складених чисел, які мають тільки два простих дільника?

144. Скількома способами можна групу з 17 учнів розділити на дві групи так, щоб в одній групі було 5 учнів, а в другій — 12 учнів?

145. У класі вчаться 15 хлопчиків і 12 дівчаток. У генеральному прибиранні класу беруть участь 3 хлопчика і 4 дівчинки. Скількома способами можна скласти групу чергових?

146. У одного хлопчика є 10 марок для обміну, а у другого — 8. Скількома способами вони можуть обміняти дві марки одного на дві марки другого?
147. На одній з паралельних прямих позначено 7 точок, а на другій — 12. Скільки існує чотирикутників з вершинами в цих точках?
148. У баскетбольній команді, яка складається з 15 чоловік, треба обрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?
149. Скількома способами можна вибрати 10 карт з повної колоди, яка містить 52 карти, так, щоб серед них було рівно три тузи?

Біном Ньютона

150. Знайдіть розклад степеня бінома:

$$\begin{array}{llll} 1) (a+b)^5; & 4) (\sqrt{u}-\sqrt{t})^4; & 6) (3x-1)^4; & 9) \left(\frac{1}{x}-1\right)^5; \\ 2) (m+n)^7; & 5) \left(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^5; & 7) (a+2b)^5; & \\ 3) (x-y)^4; & 8) (a^2-1)^4; & 10) (2-y^{-2})^4. & \end{array}$$

151. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів у розкладі бінома $(a+b)^n$ дорівнює 256. Знайдіть n .
152. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів, які стоять на парних місцях у розкладі бінома $(x+y)^n$, дорівнює 512. Знайдіть n .
153. Чому дорівнює сума біноміальних коефіцієнтів розкладу бінома $(x+a)^9$, які стоять на непарних місцях?
154. Доведіть, що сума всіх коефіцієнтів розкладу бінома $(2a-b)^n$ при будь-якому натуральному n дорівнює 1.
155. Доведіть, що сума всіх коефіцієнтів розкладу бінома $(x-2y)^n$ при будь-якому непарному n дорівнює 1.
156. Доведіть тотожність:
- $$C_n^0 \cdot 2^n + C_n^1 \cdot 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} \cdot 2^1 + C_n^n \cdot 2^0 = 3^n.$$
157. Який номер члена у розкладі бінома $(a+b)^{24}$, що містить ab у степені 5?

158. Знайдіть шостий член у розкладі бінома $\left(\frac{1}{x} + x^2\right)^{12}$.

159. Знайдіть четвертий член у розкладі бінома $(a^3 + \sqrt[3]{b})^{10}$.

160. Знайдіть середній член у розкладі бінома $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6$.
161. У розкладі бінома $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^8$ знайдіть номер члена, який не містить x .
162. Знайдіть член розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, який не містить x .
163. Знайдіть член розкладу бінома $\left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x}\right)^{12}$, який містить x у другому степені.

Ймовірність випадкової події

164. Яка ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде число очок, що дорівнює:
1) двом; 3) парному числу;
2) п'яти; 4) числу, яке кратне 6?
165. Щоб здати екзамен з математики, треба вивчити 30 білетів. Учень вивчив на відмінно 25 білетів. Яка ймовірність того, що, відповідаючи на один білет, він отримає відмінну оцінку?
166. У гральній колоді 36 карт. Навмання вибирається одна карта. Яка ймовірність того, що ця карта: 1) туз; 2) червовий туз?
167. Кидають дві однакові монетки. Яка ймовірність того, що випа-дуть: 1) два герба; 2) герб і цифра?
168. Яка ймовірність того, що ваша майбутня дитина народиться:
1) 7 числа; 2) 31 числа; 3) 29 числа?
169. У ящику знаходилося 45 кульок, з яких 17 білих. Загубили дві не білих кульки. Яка ймовірність того, що вибрана навмання одна кулька буде білою?
170. У коробці лежать 5 червоних, 8 синіх, 3 зелених і 4 жовтих кульки. З коробки навмання витягли одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька не буде синьою?
171. Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число ділиться націло на 12?

Обчислення ймовірностей за допомогою правил комбінаторики

172. У ящику лежать 8 кульок, дві з яких білі. Яка ймовірність того, що вибрані навмання дві кульки будуть білими?

173. Чотири картки пронумеровано числами 1, 2, 3, 4. Яка ймовірність того, що з номерів вибраних навмання трьох карток можна утворити зростаючу арифметичну прогресію?
174. На картках написано натуральні числа від 1 до 10. Навмання вибираються дві з них. Яка ймовірність того, що добуток номерів вибраних карток буде непарним числом?
175. Вибирають навмання чотири літери слова «закон». Яка ймовірність того, що з вибраних чотирьох літер можна скласти слово «коза»?
176. Навмання вибирають чотири літери зі слова «ласощі». Яка ймовірність того, що вибрані чотири літери в послідовності вибору утворюють слово «сало»?
177. Серед 30 деталей є 8 бракованих. Яка ймовірність того, що взяті навмання 5 деталей будуть без дефекту?
178. 3 колоди у 36 карт навмання вибирають дві карти. Яка ймовірність того, що вибрані карти — два тузи?
179. На екзамен з математики виносять 40 запитань. Учень підготував тільки 35. Білет складається з чотирьох запитань. Яка ймовірність того, що учень отримає найвищу оцінку?
180. На екзамен з математики виносять 50 запитань. Учень підготував тільки 40. Білет складається з п'яти запитань. Щоб отримати відмінну оцінку, досить відповісти на чотири запитання. Яка ймовірність того, що учень отримає відмінну оцінку?
181. У ящику лежать 8 білих і 6 чорних кульок. Яка ймовірність того, що з п'яти вибраних навмання кульок три будуть білими?
182. Знайдіть ймовірність того, що дні народження 12 чоловік випадають на різні місяці року.

Ймовірність суми подій

183. У корзині лежать гриби, серед яких 10 % білих і 40 % рижиків. Яка ймовірність того, що вибраний навмання гриб — білий або рижик?
184. Завод випускає 15 % продукції вищого гатунку, 25 % — першого гатунку, 40 % — другого гатунку, а все інше — брак. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб не буде бракованим?
185. На змаганнях зі стрільби стрілець попадає в десятку з ймовірністю 0,04, у дев'ятку — 0,1, у вісімку — 0,2. Яка ймовірність того, що одним пострілом стрілець набере: 1) не менше 9 очок; 2) не менше 8 очок; 3) менше 8 очок?

186. На екзамені з математики для посилення контролю клас з 35 учнів розсадили у три аудиторії. До першої посадили 10 учнів, до другої — 12, до третьої — усіх інших. Яка ймовірність того, що два друга опиняться в одній аудиторії?

Ймовірність добутку подій

187. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випадуть дві одиниці?
188. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випадуть два парних числа?
189. Кидають три монети. Яка ймовірність того, що випадуть два герба і одна цифра?
190. Двічі кидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що шістка випаде тільки другого разу?
191. Три вимикачі з'єднані паралельно. Ймовірність виходу з ладу першого вимикача дорівнює 3 %, другого — 4 %, третього — 1 %. Яка ймовірність того, що ланцюг буде розімкнено?
192. У ящику лежать 4 білих і 3 чорних кульки. Навмання з ящика дістають дві кульки і кладуть їх назад. Цю ж операцію повторюють ще раз. Яка ймовірність того, що всі витягнуті кульки були білого кольору?
193. Продукція одного молокозаводу становить 30 % усієї молочної продукції, яку продає магазин, причому 80 % продукції цього заводу вищого гатунку. Яка ймовірність придбати продукт вищого гатунку виробництва цього заводу?
194. Троє робітників виготовляють відповідно 40 %, 30 %, 30 % усіх виробів. В їх роботі брак відповідно складає 2 %, 3 %, 1 %. Яка ймовірність того, що взятий навмання виріб буде бракованим?
195. Три стрільці незалежно один від одного по одному разу стріляють у ціль. Ймовірність влучення першого стрільця складає 0,7, другого — 0,8, третього — 0,6. Яка ймовірність того, що буде:
1) три влучення; 2) три промахи; 3) тільки одне влучення?
196. В одному ящику лежать 5 червоних, 9 білих і 8 чорних кульок, а в другому — 3 червоних, 7 білих і 10 чорних кульок. Навмання з кожного ящика беруть по одній кульці. Яка ймовірність того, що вони будуть одного кольору?
197. Монету підкидають 8 разів. Знайдіть ймовірність того, що хоч раз випаде герб.

198. Два учні незалежно один від одного розв'язують одну задачу. Перший учень може розв'язати цю задачу з ймовірністю 0,9, а другий — 0,7. Знайдіть ймовірність того, що: 1) обидва учні розв'яжуть задачу; 2) жоден з учнів не розв'яже задачу; 3) хоча б один з учнів розв'яже задачу; 4) тільки один з учнів розв'яже задачу.
199. Сім стрільців одночасно незалежно один від одного стріляють в одну ціль. Ймовірність попадання кожного стрільця дорівнює 0,8. Поразка цілі відбувається за одне влучення. Знайдіть ймовірність поразки цілі.

Схема Бернуллі

200. Монету підкидають 10 разів. Яка ймовірність того, що герб: 1) випаде 3 рази; 2) не випаде жодного разу; 3) випаде не більше 2 разів; 4) випаде не менше 3 разів?
201. По мішені стріляють 8 разів. Ймовірність влучення в мішень під час кожного пострілу дорівнює $\frac{3}{5}$. Яка ймовірність того, що з восьми пострілів у мішень влучать 5 разів?
202. У ящику лежать 7 білих і 4 чорних кульки. З ящика 7 разів виймають по одній кульці і кладуть назад перед наступним випробуванням. Знайдіть ймовірність того, що з семи вийнятих кульок білу кульку виймали: 1) 3 рази; 2) менше 2 разів; 3) не менше 3 разів.
203. Гральний кубик підкидають 9 разів. Яка ймовірність того, що шістка випаде: 1) 4 рази; 2) більше трьох, але менше шести разів?
204. Гральний кубик підкидають 7 разів. Яка ймовірність того, що парне число випаде: 1) 2 рази; 2) не більше 3 разів; 3) більше 5 разів?
205. Що більш ймовірно: виграти у рівноцінного гравця чотири партії з п'яти чи шість партій з дев'яти?

Первісна. Основна властивість первісної

206. Доведіть, що функція F є первісною для функції f на вказаному проміжку I :
- 1) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 9$, $f(x) = 3x^2 - 6x$, $I = (-\infty; +\infty)$;
 - 2) $F(x) = 3x - \frac{4}{x}$, $f(x) = 3 + \frac{4}{x^2}$, $I = (-\infty; 0)$;
 - 3) $F(x) = \sqrt{2x-3}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$, $I = (1,5; +\infty)$;

4) $F(x) = \cos \frac{x}{5}$, $f(x) = -\frac{1}{5} \sin \frac{x}{5}$, $I = (-\infty; +\infty)$;

5) $F(x) = 3 \operatorname{tg} 2x - 10$, $f(x) = \frac{6}{\cos^2 2x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$;

6) $F(x) = x^2 - \ln x^5$, $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x}$, $I = (0; +\infty)$.

207. Чи є функція $F(x) = \frac{6}{x^2} - 4$ первісною для функції $f(x) = -\frac{12}{x^3}$ на

проміжку:

1) $(0; +\infty)$; 2) $(-3; 3)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[-5; 0)$?

208. Чи є функція $F(x) = |x + 3|$ первісною для функції $f(x) = 1$ на проміжку: 1) $(-1; 3)$; 2) $(-4; 1)$?

209. Для функції f на даному проміжку I знайдіть первісну F , графік якої проходить через дану точку M :

1) $f(x) = x^2$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(1; -2)$;

2) $f(x) = \sin x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$;

3) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$, $M\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$;

5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(8; 15)$.

Правила знаходження первісної

210. Для даної функції f знайдіть загальний вигляд первісних на вказаному проміжку I :

1) $f(x) = 3 - x$, $I = (-\infty; +\infty)$;

2) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $I = (-\infty; +\infty)$;

3) $f(x) = 10x^4 + 14x^6$, $I = (-\infty; +\infty)$;

4) $f(x) = x^3 + \frac{6}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$;

5) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$, $I = (0; +\infty)$;

6) $f(x) = 3 \cos x - \frac{4}{\sin^2 x}$, $I = (0; \pi)$;

7) $f(x) = 4\sqrt{x} - 8x^7, I = [0; +\infty)$;

8) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 4, I = (-\infty; +\infty)$.

211. Для функції f на вказаному проміжку I знайдіть первісну F , яка задовольняє дану умову:

1) $f(x) = 6x^2 + 4x - 3, I = (-\infty; +\infty), F(-2) = -3$;

2) $f(x) = 15x^{14} - \frac{5}{4\sqrt{x}}, I = (0; +\infty), F(1) = 0$;

3) $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2}, I = (0; +\infty), F(0,5) = 7$.

212. Для даної функції f знайдіть загальний вигляд первісних на вказаному проміжку I :

1) $f(x) = (3x - 1)^3, I = (-\infty; +\infty)$;

2) $f(x) = \cos 7x, I = (-\infty; +\infty)$;

3) $f(x) = \sin \frac{x}{5}, I = (-\infty; +\infty)$;

4) $f(x) = \frac{4}{\cos^2 \frac{x}{6}}, I = (-3\pi; 3\pi)$;

5) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2x-1}}, I = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

6) $f(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}, I = \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$;

7) $f(x) = 3^{2x} \ln 3, I = (-\infty; +\infty)$;

8) $f(x) = e^{-5x}, I = (-\infty; +\infty)$;

9) $f(x) = e^{2x} - 7^{\frac{x}{3}}, I = (-\infty; +\infty)$;

10) $f(x) = 2^{-x} \ln 2 + e^{-0,5x}, I = (-\infty; +\infty)$;

11) $f(x) = 6e^{3x-4} + 8e^{1-4x}, I = (-\infty; +\infty)$.

213. Для функції f на вказаному проміжку I знайдіть первісну F , графік якої проходить через дану точку:

1) $f(x) = \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + 4 \cos 4x, I = (-\infty; +\infty), A(\pi; 3)$;

2) $f(x) = \frac{2}{\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{12}\right)}, I = \left(\frac{\pi}{48}; \frac{13\pi}{48}\right), A\left(\frac{\pi}{16}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$$3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{9x-2}}, I = \left(\frac{2}{9}; +\infty\right), A(3; 1);$$

$$4) f(x) = 6^x \ln 6 - e^{-x}, I = (-\infty; +\infty), A(1; 6);$$

$$5) f(x) = 2e^x + \cos x, I = (-\infty; +\infty), A(0; -3);$$

$$6) f(x) = 6x^2 + e^{4x}, I = (-\infty; +\infty), A\left(\frac{1}{2}; \frac{e^2}{4}\right);$$

$$7) f(x) = x^3 + \frac{2}{x}, I = (0; +\infty), M(1; 1);$$

$$8) f(x) = \frac{4}{2x-3}, I = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right), M(4; \ln 0,2);$$

$$9) f(x) = e^{-x} + \frac{1}{3x-1}, I = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right), M(0; 0);$$

$$10) f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+4}} + \frac{4}{x-4}, I = (4; +\infty), M(5; -2).$$

214. Знайдіть первісну функції $f(x) = 2x - 1$, один з нулів якої дорівнює 3.

215. Знайдіть первісну функції $f(x) = 3x^2 - 12x + 3$, один з нулів якої дорівнює -1 . Знайдіть решту нулів первісної.

216. Знайдіть первісну функції $f(x) = -4x + 3$, графік якої має з прямою $y = 3$ тільки одну спільну точку.

217. Знайдіть первісну функції $f(x) = 7x - 4$, для графіка якої пряма $y = 10x + 3$ є дотичною.

218. Швидкість руху точки задається рівнянням $v = 6t^2 + 1$ (м/с). Знайдіть рівняння руху $s = s(t)$, якщо у момент часу $t = 3$ с точка знаходилася на відстані $s = 42$ м.

219. Знайдіть загальний вигляд первісних функцій:

$$1) f(x) = \sin^2 3x; \quad 2) f(x) = (x^2 - 3x)^2; \quad 3) f(x) = \sin 4x \cos 3x.$$

220. Знайдіть загальний вигляд первісних функції f на вказаному проміжку I :

$$1) f(x) = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{4}, I = (0; 4\pi); \quad 2) f(x) = \frac{2x^4 + x^3 - 1}{x^2}, I = (0; +\infty).$$

221. Функція F — первісна функції $f(x) = 3 - 2x$, графік якої має з графіком функції f спільну точку, що належить осі ординат. Знайдіть первісну F та всі точки перетину графіків функцій f і F .
222. Знайдіть формулу, якою задається функція $y = f(x)$, графік якої проходить через точку $M(-1; 4)$, а кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка в точці x , дорівнює $2 - 3x^2$.

Інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца

223. Обчисліть інтеграл:

$$1) \int_{-1}^3 (x+2) dx;$$

$$10) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos x dx;$$

$$2) \int_0^5 (x^2 - 3x) dx;$$

$$11) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx;$$

$$3) \int_{-2}^1 (8x^3 - 6x^2 + 10x - 5) dx;$$

$$12) \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$4) \int_{-3}^2 (x-4)^2 dx;$$

$$13) \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{\sin^2 3x};$$

$$5) \int_1^2 (5x-9)^4 dx;$$

$$14) \int_0^{2\pi} \left(\sin 2x - \cos \frac{x}{4} \right) dx;$$

$$6) \int_{-2,5}^{-2} \frac{8 dx}{(2x+3)^3};$$

$$15) \int_4^9 \sqrt{x} dx;$$

$$7) \int_1^9 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$16) \int_8^{27} \sqrt[3]{x} dx;$$

$$8) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4x+5}};$$

$$17) \int_1^{16} \sqrt[4]{x^3} dx;$$

$$9) \int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{4-\frac{x}{2}}};$$

$$18) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x} dx;$$

$$19) \int_{\frac{1}{3}}^{1,5} \sqrt[3]{6x-1} dx;$$

$$27) \int_{\frac{1}{3}}^{27} \frac{dx}{x};$$

$$20) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx;$$

$$28) \int_e^{e^5} \frac{3}{x} dx;$$

$$21) \int_0^{\ln 5} e^x dx;$$

$$29) \int_6^{24} \frac{dx}{x \ln 2};$$

$$22) \int_2^3 5^x dx;$$

$$30) \int_{-3}^{-1} \left(\frac{4}{x} - x\right) dx;$$

$$23) \int_0^1 (3e^x - 5 \cdot 8^x + 1) dx;$$

$$31) \int_0^5 \frac{dx}{7x+5};$$

$$24) \int_{-8}^0 e^{-\frac{x}{8}} dx;$$

$$32) \int_{-2}^0 \frac{dx}{3x-2};$$

$$25) \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} \ln 3 dx;$$

$$33) \int_{\frac{20}{4}}^{\frac{84}{4}} \frac{dx}{x-1};$$

$$26) \int_{-4}^4 (10^{\frac{x}{4}} - \sin \pi x) dx;$$

$$34) \int_2^7 \left(\frac{6}{2x+1} - x^2\right) dx.$$

224. Обчисліть інтеграл:

$$1) \int_1^{\frac{\pi}{24}} \lg^2 4x dx;$$

$$5) \int_{-3}^2 (4x - x^2)^2 dx;$$

$$9) \int_{-1}^0 \frac{2^x + 5 \cdot 3^x}{6^x} dx;$$

$$2) \int_{-\pi}^0 2 \cos^2 \frac{x}{8} dx;$$

$$6) \int_0^1 (x - \sqrt{x})^2 dx;$$

$$10) \int_1^2 \frac{x^2 + e^x}{x^2 e^x} dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x dx;$$

$$7) \int_1^2 \frac{x^2 - x^3 + 4}{x^5} dx;$$

$$11) \int_1^4 \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx;$$

$$4) \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x \cos 3x dx;$$

$$8) \int_{\ln 2}^{\ln 3} (1 - e^{3x})^2 dx;$$

$$12) \int_{-2}^{-1} \frac{4x^3 + x - 3}{x^4} dx.$$

225. Обчисліть інтеграл $\int_{-3}^1 f(x) dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < -2, \\ x+6 & \text{при } x \geq -2. \end{cases}$

226. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 18t - 3t^2$ (м/с).

Обчисліть шлях, який пройшло тіло:

- 1) за інтервал часу від $t_1 = 2$ с до $t_2 = 5$ с;
- 2) від початку руху до зупинки.

Площа криволінійної трапеції

227. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

- 1) параболою $y = x^2$ та прямими $y = 0$, $x = -2$ і $x = -1$;
- 2) графіком функції $y = x^3$ та прямими $y = 0$ і $x = 1$;
- 3) графіком функції $y = \cos x$ та прямими $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{6}$;
- 4) параболою $y = 4 - x^2$ і віссю абсцис;
- 5) параболою $y = x^2 - 2x$, віссю абсцис і прямою $x = 4$;
- 6) графіком функції $y = \sqrt{x}$ та прямими $y = 0$, $x = 1$ і $x = 9$;
- 7) графіком функції $y = \sqrt{x-3}$ та прямими $y = 0$ і $x = 7$;
- 8) графіком функції $y = \sin 2x$ та прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{8}$ і $x = \frac{3\pi}{8}$;
- 9) графіком функції $y = 3^x$ та прямими $y = 0$, $x = -1$ і $x = 1$;
- 10) графіком функції $y = e^{3x-2}$ та прямими $y = 0$, $x = 0$ і $x = 1$;
- 11) графіком функції $y = \frac{1}{x}$ та прямими $y = 0$, $x = 1$ і $x = 4$.

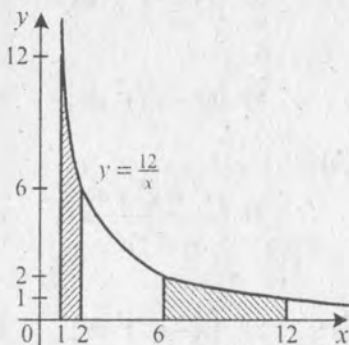
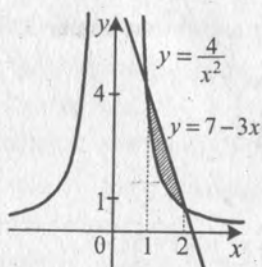
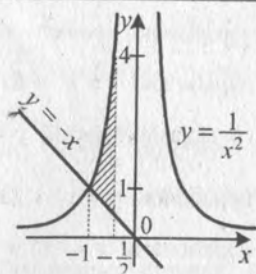


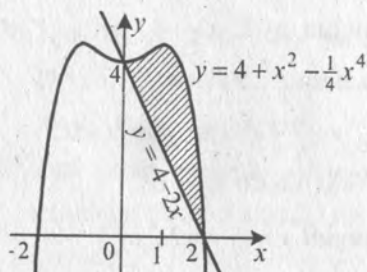
Рис. 2



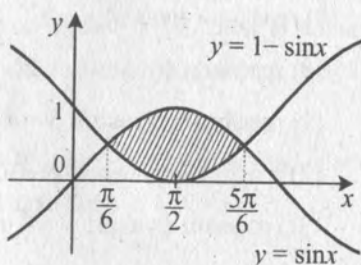
а)



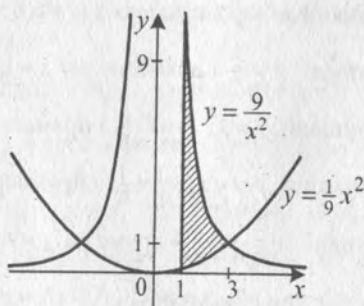
б)



в)



г)



д)

Рис. 3

228. Доведіть, що площі криволінійних трапецій, заштрихованих на рисунку 2, рівні.
229. Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 3.
230. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

- 1) параболою $y = 6 - x^2$ і прямою $y = 2$;
- 2) параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = x + 2$;

- 3) параболою $y = -x^2 - 4x$, прямою $y = 4$ і віссю ординат;
- 4) параболою $y = x^2 - 6x + 9$ і прямою $y = -x + 5$;
- 5) графіками функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = \frac{1}{3}x$;
- 6) параболою $y = x^2 + 2x + 2$ і прямою $y = 2x + 3$;
- 7) параболою $y = -x^2 + 2x + 1$ та $y = x^2 - 4x + 5$;
- 8) графіками функцій $y = \sqrt{x+2}$ та $y = 0,5x + 1$;
- 9) графіком функції $y = e^{-x}$ і прямими $y = 1$, $x = -3$;
- 10) графіком функції $y = 2^x$ і прямими $x = 0$, $y = 4$;
- 11) графіками функцій $y = 4^x - 1$, $y = 7 - 4^x$ і прямою $x = 0$;
- 12) графіками рівнянь $xy = 6$, $x^2 - 5x + 6 = 0$ і $y = 0$;
- 13) графіком функції $y = \frac{4}{x}$ і прямими $x = 1$, $y = 2$;
- 14) графіком функції $y = \frac{5}{x}$ і прямими $y = 5$, $x = 5$;
- 15) графіком функції $y = \frac{7}{x}$ і прямою $x + y = 8$;
- 16) графіком функції $y = \frac{2}{x}$ і прямими $y = x - 1$, $x = 3$;
- 17) графіками функцій $y = x^4$, $y = \frac{1}{x}$ і прямою $x = 2$;
- 18) графіками функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ і прямою $x = 4$;
- 19) графіком функції $y = \frac{3}{x-2}$ і прямими $x = 4$, $x = 6$.

231. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

- 1) графіками функцій $y = \sqrt{x+1}$ і $y = \sqrt{7-x}$ та віссю абсцис;
- 2) графіком функції $y = \begin{cases} 2 \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ 2 - x & \text{при } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ та віссю абсцис;
- 3) графіками функцій $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ та віссю абсцис.

232. Використовуючи геометричний зміст інтегралу, обчисліть:

- 1) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$;
- 2) $\int_3^6 \sqrt{6x-x^2} dx$;
- 3) $\int_{-9}^{-4} \sqrt{9-8x-x^2} dx$.

233. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = 3$, і віссю ординат.
234. Знайдіть, при якому значенні a площа фігури, обмеженої параболою $y = 6x^2$ і прямими $y = 0$, $x = a - 2$, $x = a$, набуватиме найменшого значення.
235. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x$ і $y = |x^2 - 2x|$.
236. При якому додатному значенні a пряма $x = 5$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{1}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 2$, $x = a + 5$, навпіл?
237. При якому значенні a пряма $x = a$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{4}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$, навпіл?

Об'єм тіла обертання

238. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої:
- 1) графіком функції $y = \sqrt{x}$ та прямими $x = 4$ і $y = 0$;
 - 2) синусоїдою $y = \sin x$ і прямими $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$ і $y = 0$;
 - 3) графіком функції $y = x^2 + 1$ і прямими $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
239. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^4$ та $y = x$.

Варіант 2

Границя числової послідовності

1. Послідовність задано формулою загального члена $a_n = \frac{n}{n+1}$. Для заданого числа ϵ укажіть такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|a_n - 1| < \epsilon$:

1) $\epsilon = \frac{1}{3}$;

2) $\epsilon = \frac{1}{4}$;

3) $\epsilon = 0,001$.

2. Користуючись означенням границі послідовності, доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$.

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-7}{4n+6}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-5}{8n^2+n-1}$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\dots+2^{n-1}}{2^{n+1}}$.

Границя функції. Неперервність функції

4. Для кожної з функцій, графік якої зображено на рисунку 4, установіть:

1) чи визначена ця функція в точці x_0 ;

2) чи існує границя функції в точці x_0 ;

3) якщо границя в точці x_0 існує, то чи дорівнює вона значенню функції в цій точці.

5. Користуючись означенням границі функції, доведіть, що:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x+2) = -1$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}$.

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 3x + 6)$;

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{x^2 - x - 2} - \frac{1}{x - 2} \right)$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{6x}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \cos \frac{\pi}{x-1}$.

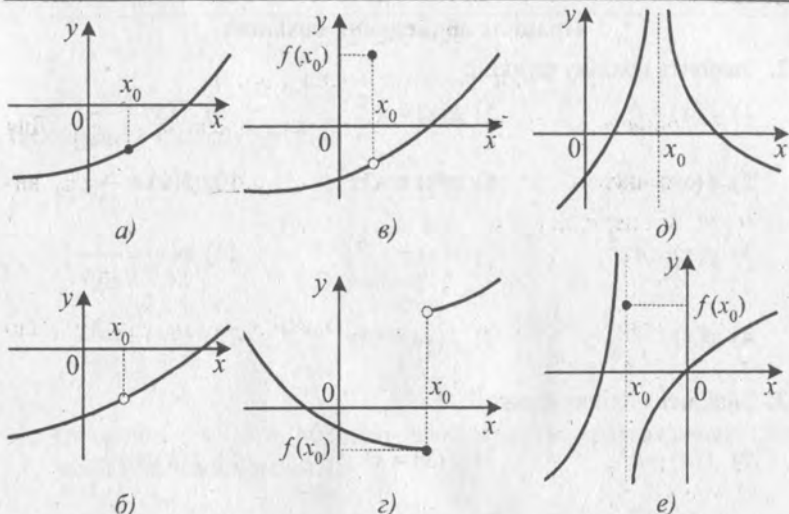


Рис. 4

7. Доведіть, що функція f неперервна в точці x_0 :

1) $f(x) = 4 - 0,5x$, $x_0 = 4$;

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{якщо } x \neq 3, \\ 6, & \text{якщо } x = 3, \end{cases} \quad x_0 = 3.$

8. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin \frac{x}{2}}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$ не є неперервною в точці $x_0 = 0$.

Приріст функції. Поняття похідної

9. Знайдіть приріст функції f у точці x_0 при вказаному прирості аргументу Δx :

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$;

2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = \frac{\pi}{12}$.

10. Для функції $f(x) = \operatorname{tg} 4x$ знайдіть $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

11. Користуючись означенням, знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 3x + 7$;

2) $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Правила обчислення похідних

12. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \frac{x}{4}$;

5) $g(x) = x^{12}$;

9) $f(x) = \frac{1}{x^7}$;

2) $f(x) = \sqrt{3}x$;

6) $\varphi(x) = -3x^6$;

10) $h(x) = \frac{4}{x^5}$;

3) $g(x) = 4x^2$;

7) $h(x) = x^{-6}$;

11) $\varphi(x) = \frac{1}{6x^6}$;

4) $\varphi(x) = -\frac{x^2}{8}$;

8) $f(x) = -5x^{-8}$;

12) $g(x) = \frac{2}{9x^3}$.

13. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$;

3) $f(x) = x^{\frac{7}{6}}$;

5) $f(x) = \frac{1}{4x^{\frac{2}{5}}}$;

2) $h(x) = 4x^{-\frac{3}{4}}$;

4) $\varphi(x) = \sqrt[6]{x^5}$;

6) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[8]{x}}$.

14. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 8x^2\sqrt{x}$;

3) $\varphi(x) = \frac{4x^2}{\sqrt[4]{x}}$;

2) $g(x) = \frac{5}{x\sqrt[3]{x}}$;

4) $h(t) = \sqrt{t\sqrt[3]{t^2}}$.

15. Знайдіть похідну функції:

1) $y = 4x^6 - 2x^4 + 3x^2 + 6$;

4) $y = \frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^2}$;

2) $y = \frac{1}{4}x^8 + 6\sqrt{x} - 7x$;

5) $y = \frac{x^9}{9} + \sqrt{2}\cos x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 2x^4$;

3) $y = x^2 + \frac{2}{x}$;

6) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

16. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x$, $x_0 = -2$;

2) $f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + x - \sqrt{2}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = x^3 - 12\sqrt{x}$, $x_0 = 9$.

17. Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x^3 + 4)(x^2 - 3)$;

2) $y = \sqrt{x}(4x - 3)$;

3) $y = (\sqrt{x} - 2)(5 - 6\sqrt{x})$; 5) $y = x^2 \cos x$;

4) $y = (x^3 + x^2 - 4)(x^2 - 4x + 1)$; 6) $y = 4x \operatorname{ctg} x$.

18. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{6x+5}{4-3x}$; 4) $y = \frac{x^2+6x}{x^2-1}$; 7) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$;

2) $y = \frac{1-2x}{x^2+3}$; 5) $y = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$; 8) $y = \frac{2x^2}{\sin x}$.

3) $y = \frac{x^2-4x}{x-2}$; 6) $y = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$;

19. Обчисліть значення похідної даної функції при вказаному значенні незалежної змінної:

1) $f(x) = \frac{7-10x}{5x+2}$, $f'(0,2) - ?$ 2) $f(x) = \frac{x^4+2}{x^4-2}$, $f'(2) - ?$

20. Чи є правильним твердження, що $f'(0) > g'(0)$, де $f(x) = x^2 - 8x$,
 $g(x) = \frac{3x-2}{2x-3}$?21. Розв'яжіть нерівність $f'(x) - h'(x) \geq 0$, якщо $f(x) = 2x^3 - 36x$,
 $h(x) = 15x^2 - 49$.22. Знайдіть, при яких значеннях x дорівнює нулю похідна функції

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}.$$

Похідна складеної функції

23. Знайдіть похідну функції:

1) $y = (2x-7)^6$; 4) $y = 2(x-1)^6 + 4(3-x)^5$;

2) $y = (3x^4 + 8x)^7$; 5) $y = \sqrt{3x-14}$;

3) $y = \frac{1}{(x^2+x)^4}$; 6) $y = \sqrt{2x^3+4x}$.

24. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = (x^2 - 2x - 2)^5$, $x_0 = 2$; 3) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 5x}$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = (\sqrt{x} + 2)^4$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8}}$, $x_0 = 3$.

25. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \sin \frac{x}{4}$; 3) $y = \operatorname{tg}^2 x$; 5) $y = x^3 \sin \frac{1}{x}$;

2) $y = \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{5} \right)$; 4) $y = \sqrt{\cos 3x}$; 6) $y = \frac{\cos \frac{x}{2}}{x+1}$.

26. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{8}$, $x_0 = -4\pi$; 3) $f(x) = \sin^3 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$;

2) $f(x) = \cos \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{\pi^2}{4}$; 4) $f(x) = \frac{x}{5} \operatorname{tg} 3x$, $x_0 = \pi$.

27. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g(x)$, якщо $f(x) = 4x \cos^2 \frac{x}{2}$,
 $g(x) = 8 \cos \frac{x}{2} - 3 - 2x \sin x$.

28. При яких значеннях x похідна функції $f(x) = 4 \cos \frac{x}{2} - x\sqrt{2}$ менша від нуля?

Дотична до графіка функції

29. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 17$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

30. Знайдіть тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіка функції $f(x) = \cos \frac{x}{4}$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{2\pi}{3}$.

31. Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 4x$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$;

2) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x}$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$;

3) $f(x) = \sin^4 x$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

32. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$ у точці перетину його з віссю ординат.

33. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x+1}{3-x^2}$ у точці перетину його з віссю абсцис.

34. Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{8} + x + \sqrt{5}$, у якій дотична до цього графіка паралельна прямій $y = 0,5x + 3$.

35. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 0,3x^2 + 2x - 7$, яка паралельна прямій $y = 0,8x - 5$.
36. Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x - 15$.
37. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.
38. Знайдіть, у якій точці графіка функції $f(x) = \sqrt{3}(x^3 - 2)$ дотична нахилена до осі абсцис під кутом $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
39. Під якими кутами парабола $y = x^2 - 4x + 3$ перетинає вісь абсцис?
40. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.
41. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 1 - x^2$, яка проходить через точку $M(1; 1)$.
42. При яких значеннях a і b парабола $y = ax^2 + bx + 3$ дотикається до прямої $y = -2x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$?

Механічний зміст похідної

43. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 0,2t^5 - 4t^2 + 6$ (час t вимірюється в секундах, переміщення x — у метрах). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t = 2$.
44. Обертання тіла навколо осі здійснюється за законом $\varphi(t) = 18t - 3t^2$. Знайдіть, у який момент часу тіло зупиниться (t — час у секундах, $\varphi(t)$ — кут повороту в радіанах).
45. Тіло масою 4 кг рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 7t$. Знайдіть імпульс тіла і силу, що діє на нього, у момент часу $t = 5$ (час t вимірюється в секундах, переміщення s — у метрах).

Ознаки зростання і спадання функції

46. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6$; 2) $f(x) = 5 + 4x - 2x^2 - x^3$;

3) $f(x) = x^4 - 8x^3 - 10$;

5) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$;

4) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{4x - 1}$;

6) $f(x) = \cos x + \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

47. Доведіть, що функція $f(x) = 6 - 6x + 3x^2 - 2x^3$ спадає на множині дійсних чисел.

48. Доведіть, що функція $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 18x^2 + 36x$ зростає на проміжку $[-1; +\infty)$.

49. Знайдіть, при яких значеннях a зростає на \mathbb{R} функція:

1) $f(x) = (a - 1)x^2 + 6x - 7$;

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + 9x - 5$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{(a - 2)x^2}{2} - 2ax + 3a + 1$.

Точки екстремуму функції

50. Знайдіть критичні точки функції:

1) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 4$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

2) $f(x) = (x + 5)^2(x - 4)^2$;

51. Знайдіть, при яких значеннях a не має критичних точок функція

$$f(x) = \sqrt{(x - 3)^3} - (3 + 5a)x.$$

52. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 36x - 3x^2 - 2x^3$;

3) $f(x) = x^2 - \frac{54}{x}$;

2) $f(x) = (x + 3)^3(x - 1)^2$;

4) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$.

53. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 12$;

5) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2 - x}$;

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 72x - 4$;

6) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$;

3) $f(x) = \frac{3x + 5}{x - 4}$;

7) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$;

4) $f(x) = (x + 2)^4(x - 5)^3$;

8) $f(x) = \frac{16}{9 - x^2}$.

54. Знайдіть, при яких значеннях a функція

$$f(x) = (a-1)\cos^2 x + (3a-4)x :$$

- 1) не має критичних точок; 2) не має точок екстремуму.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

55. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x + 1$, $[0; 6]$;

2) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 30$, $[-2; 1]$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$, $[-1; 3]$;

4) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

56. На яку множину функція $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ відображає відрізок $[1; 3]$?

57. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 2x|x - 2|$ на проміжку $[0; 3]$.

58. Подайте число 36 у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб їх добуток був найбільшим.

59. Знайдіть додатне число, подвоєний квадратний корінь з якого більший за це число на найбільше значення.

60. Площа прямокутника дорівнює 400 см^2 . Якими мають бути його сторони, щоб периметр прямокутника був найменшим?

61. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює a , а гострий кут — α . Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції. При якому значенні α площа трапеції буде найбільшою?

Побудова графіків функцій

62. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^3 - 3x$;

4) $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$;

2) $f(x) = 3 + 2x^2 - x^4$;

5) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$;

3) $f(x) = (x-3)^2(x-1)^2$;

6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

63. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$; 3) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

Показникова функція та її властивості

64. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x$; 3) $y = 3^{x+1}$; 5) $y = 2 - 3^x$;
2) $y = 3^x - 3$; 4) $y = 3^{-|x|}$; 6) $y = |3^x - 2|$.

65. Порівняйте значення виразів:

1) $4^{0,7}$ і $4^{\frac{2}{3}}$; 3) $\pi^{\frac{1}{3}}$ і 1; 5) $(\sqrt{2})^{-3}$ і $(\sqrt{2})^{-4}$;
2) $\left(\frac{5}{9}\right)^6$ і $\left(\frac{5}{9}\right)^7$; 4) 1 і $0,8^{-\sqrt{3}}$; 6) $(2-\sqrt{3})^3$ і $(2-\sqrt{3})^4$.

66. Порівняйте числа m і n , якщо:

1) $2,4^m > 2,4^n$; 2) $0,9^m > 0,9^n$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^m < \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$.

67. Порівняйте число a з одиницею, якщо:

1) $a^{\frac{4}{3}} < a^{\frac{6}{5}}$; 2) $a^{-1,8} > a^{-1,9}$; 3) $a^{-0,4} < 1$.

Показникові рівняння

68. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^x = 625$;
2) $11^{4x-3} = 11^{8x}$;
3) $19^{x^2-4x-21} = 1$;
4) $27^x = 81$;
5) $(0,2)^{x^2-16x+37,5} = 5\sqrt{5}$;
6) $(3^{x-2})^{x-4} = \frac{1}{3}$;
7) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{64}{27}$;
8) $14^{x^2-3x+2} = 9^{-x^2+3x-2}$;
9) $3^x \cdot 7^x = \frac{1}{21} \cdot (21^{x-1})^5$;
10) $\sqrt[3]{8^{x^2-1}} = 4^x \cdot 0,25$.

69. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^x + 5^{x+2} = 130$;
2) $2^{3\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{3\sqrt{x}-1} = 20$;
3) $2 \cdot 3^{2x+1} - 4 \cdot 3^{2x-2} - 25 \cdot 3^{2x-3} = 375$;
4) $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 640$;

$$5) 2^{3x} + 2^{3x-1} - 2^{3x-2} = 5^{3x} + 5^{3x-1} - 28 \cdot 5^{3x-2};$$

$$6) 4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}.$$

70. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0;$$

$$5) \frac{5}{3^{x+2} - 2} - \frac{4}{3^{x+2} - 1} = 3;$$

$$2) 4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0;$$

$$6) 3^x - 3^{2-x} - 8 = 0;$$

$$3) 3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2;$$

$$7) 4^{\lg^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} = 80;$$

$$4) 8^x - 3 \cdot 2^{\frac{2x+3}{x}} + 32 = 0;$$

$$8) \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} \right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} \right)^x = 6.$$

71. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x;$$

$$3) 4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x = 0;$$

$$2) 2 \cdot 81^x = 36^x + 3 \cdot 16^x;$$

$$4) 6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0.$$

72. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 7^{6-x} = x + 2;$$

$$2) 3^{x-1} + 5^{x-1} = 34;$$

$$3) 2^{|x|} = \cos x.$$

73. При яких значеннях a рівняння $25^x - (a-4) \cdot 5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$ не має дійсних коренів?

Показникові нерівності

74. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 7^x < \frac{1}{49};$$

$$5) 4 \cdot 0,5^{x(x+3)} < 0,25^{2x};$$

$$2) (0,1)^x > 0,001;$$

$$6) (0,3)^{\frac{x^2-8}{x}} \geq 11\frac{1}{9};$$

$$3) \left(\frac{3}{7} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{7}{3} \right)^{4x-21};$$

$$7) 2 \cdot 8^{\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{1-x};$$

$$4) (1,3)^{\frac{x^2-9x-10}{x}} \geq 1;$$

$$8) \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1+\frac{4}{x+2}} \geq \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\frac{9}{x+3}}.$$

75. Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \leq 315;$$

$$2) 0,5^x - 0,5^{x+1} \geq 256;$$

$$3) 5^{-2x-4} - 5^{-2x-5} - 2 \cdot 5^{-2x-6} \leq 2 \cdot 3^{-2x-4};$$

$$4) 10^x - 4 \cdot 5^x - 125 \cdot 2^x + 500 \geq 0.$$

76. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $7^{2x+1} - 8 \cdot 7^x + 1 < 0$; 3) $3(\sqrt{2})^x - 7 \cdot 2^{\frac{x}{4}} - 20 \geq 0$;
 2) $(0,2)^{2x-2} - 126 \cdot (0,2)^x + 5 \geq 0$; 4) $9^{x+1} + 26 \cdot 3^x - 3 < 0$.

77. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $2^{2x-1} + 3^{x+1} \cdot 2^{x-1} - 2 \cdot 3^{2x} < 0$; 2) $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

Логарифм та його властивості

78. Знайдіть:

- 1) $\log_6 36$; 4) $\log_5 5$; 7) $\lg 10\,000$;
 2) $\log_{17} \frac{1}{17}$; 5) $\log_2 0,125$; 8) $\log_9 27$;
 3) $\log_{19} 1$; 6) $\log_{49} 7$; 9) $\log_{0,2} 625$.

79. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\log_{0,5} \log_3 81$; 6) $\frac{\log_4 0,0001}{\log_4 10}$;
 2) $\log_4 \sin \frac{\pi}{6}$; 7) $\log_{\sqrt{2}} 1024$;
 3) $\log_{169} 13 - \log_3 \frac{1}{81} + 2 \log_3 \sqrt[3]{3}$; 8) $6^{3 \log_6 2}$;
 4) $\log_{18} 3 + \log_{18} 6$; 9) $49^{1 + \log_7 2}$;
 5) $\log_5 250 - \log_5 2$; 10) $2^{\frac{1}{2 \log_{81} 2}}$.

80. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4^x = 9$; 2) $10^{3x+1} = 8$; 3) $6^{x-5} = 24$.

81. Обчисліть значення виразу $3 \cdot 7^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}} 7} + \frac{1}{3} \log_7 8} - 3 \log_9 \sqrt[4]{9^3 \sqrt[3]{9}}$.

82. Виразіть $\log_{30} 8$ через m і n , якщо $m = \log_{30} 3$, $n = \log_{30} 5$.

Логарифмічна функція та її властивості

83. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \log_6 (4x + 7)$; 3) $y = \log_{2-x} (x + 4)$;
 2) $y = \log_{0,1} (3 - 2x - x^2)$; 4) $y = \lg (\arcsin x)$.

84. Порівняйте з нулем:

- 1) $\log_8 10$; 2) $\log_{0,6} 0,4$; 3) $\log_2 \frac{4}{9}$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} 11$.

85. Порівняйте числа m і n , якщо:

1) $\log_{3,8} m \leq \log_{3,8} n$;

2) $\log_{0,1} m > \log_{0,1} n$.

86. Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 8,4 > \log_a 7,4$;

2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{3}{4}$.

87. Побудуйте графік функції:

1) $y = -\log_4 x$;

3) $y = |\log_3 |x||$;

5) $y = \sqrt{\log_{\pi}(2 - \sin x)}$;

2) $y = \lg(x+3)$;

4) $y = \log_x x$;

6) $y = \log_3 \log_{x+1}(x+1)$.

Логарифмічні рівняння

88. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_4 x = \frac{1}{2}$;

6) $\log_x 128 = 7$;

2) $\log_{0,1}(x-7) = -1$;

7) $\log_{x+3} 256 = 4$;

3) $\log_{\frac{1}{81}}(x^2 + 26x) = -0,75$;

8) $\log_x 32 = -\frac{5}{3}$;

4) $\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}} x = \frac{1}{2}$;

9) $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$.

5) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$;

89. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 + 4x - 7) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$;

2) $\lg(2x-1) + \lg(x-9) = 2$;

3) $\lg x + \lg(x+1) = \lg(5-6x) - \lg 2$;

4) $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$;

5) $\log_6 \sqrt{x-2} + \log_{36}(x-11) = 1$;

6) $\log_3(x-5) - \log_3 2 - \frac{1}{2} \log_3(3x-20) = 0$;

7) $\lg(1+4x^2-4x) - \frac{1}{2} \lg(8+x^2) = \lg(1-2x)$;

8) $\log_4(x-2)^2 + \log_2(1-x) = \log_2 3 + 1$.

90. Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \lg^2(x-1) - 10 \lg(x-1) + 3 = 0$;

3) $\log_2^2 x^5 - 5 \log_2 x^3 = 10$;

2) $\log_3^2 x + 2 \log_3 \sqrt{x} = 2$;

4) $\frac{1}{5-4 \lg x} + \frac{4}{1+\lg x} = 3$;

$$5) \log_2(2x^2) \cdot \log_2(16x) = \frac{9}{2} \log_2^2 x;$$

$$6) 2 \log_{x-1}^2(2x+4) + \log_{x-1}(2x+4) = 1;$$

$$7) \lg^2(100x) - \lg^2(10x) + \lg^2 x = 6;$$

$$8) \log_5 x + \log_x 25 = 3.$$

91. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}; \quad 2) x^{\lg x} = 1000x^2; \quad 3) 6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12.$$

92. З'ясуйте, при яких значеннях a дане рівняння має корені, і знайдіть їх:

$$1) \log_3(4x+a) = \log_3(1-2x); \quad 2) \lg(x^2 - 3ax) = \lg(x - 6a + 2).$$

93. При яких значеннях b рівняння $2 \lg(x+1) = \lg bx$ має єдиний корінь?

Логарифмічні нерівності

94. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_2 x > 4;$$

$$7) \log_5(5x-1) > \log_5(2-3x);$$

$$2) \log_9 x < 2;$$

$$8) \log_{0,6}(7x+8) < \log_{0,6}(2-5x);$$

$$3) \log_{0,1} x \leq -3;$$

$$9) \log_{\frac{1}{4}} \frac{35-x^2}{x} \geq -\frac{1}{2};$$

$$4) \log_{\frac{1}{16}} x > \frac{1}{4};$$

$$10) 1 + \log_2(x-2) > \log_2(x^2 - 3x + 2);$$

$$5) \log_4(x+6) > 3;$$

$$11) \log_{0,5} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x-3} \leq 0;$$

$$6) \log_9(2x-1) \leq \frac{1}{2};$$

$$12) \log_3(2-x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\sqrt{3}} 3;$$

$$13) 2 \log_2(-x) \leq 1 + \log_2(x+4);$$

$$14) \log_{0,8} x + \log_{0,8}(x+1) \leq \log_{0,8}(8-x).$$

95. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_{0,5}^2(2x-1) \leq 9;$$

$$3) 2 \log_5^2 x - \log_5 x - 3 \leq 0;$$

$$2) \lg^2 x - \lg x - 6 > 0;$$

$$4) \log_{0,2}^2(x-1) + 6 > 5 \log_{0,2}(x-1).$$

96. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1;$$

$$2) \log_{x^2}(3-2x) > 1.$$

97. При яких значеннях a число 3 є розв'язком нерівності $\log_a(2x+3) > 3$?

Системи показникових і логарифмічних рівнянь

98. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} 2\log_y x + 2\log_x y = 5, \\ xy = 8; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 5^{2x} \cdot 3^y = 675, \\ \log_{\sqrt[3]{2}}(x+y) = 6; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \log_3(x+2y) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2y) = 1, \\ x^2 + y^2 - 0,5y = 4; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_2 xy = 3; \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} 5^x - 6^y = 589, \\ 5^{\frac{x}{2}} + 6^{\frac{y}{2}} = 31; \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} 2^{x-y} + 2^{y-x} = 2,5, \\ \lg(2x-y) + 1 = \lg(y+2x) + \lg 6. \end{cases}$$

Похідна показникової та логарифмічної функцій

99. Знайдіть похідну функції:

1) $y = e^{8x};$

7) $y = 0,2^{\operatorname{ctg} x};$

13) $y = \frac{10^x}{x+8};$

2) $y = e^{x^4};$

8) $y = 5 \cdot 4^{0,6x^2-8};$

14) $y = \frac{e^x + 9}{e^x - 7};$

3) $y = e^{x^2-3x};$

9) $y = e^x(x^2 - 5x + 6);$

15) $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{3}};$

4) $y = e^{\cos x};$

10) $y = e^x \sin x;$

16) $y = \cos 5^{9-x^2}.$

5) $y = 8^{-x};$

11) $y = 3^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x};$

6) $y = 9^{3x+7};$

12) $y = 6^{x^2}(2-x);$

100. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = e^{4x} + e^{-2x^2}, x_0 = 0;$

3) $f(x) = e^{2x}(x^2 - 3), x_0 = 2;$

2) $f(x) = 5^{2x^2-3x+1}, x_0 = 1;$

4) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\cos 3x}, x_0 = \pi.$

101. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq g'(x)$, якщо:

1) $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x - 3), g(x) = xe^{-x};$

2) $f(x) = 4^{-5x}, g(x) = 5 \cdot 2^{1-x}.$

102. Знайдіть похідну функції:

1) $y = \log_6 x;$

3) $y = \ln(x^2 - 5x);$

5) $y = \ln^5 x;$

2) $y = \ln 7x;$

4) $y = \lg \cos x;$

6) $y = x^4 \ln x;$

7) $y = (3x^2 - 4)\ln^3 x$;

11) $y = \log_3(e^x + 3^{-x})$;

8) $y = \frac{x^2}{\ln x}$;

12) $y = \sqrt{\ln x + 1}$;

9) $y = \frac{\ln^2 x}{x^3}$;

13) $y = \log_{\frac{1}{2}}(3x^2 - 7x + 6)$;

10) $y = x \ln(x^2 - 1)$;

14) $y = \frac{x \ln x}{1 - x^2}$.

103. Обчисліть значення похідної даної функції в точці x_0 :

1) $f(x) = \ln(5x - 4)$, $x_0 = 3$;

2) $f(x) = \frac{1}{4} \ln(-2x)$, $x_0 = -\frac{1}{8}$;

3) $f(x) = \log_5(x^2 - 5x + 7)$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = \ln \sin \frac{x}{3}$, $x_0 = \pi$.

104. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq g'(x)$, якщо $f(x) = 2x^2 - 3x + 9$, $g(x) = 5 \ln(x - 1)$.

105. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = x \ln(x^2 + 2x - 7)$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

106. Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = x^2 e^{2x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$;

2) $f(x) = e^{x^2 - 3x - 4}$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$;

3) $f(x) = 3^{2x+3}$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$;

4) $f(x) = \ln(3 - 2x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$;

5) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$ у точці перетину з віссю абсцис;

6) $f(x) = \log_2(x + 5)$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

107. У якій точці графіка функції $f(x) = \ln(4 - 5x)$ дотична до нього нахилена до осі абсцис під кутом $\alpha = 135^\circ$?

108. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^x$, яка паралельна прямій $y = ex + 5$;

2) $f(x) = e^{4x+1}$, яка паралельна прямій $y = 4x - 10$.

109. Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x) = (2^x - 5)(2^x - 3)$.

110. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^x - xe$;

10) $f(x) = \ln^2 x - \ln x$;

2) $f(x) = e^{x^2 - 8x + 3}$;

11) $f(x) = x^2 \log_2 x$;

3) $f(x) = e^{x^4}$;

12) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$;

4) $f(x) = (3x + 2)e^{3x}$;

13) $f(x) = 1,5 \ln^2 x - \frac{1}{3} \ln^3 x$;

5) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$;

14) $f(x) = \lg^3 x - 12 \lg x - 7$;

6) $f(x) = \frac{e^x}{x + 2}$;

15) $f(x) = x^2 - 8x - 10 \ln(-x) - 3$;

7) $f(x) = 5^{3x} - 9 \cdot 5^{2x} + 15 \cdot 5^x$;

16) $f(x) = x^2 - 4x - 1 - 2 \ln(x - 2)$;

8) $f(x) = x \ln x - 2x$;

17) $f(x) = x \ln^2 x + x \ln x + x + 1$;

9) $f(x) = x^3 \ln x$;

111. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

1) $f(x) = xe^{-2x}, [0; 1]$;

2) $f(x) = 5^{x^2 + 4x + 5}, [-4; -1]$;

3) $f(x) = 4^x + 4^{-x}, [-2; 1]$;

4) $f(x) = e^{4x + 5} (3x^2 + 2x), [-2; -0,5]$;

5) $f(x) = 2^{3x + 1} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x, [0; 2]$;

112. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = xe^{-x}$;

5) $f(x) = x - \ln x$;

2) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

6) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$;

3) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

7) $f(x) = \log_2(4x - x^2)$;

4) $f(x) = e^{-x^2}$;

8) $f(x) = \ln \frac{x}{x - 1}$;

113. При яких значеннях a функція $f(x) = 3e^x + ax - 5$ не має критичних точок?

114. При яких значеннях a функція $f(x) = 2^{2x+1} - 2^a x \ln 2 + 8x \ln 2$ зростає на множині дійсних чисел?

115. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = e^{-x} + x - 1$ і доведіть, що $e^{-x} < 1 - x$ при $x < 0$.

116. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = 1 + \ln(1+x) - e^x$ і доведіть, що $1 + \ln(1+x) < e^x$ при $x > -1$.

Перестановки

117. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{(n-1)!}{n!}; \quad 2) \frac{n!}{(n-3)!}; \quad 3) \frac{(n-2)!}{(n-4)!}; \quad 4) \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!}, \quad n > k.$$

118. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}; \quad 2) \frac{(n-2)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}.$$

119. Розв'яжіть рівняння $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$.

120. Обчисліть:

$$1) \frac{P_6 + P_5}{P_4}; \quad 2) \frac{P_{12} - P_{11}}{11P_{10}}; \quad 3) \frac{P_{3k+2}}{P_{3k+1}}.$$

121. Скількома способами можна розставити 6 книжок на книжковій полиці?

122. На танцювальному майданчику зібрались n юнаків і n дівчат. Скількома способами вони можуть розібратися на пари для участі в черговому танці?

123. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна записати з допомогою цифр 0, 1, 3, 5, 7, якщо кожен з них використовувати тільки один раз?

124. Скільки різних слів можна одержати, переставляючи букви слова:
1) «школа»; 2) «краватка»; 3) «вишиванка» (словом вважається будь-яка послідовність літер)?

Розміщення

125. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{A_{13}^3}{A_{14}^4 - A_{13}^4}; \quad 2) \frac{A_{15}^{12}}{A_{16}^3 \cdot P_{12}}.$$

126. Доведіть, що $A_n^n = n!$.

127. Розв'яжіть рівняння:

$$1) A_x^2 = 42; \quad 2) A_{x-1}^2 = 12.$$

128. Скількома способами серед 10 спортсменів, які беруть участь у змаганнях з бігу, можуть розподілитися 3 призові місця?
129. У ліцеї в 11 класі вивчають 16 предметів. Денний розклад містить 7 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад?
130. Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких парні, різні і відмінні від нуля?
131. Скільки існує звичайних дробів, чисельник і знаменник яких — різні прості числа, не більші за 30?
132. Скільки існує правильних дробів, чисельник і знаменник яких — прості числа, не більші за 30?
133. Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких різні і парні?

Комбінації

134. Обчисліть:

$$1) C_7^3; \quad 2) C_9^4; \quad 3) C_4^2 + C_4^0; \quad 4) C_{21}^1; \quad 5) C_{2000}^{2000} + C_{2000}^1.$$

135. Доведіть, що:

$$1) C_7^2 + C_7^3 = C_8^3; \quad 2) C_8^4 + C_8^3 = C_9^4.$$

136. Спростіть вираз:

$$1) \frac{6}{n+2} C_{n+2}^n; \quad 2) \frac{1}{2n-1} C_{2n+1}^{2n-2}.$$

137. Обчисліть:

$$1) C_{21}^{20}; \quad 2) C_{18}^{16}; \quad 3) C_{100}^{99}.$$

138. Доведіть, що:

$$1) C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7;$$

$$2) C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = C_5^1 + C_5^3 + C_5^5.$$

139. Розв'яжіть рівняння:

$$1) A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79; \quad 4) C_x^{15} = C_x^6;$$

$$2) 3C_{x+1}^2 + 2x = 4A_x^2; \quad 5) C_{30}^7 + C_{30}^6 = C_{31}^x;$$

$$3) A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101; \quad 6) C_{19}^8 + C_{19}^x = C_{20}^8.$$

140. Розв'яжіть рівняння:

$$1) C_x^2 = 120; \quad 3) C_x^{x-2} = 66; \quad 5) 13C_{2x}^{x+1} = 7C_{2x+1}^{x-1};$$

$$2) C_{x+2}^3 = 7(x+2); \quad 4) \frac{C_{x+1}^3}{C_x^4} = \frac{6}{5}; \quad 6) 17C_{2x-1}^x = 9C_{2x}^{x-1}.$$

141. 3 8 робітників треба п'ятьох виділити для виконання деякого виробничого завдання. Скількома способами можна вибрати цих 5 робітників?
142. На площині розміщено 20 точок так, що ніякі три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує прямих, що проходять через ці точки?
143. Скільки можна скласти з простих дільників числа 14 630 складених чисел, які мають тільки два простих дільника?
144. Скількома способами групу з 10 туристів можна розмістити на чотиримісному і шестимісному човнах?
145. У загоні 7 офіцерів і 20 рядових. Скількома способами можна сформувати загін розвідників, до якого входять 3 офіцера і 12 рядових?
146. У футбольній команді 11 основних гравців і 8 запасних. Скількома способами можна зробити заміну одразу двох гравців?
147. На одній з паралельних прямих позначено 7 точок, а на другій — 12. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?
148. 3 членів президії зборів, яка складається з 12 осіб, треба обрати голову зборів і секретаря. Скількома способами це можна зробити?
149. Скількома способами можна вибрати 8 карт з повної колоди, яка містить 52 карти, так, щоб серед них було рівно два тузи?

Біном Ньютона

150. Знайдіть розклад степеня бінома:

$$\begin{array}{llll} 1) (x+y)^4; & 4) (\sqrt{x}+\sqrt{y})^4; & 6) (2x+1)^5; & 9) \left(2+\frac{1}{y}\right)^4; \\ 2) (u+v)^5; & 5) \left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^5; & 7) (m-3n)^4; & \\ 3) (a-b)^6; & 8) (b^2+1)^5; & 10) (1+a^{-2})^4. \end{array}$$

151. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів у розкладі бінома $(x+y)^n$ дорівнює 512. Знайдіть n .
152. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів, які стоять на непарних місцях у розкладі бінома $(a+b)^n$, дорівнює 256. Знайдіть n .
153. Чому дорівнює сума біноміальних коефіцієнтів розкладу бінома $(x+a)^{10}$, які стоять на парних місцях?
154. Доведіть, що сума всіх коефіцієнтів розкладу бінома $(3x-2y)^n$ при будь-якому натуральному n дорівнює 1.

155. Доведіть, що сума всіх коефіцієнтів розкладу бінома $(3x - 4y)^n$ при будь-якому непарному n дорівнює -1 .

156. Доведіть тотожність:

$$C_n^0 \cdot 2^n - C_n^1 \cdot 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} - \dots + C_n^{n-1} \cdot 2^1 \cdot (-1)^{n-1} + C_n^n \cdot 2^0 \cdot (-1)^n = 1.$$

157. Який номер члена у розкладі бінома $(a + b)^{15}$, що містить b у степені 7?

158. Знайдіть п'ятий член у розкладі бінома $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{12}$.

159. Знайдіть шостий член у розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{a} - a\right)^{15}$.

160. Знайдіть середній член у розкладі бінома $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$.

161. У розкладі бінома $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ знайдіть номер члена, який не містить x .

162. Знайдіть член розкладу бінома $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, який не містить a .

163. Знайдіть член розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{x^{-2}} + x\right)^7$, який містить x у другому степені.

Ймовірність випадкової події

164. Яка ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде число очок, що дорівнює:

1) одному;

3) непарному числу;

2) чотирьом;

4) числу, яке кратне 5?

165. Щоб здати екзамен з математики, треба вивчити 25 білетів. Учень не вивчив тільки один білет. Яка ймовірність того, що він не здасть екзамен?

166. У гральній колоді 36 карт. Навмання вибирається одна карта. Яка ймовірність того, що ця карта: 1) король; 2) бубновий король?

167. Кидають дві однакові монетки. Яка ймовірність того, що випадають: 1) дві цифри; 2) різні сторони монеток?

168. Яка ймовірність того, що ваша майбутня дитина народиться:
1) 5 числа; 2) 30 числа; 3) 28 числа?
169. У ящику знаходилося 50 кульок, з яких 20 білих. Загубили одну білу и дві не білих кульки. Яка ймовірність того, що вибрана навмання одна кулька буде білою?
170. У коробці лежать 4 блакитних, 3 червоних, 9 зелених і 6 жовтих кульок. З коробки навмання витягли одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька не буде зеленою?
171. Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число ділиться націло на 15?

Обчислення ймовірностей за допомогою правил комбінаторики

172. У ящику лежать 10 кульок, три з яких червоні. Яка ймовірність того, що вибрані навмання три кульки будуть червоні?
173. Чотири картки пронумеровано числами 1, 2, 3, 4. Яка ймовірність того, що з номерів вибраних навмання трьох карток можна утворити спадну арифметичну прогресію?
174. На картках написано натуральні числа від 1 до 7. Навмання вибираються дві з них. Яка ймовірність того, що сума номерів вибраних карток дорівнює 5?
175. Вибирають навмання чотири літери зі слова «ласощі». Яка ймовірність того, що з вибраних чотирьох літер можна скласти слово «сало»?
176. Навмання вибирають чотири літери зі слова «закон». Яка ймовірність того, що вибрані чотири літери в послідовності вибору утворюють слово «коза»?
177. У партії з 40 лампочок є 7 бракованих. Яка ймовірність того, що взяті навмання 4 лампочки будуть без дефекту?
178. З колоди у 36 карт навмання вибирають три карти. Яка ймовірність того, що вибрані карти — три тузи?
179. На екзамен з математики виносять 50 запитань. Учень підготував тільки 40. Білет складається з трьох запитань. Яка ймовірність того, що учень одержить найвищу оцінку?
180. На екзамен з математики виносять 40 запитань. Учень підготував тільки 35. Білет складається з п'яти запитань. Щоб одержати відмінну оцінку, досить відповісти на чотири запитання. Яка ймовірність того, що учень одержить відмінну оцінку?
181. У ящику лежать 7 червоних і 4 чорних кулі. Яка ймовірність того, що з чотирьох вибраних навмання куль дві будуть червоними?

182. Знайдіть ймовірність того, що дні народження 7 чоловік випадають на різні дні тижня.

Ймовірність суми подій

183. У корзині лежать фрукти, серед яких 30 % бананів і 60 % яблук. Яка ймовірність того, що вибраний навмання фрукт буде бананом або яблуком?
184. Завод випускає 16 % продукції вищого гатунку, 24 % — першого гатунку, 48 % — другого гатунку, а все інше — брак. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибраний виріб не буде бракованим.
185. На змаганнях зі стрільби стрілець попадає в десятку з ймовірністю 0,03, у дев'ятку — 0,2, у вісімку — 0,3. Яка ймовірність того, що одним пострілом стрілець набере: 1) більше 8 очок; 2) менше 8 очок; 3) не менше 8 очок?
186. 25 випускників педагогічного університету направили працювати в 3 села. У Вишневе потрапило 7 молодих спеціалістів, в Яблуневе — 12, у Квітуче — решта. Яка ймовірність того, що три друга будуть працювати в одному селі?

Ймовірність добутку подій

187. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випадуть дві шістки?
188. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випадуть два непарних числа?
189. Кидають три монети. Яка ймовірність того, що випадуть дві цифри і герб?
190. Тричі кидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що шістка випаде тільки другого разу?
191. На насосній станції паралельно працюють три насоси. Ймовірність псування першого насоса дорівнює 10 %, другого — 8 %, третього — 5 %. Яка ймовірність того, що буде зовсім припинено подачу води?
192. У ящику лежать 5 червоних і 4 чорних кульки. Навмання з ящика дістають дві кульки і кладуть їх назад. Цю ж операцію повторюють ще раз. Яка ймовірність того, що всі витягнуті кульки були червоного кольору?
193. Продукція одного м'ясопереробного заводу становить 60 % усієї відповідної продукції, яку продає магазин, причому 90 % продукції цього заводу вищого гатунку. Яка ймовірність придбати продукт вищого гатунку виробництва цього заводу?

194. Три верстати виготовляють відповідно 50 %, 40 %, 10 % усіх виробів. В їх роботі брак відповідно складає 1 %, 2 %, 4 %. Яка ймовірність того, що взятий навмання виріб буде бракованим?
195. Три стрільці незалежно один від одного по одному разу стріляють у ціль. Імовірність влучення першого стрільця складає 0,6, другого — 0,8, третього — 0,7. Яка ймовірність того, що буде:
1) три промахи; 2) хоча б одне влучення; 3) тільки два влучення?
196. В одному ящику лежать 6 червоних, 5 синіх і 9 зелених кульок, а в другому — 7 червоних, 1 синя і 5 зелених кульок. Навмання з кожного ящика беруть по одній кульці. Яка ймовірність того, що вони будуть одного кольору?
197. Монету підкидають 10 разів. Знайдіть ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб.
198. Два учні незалежно один від одного розв'язують одну задачу. Перший учень може розв'язати цю задачу з ймовірністю 0,8, а другий — 0,9. Знайдіть ймовірність того, що: 1) обидва учні розв'яжуть задачу; 2) жоден з учнів не розв'яже задачу; 3) хоча б один з учнів розв'яже задачу; 4) тільки один з учнів розв'яже задачу.
199. П'ять стрільців одночасно незалежно один від одного стріляють в одну ціль. Імовірність попадання кожного стрільця дорівнює 0,7. Поразка цілі відбувається за одне влучення. Знайдіть ймовірність поразки цілі.

Схема Бернуллі

200. Монету підкидають 7 разів. Яка ймовірність того, що цифра:
1) випаде два рази; 2) не випаде жодного разу; 3) випаде менше двох разів; 4) випаде не менше двох разів?
201. По мішені стріляють 10 разів. Імовірність влучення в мішень під час кожного пострілу дорівнює $\frac{5}{7}$. Яка ймовірність того, що в десяти пострілах буде зроблено три промахи?
202. У ящику лежать 5 білих і 6 чорних кульок. З ящика 6 разів виймають по одній кульці і кладуть назад перед наступним випробуванням. Знайдіть ймовірність того, що з шести вийнятих кульок білу кульку: 1) не виймали жодного разу; 2) виймали менше трьох разів; 3) виймали не менше двох разів.

203. Гральний кубик підкидають 8 разів. Яка ймовірність того, що одиниця випаде: 1) 3 рази; 2) більше двох, але менше п'яти разів?
204. Гральний кубик підкидають 9 разів. Яка ймовірність того, що непарне число випаде: 1) 4 рази; 2) не більше двох разів; 3) більше 6 разів?
205. Що більш імовірно: виграти у рівноцінного гравця дві партії з трьох чи чотири партії із семи?

Первісна. Основна властивість первісної

206. Доведіть, що функція F є первісною для функції f на вказаному проміжку I :

1) $F(x) = x^2 - 4x^3 - 6$, $f(x) = 2x - 12x^2$, $I = (-\infty; +\infty)$;

2) $F(x) = 5x + \frac{7}{x}$, $f(x) = 5 - \frac{7}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$;

3) $F(x) = \sqrt{4x+9}$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+9}}$; $I = (-2,25; +\infty)$;

4) $F(x) = \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$, $I = (-\infty; +\infty)$;

5) $F(x) = 9 - \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$, $f(x) = \frac{1}{3\sin^2 \frac{x}{3}}$, $I = \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

6) $F(x) = \ln x^6 - x^3$, $f(x) = \frac{3(2-x^3)}{x}$, $I = (0; +\infty)$.

207. Чи є функція $F(x) = 3 - \frac{2}{x^3}$ первісною для функції $f(x) = \frac{6}{x^4}$ на проміжку:

1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-5; 5)$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $(0; 7]$?

208. Чи є функція $F(x) = |4-x|$ первісною для функції $f(x) = -1$ на проміжку: 1) $(-2; 3)$; 2) $(-1; 5)$?

209. Для функції f на даному проміжку I знайдіть первісну F , графік якої проходить через дану точку M :

1) $f(x) = x^3$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(-1; 4)$;

2) $f(x) = \cos x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M\left(\frac{\pi}{6}; 1,5\right)$;

3) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$, $I = (0; \pi)$, $M\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^5}$, $I = (0; +\infty)$, $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$;

5) $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0; +\infty)$, $M(16; 2)$.

Правила знаходження первісної

210. Для даної функції f знайдіть загальний вигляд первісних на вказаному проміжку I :

1) $f(x) = x + 6$, $I = (-\infty; +\infty)$;

2) $f(x) = 4x^3 + 8x - 1$, $I = (-\infty; +\infty)$;

3) $f(x) = 12x^2 - 6x^5$, $I = (-\infty; +\infty)$;

4) $f(x) = x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$;

5) $f(x) = \frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^3}$, $I = (0; +\infty)$;

6) $f(x) = \frac{7}{\cos^2 x} + 2\sin x$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

7) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 9x^8$, $I = (-\infty; +\infty)$;

8) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} - 9$, $I = [0; +\infty)$.

211. Для функції f на вказаному проміжку I знайдіть первісну F , яка задовольняє дану умову:

1) $f(x) = 5 + 6x - 9x^2$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(-3) = 100$;

2) $f(x) = 13x^{12} + \frac{7}{6\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $F(1) = 0$;

3) $f(x) = \frac{3}{x^2} - 4$, $I = (0; +\infty)$, $F(1,5) = -3$.

212. Для даної функції f знайдіть загальний вигляд первісних на вказаному проміжку I :

1) $f(x) = (7 - 4x)^4$, $I = (-\infty; +\infty)$;

2) $f(x) = \sin 9x$, $I = (-\infty; +\infty)$;

3) $f(x) = \cos \frac{x}{8}$, $I = (-\infty; +\infty)$;

4) $f(x) = \frac{2}{\sin^2 \frac{x}{4}}$, $I = (0; 4\pi)$;

5) $f(x) = \frac{10}{\sqrt{3+2x}}$, $I = \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$;

6) $f(x) = \frac{1}{(3x-2)^2}$, $I = \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

- 7) $f(x) = 6^{3x} \ln 6, I = (-\infty; +\infty);$
- 8) $f(x) = e^{0,25x}, I = (-\infty; +\infty);$
- 9) $f(x) = e^{-x} + 2^{\frac{x}{2}}, I = (-\infty; +\infty);$
- 10) $f(x) = 3^{7x} \ln 3 - e^{-2x}, I = (-\infty; +\infty);$
- 11) $f(x) = 16e^{4x-3} - 12e^{5-6x}, I = (-\infty; +\infty).$
213. Для функції f на вказаному проміжку I знайдіть первісну F , графік якої проходить через дану точку:
- 1) $f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \sin 5x, I = (-\infty; +\infty), A(\pi; 0);$
- 2) $f(x) = \frac{6}{\cos^2\left(6x + \frac{\pi}{12}\right)}, I = \left(-\frac{7\pi}{72}; \frac{5\pi}{72}\right), A\left(\frac{\pi}{24}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
- 3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{7x-5}}, I = \left(\frac{5}{7}; +\infty\right), A(3; 2);$
- 4) $f(x) = 5^x \ln 5 + 2^x \ln 2, I = (-\infty; +\infty), B(2; -3);$
- 5) $f(x) = \sin x - 3e^x, I = (-\infty; +\infty), B(0; 5);$
- 6) $f(x) = 16x^3 - e^{\frac{x}{2}}, I = (-\infty; +\infty), B(1; -2\sqrt{e});$
- 7) $f(x) = 10x^9 - \frac{4}{x}, I = (0; +\infty), M(1; 2);$
- 8) $f(x) = \frac{12}{3x+2}, I = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right), M(2; \ln 8);$
- 9) $f(x) = \frac{1}{4x-1} - e^{-3x}, I = \left(\frac{1}{4}; +\infty\right), M(0; 1);$
- 10) $f(x) = \frac{5}{x+3} - \frac{7}{2\sqrt{x+18}}, I = (-3; +\infty), M(-2; -30).$
214. Знайдіть первісну функції $f(x) = 4x + 1$, один з нулів якої дорівнює -4 .
215. Знайдіть первісну функції $f(x) = 6x^2 + 4x - 5$, один з нулів якої дорівнює 1 . Знайдіть решту нулів первісної.
216. Знайдіть первісну функції $f(x) = 5x - 3$, графік якої має з прямою $y = 2$ тільки одну спільну точку.
217. Знайдіть первісну функції $f(x) = 8 - 3x$, для графіка якої пряма $y = 2x - 16$ є дотичною.

218. Швидкість руху точки задається рівнянням $v = 5 - 2t$ (м/с). Знайдіть рівняння руху $s = s(t)$, якщо у момент часу $t = 4$ с точка знаходилася на відстані $s = 32$ м.

219. Знайдіть загальний вигляд первісних функцій:

$$1) f(x) = \cos^2 4x; \quad 2) f(x) = (6x - x^2)^2; \quad 3) f(x) = \cos 7x \cos 4x.$$

220. Знайдіть загальний вигляд первісних функцій f на вказаному проміжку I :

$$1) f(x) = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}, \quad I = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right); \quad 2) f(x) = \frac{5x^5 + x^6 - 2}{x^3}, \quad I = (0; +\infty).$$

221. Функція F — первісна функції $f(x) = 4x + 8$, графік якої має з графіком функції f спільну точку, що належить осі ординат. Знайдіть первісну F та всі точки перетину графіків функцій f і F .

222. Знайдіть формулу, якою задається функція $y = f(x)$, графік якої проходить через точку $M(2; 10)$, а кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка в точці x , дорівнює $4x^3 - 1$.

Інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца

223. Обчисліть інтеграл:

$$1) \int_{-4}^3 (4 - x) dx;$$

$$6) \int_0^{0,5} \frac{12 dx}{(4x - 3)^4};$$

$$2) \int_{-2}^0 (x^2 + 6x) dx;$$

$$7) \int_4^{49} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx;$$

$$3) \int_{-1}^2 (16x^3 + 9x^2 - 12x + 1) dx;$$

$$8) \int_1^{13} \frac{dx}{\sqrt{6x + 3}};$$

$$4) \int_{-5}^{-1} (x + 2)^2 dx;$$

$$9) \int_{-4}^{16} \frac{dx}{\sqrt{8 - \frac{x}{4}}};$$

$$5) \int_{-1,5}^{-1} (6x + 5)^5 dx;$$

$$10) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx;$$

$$11) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \frac{x}{3} dx;$$

$$12) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x};$$

$$13) \int_{-\frac{\pi}{15}}^{-\frac{\pi}{30}} \frac{dx}{\cos^2 5x};$$

$$14) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \frac{x}{3} + \sin 3x \right) dx;$$

$$15) \int_1^{16} \sqrt{x} dx;$$

$$16) \int_{16}^{81} \sqrt[4]{x} dx;$$

$$17) \int_1^{27} \sqrt[3]{x^2} dx;$$

$$18) \int_{-12}^{-5} \sqrt{4-x} dx;$$

$$19) \int_{-8}^2 \sqrt[4]{8x+65} dx;$$

$$20) \int_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) dx;$$

$$21) \int_1^4 e^x dx;$$

$$22) \int_2^{\log_2 5} 2^x dx;$$

$$23) \int_0^2 (3 \cdot 4^x - 4e^x + 2) dx;$$

$$24) \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x} dx;$$

$$25) \int_{-1}^0 2^{2x+3} \ln 0,5 dx;$$

$$26) \int_{-2}^2 (7^{2x} + \cos 2\pi x) dx;$$

$$27) \int_5^{625} \frac{dx}{x};$$

$$28) \int_e^{e^9} \frac{4}{x} dx;$$

$$29) \int_{10}^{30} \frac{dx}{x \ln 3};$$

$$30) \int_{-2}^{-1} \left(x^2 + \frac{6}{x} \right) dx;$$

$$31) \int_0^9 \frac{dx}{6x+2};$$

$$32) \int_{-10}^0 \frac{dx}{2x-5};$$

$$33) \int_{\frac{7}{7}}^{\frac{49}{7}} \frac{dx}{\frac{x}{7} + 1};$$

$$34) \int_{-5}^{10} \left(6x - \frac{5}{0,2x+4} \right) dx.$$

224. Обчисліть інтеграл:

$$1) \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^2 2x \, dx;$$

$$5) \int_{-2}^1 (x^2 + x)^2 \, dx;$$

$$9) \int_0^2 \frac{12^x - 7 \cdot 2^x}{4^x} \, dx;$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \frac{x}{4} \, dx;$$

$$6) \int_0^1 (x + \sqrt{x})^2 \, dx;$$

$$10) \int_{-2}^{-1} \frac{e^x - x^3}{x^3 e^x} \, dx;$$

$$3) \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx;$$

$$7) \int_2^3 \frac{x^2 - x + 2}{x^4} \, dx;$$

$$11) \int_{0,5}^2 \left(\frac{x+2}{x} \right)^2 \, dx;$$

$$4) \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sin 3x \sin x \, dx;$$

$$8) \int_0^{\ln 4} (e^{2x} + 2)^2 \, dx;$$

$$12) \int_{-4}^{-1} \frac{2x^2 + x - 3}{x} \, dx.$$

225. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^3 f(x) \, dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$

226. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 30t - 6t^2$ (м/с).

Обчисліть шлях, який пройшло тіло:

1) за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с;

2) від початку руху до зупинки.

Площа криволінійної трапеції

227. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) параболою $y = x^2$ та прямими $y = 0$, $x = 2$ і $x = 3$;

2) графіком функції $y = x^4$ та прямими $y = 0$ і $x = -1$;

3) графіком функції $y = \sin x$ та прямими $y = 0$, $x = 0$ і $x = \frac{2\pi}{3}$;

4) параболою $y = 4x - x^2$ і віссю абсцис;

5) параболою $y = x^2 + 2x$, віссю абсцис і прямою $x = -3$;

6) графіком функції $y = \sqrt{x}$ та прямими $y = 0$, $x = 1$ і $x = 4$;

7) графіком функції $y = \sqrt{x+4}$ та прямими $y = 0$ і $x = 5$;

8) графіком функції $y = \cos \frac{x}{2}$ та прямими $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{2}$;

9) графіком функції $y = 2^x$ і прямими $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

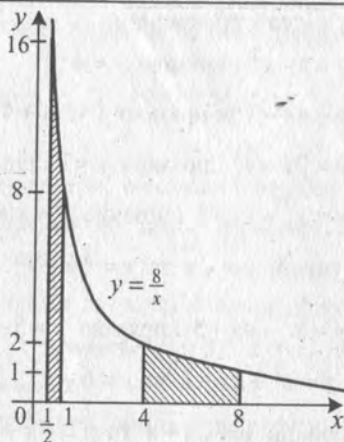


Рис. 5

10) графіком функції $y = e^{2x-1}$ і прямими $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

11) графіком функції $y = \frac{1}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 3$, $x = 6$.

228. Доведіть, що площі криволінійних трапецій, заштрихованих на рисунку 5, рівні.

229. Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 6.

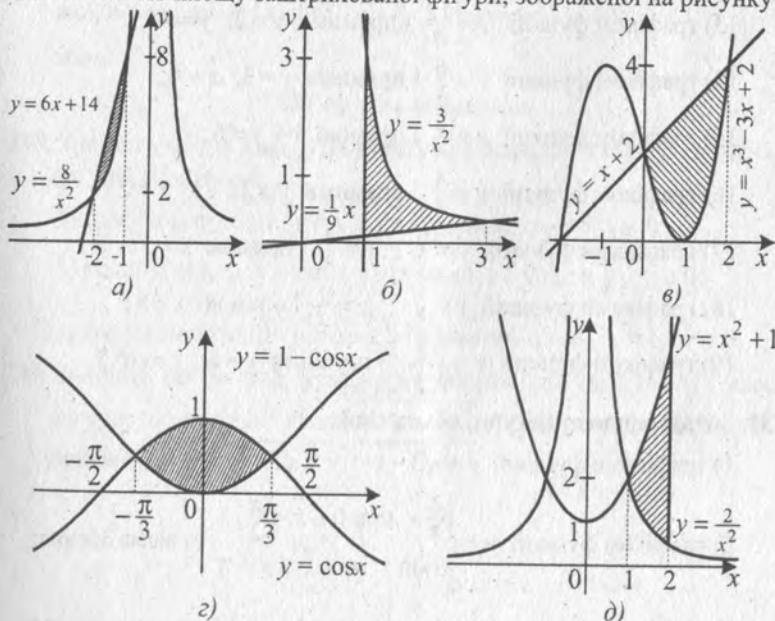


Рис. 6

230. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

- 1) параболою $y = 5 - x^2$ і прямою $y = 4$;
- 2) параболою $y = 4x - x^2$ і прямою $y = -x + 4$;
- 3) параболою $y = 2x - x^2$, прямою $y = 1$ і віссю ординат;
- 4) параболою $y = x^2 + 2x + 1$ і прямою $y = x + 3$;
- 5) графіками функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = \frac{1}{2}x$;
- 6) параболою $y = x^2 - 4x + 5$ і прямою $y = 5 - x$;
- 7) параболою $y = x^2 + 2x + 2$ та $y = 6 - x^2$;
- 8) графіками функцій $y = \sqrt{x+4}$ та $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$;
- 9) графіком функції $y = e^x$ і прямими $y = 1$, $x = 2$;
- 10) графіком функції $y = 0,2^x$ і прямими $x = 0$, $y = 5$;
- 11) графіками функцій $y = e^x + 1$, $y = 3 - e^x$ і прямою $x = 1$;
- 12) графіками рівнянь $xy = 7$, $x^2 - 8x + 7 = 0$ і $y = 0$;
- 13) графіком функції $y = \frac{12}{x}$ і прямими $x = 2$, $y = 4$;
- 14) графіком функції $y = \frac{6}{x}$ і прямими $y = 3$, $x = 4$;
- 15) графіком функції $y = \frac{5}{x}$ і прямою $x + y = 6$;
- 16) графіком функції $y = \frac{4}{x}$ і прямими $y = 3x + 1$, $x = 2$;
- 17) графіками функцій $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ і прямою $x = 3$;
- 18) графіками функцій $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \frac{1}{x}$ і прямою $x = 8$;
- 19) графіком функції $y = \frac{2}{x+1}$ і прямими $x = 3$, $x = -0,5$.

231. Знайдіть площу фігури, обмеженої:

- 1) графіками функцій $y = \sqrt{3-x}$ і $y = \sqrt{5+x}$ та віссю абсцис;
- 2) графіком функції $y = \begin{cases} \frac{6}{\pi}x & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 3 \sin x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ та віссю абсцис;
- 3) графіками функцій $y = 4 - x^2$, $y = -1,5x + 1,5$ та віссю абсцис.

232. Використовуючи геометричний зміст інтегралу, обчисліть:

$$1) \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx; \quad 2) \int_0^2 \sqrt{4x-x^2} dx; \quad 3) \int_{-3}^1 \sqrt{7-6x-x^2} dx.$$

233. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 - 2x$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = -2$, і віссю ординат.

234. Знайдіть, при якому значенні a площа фігури, обмеженої параболою $y = 3x^2$ і прямими $y = 0$, $x = a$, $x = a + 3$, набуватиме найменшого значення.

235. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - x$ і $y = |x^2 - 4|$.

236. При якому додатному значенні a пряма $x = 6$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{1}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 3$, $x = a + 6$, навпіл?

237. При якому значенні a пряма $x = a$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{8}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 2$, $x = 10$, навпіл?

Об'єм тіла обертання

238. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = \sqrt{x}$ та прямими $x = 9$ і $y = 0$;

2) косинусоїдою $y = \cos x$ і прямими $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $y = 0$;

3) графіком функції $y = 5 - x^2$ і прямими $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

239. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої прямою $y = 4x$ і графіком функції $y = x^3$ при $x \geq 0$.

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Варіант 1

Контрольна робота № 1

Тема. *Похідна. Рівняння дотичної*

1.° Знайдіть похідну функції:

$$1) f(x) = 2x^5 - \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 4; \quad 3) f(x) = \frac{x^2 + 9x}{x - 4};$$

$$2) f(x) = (3x - 5)\sqrt{x}; \quad 4) f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^6}.$$

2.° Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^4 - 2x$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

3.° Знайдіть похідну даної функції та обчисліть її значення в даній точці x_0 :

$$1) f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x_0 = 5; \quad 2) f(x) = \sin^5 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

4.° Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2,5t^2 + 24t - 7$ (час t вимірюється в секундах, переміщення s — у метрах). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$.

5.** Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 3x - 8$, яка паралельна прямій $y = 9x - 1$.

Контрольна робота № 2

Тема. Застосування похідної

- 1.^о Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$;

2) $f(x) = 8x^2 - x^4$.

- 2.^о Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \frac{x^2 + 7x}{x - 9}$ на проміжку $[-4; 1]$.

- 3.^{*} Доведіть, що функція $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 12$ спадає на множині дійсних чисел.

- 4.^{*} Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x^2$ та побудуйте її графік.

- 5.^{**} Число 24 подайте у вигляді суми трьох додатних чисел так, що перше число відноситься до другого як $1 : 2$, а сума кубів першого і другого та квадрата третього набуває найменшого значення.

Контрольна робота № 3

Тема. Показникова функція. Показникові рівняння і нерівності

1.° Порівняйте числа m і n , якщо:

1) $10,4^m > 10,4^n$;

2) $(\sin 1)^m < (\sin 1)^n$.

2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 250$;

2) $4^x - 3 \cdot 2^x = 40$.

3.° Знайдіть множину розв'язків нерівності $\left(\frac{3}{7}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-3}$.4.* Розв'яжіть рівняння $(7^{x+3})^{x-4} = \left(\frac{1}{7}\right)^x \cdot 49^{x+6}$.

5.* Розв'яжіть нерівність:

1) $(0,1)^{\frac{x^2-4x-15}{x+1}} \geq 0,001$;

2) $0,5^{2x-3} - 17 \cdot 0,5^x + 2 \leq 0$.

6.** Розв'яжіть рівняння $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Контрольна робота № 4

Тема. *Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння і нерівності.
Похідна показникової і логарифмічної функцій*

- 1.° Знайдіть область визначення функції $y = \lg(4x - 1)$.
- 2.° Розв'яжіть рівняння:
- 1) $\log_{\frac{1}{3}}(3x + 4) = -2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x + 4) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x - 14)$.
- 3.° Розв'яжіть нерівність $\log_{0,9}(x - 4) \geq \log_{0,9}(8 - x)$.
- 4.° Обчисліть значення виразу $\frac{\log_9 27 + \log_9 3}{2\log_2 6 - \log_2 9}$.
- 5.° Знайдіть корені рівняння:
- 1) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$; 2) $1 + 2\log_x 5 = \log_5 x$.
- 6.° Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2 \geq 0$.
- 7.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{-3x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.
- 8.** Побудуйте графік функції $y = \sqrt{\lg \sin x}$.

Контрольна робота № 5**Тема. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики**

- 1.° Маємо 8 різних конвертів, 4 різні марки і 6 різних листівок. Скількома способами можна вибрати комплект з конверта, марки і листівки?
- 2.° У ящику лежать 9 кульок, дві з яких білі. Яка ймовірність того, що вибрані навмання дві кульки будуть білими?
- 3.° Дано вибірку: 3; 8; 5; 3; 6; 8; 9; 2; 8; 10. Знайдіть її моду, медіану і середнє значення.
- 4.* У коробці лежать 36 карток, пронумерованих числами від 1 до 36. Яка ймовірність того, що на навмання взятій картці буде записано число, яке: 1) кратне 4; 2) не кратне ні числу 2, ні числу 3?
- 5.* У коробці лежать кульки, з яких 12 — білих, а решта — червоні. Скільки в коробці червоних кульок, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться червоною, становить $\frac{5}{9}$?
- 6.* Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких непарні?
- 7.** На картках написано натуральні числа від 1 до 10. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що добуток чисел, написаних на вибраних картках, буде ділитися націло на три?

Контрольна робота № 6

Тема. Інтеграл та його застосування

1.° Обчисліть інтеграл;

1)
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x};$$

2)
$$\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

2.° Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^3$ та прямими $y = 0$ і $x = 2$.3.* Знайдіть для функції $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$ первісну, графік якої проходить через точку $A(1; -2)$.

4.* Обчисліть інтеграл:

1)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 \cos 3x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}\right) dx;$$

2)
$$\int_{-1}^4 \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+4}} - x\right) dx.$$

5.* Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 4 - x^2$ та прямою $y = 2 - x$.

6.** Використовуючи геометричний зміст інтегралу, обчисліть

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

Контрольна робота № 7*

Тема. Узагальнення і систематизація знань учнів

- 1.° Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 6}{x + 3}$ та обчисліть її значення в точці $x_0 = -2$.
- 2.° Обчисліть інтеграл:

1) $\int_0^1 (5x^4 - 6x^2 + 4) dx;$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

- 3.° Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 6\sqrt{x} - 5x$ у точці з абсцисою $x_0 = 9$.
- 4.° Розв'яжіть рівняння:
- 1) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x = 4;$ 3) $\lg(x-3) + \lg(x+45) = 2;$
- 2) $2^{x+1} + 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{x-1} = 72;$ 4) $\log_2^2 x - \log_{\frac{1}{2}} x^4 = 21.$
- 5.° Розв'яжіть нерівність $2\log_8(-x) > \log_8(5-4x).$
- 6.° Знайдіть на проміжку $(-\infty; +\infty)$ первісну функції $f(x) = 4\sin 4x + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}$, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{3}; -1\right).$
- 7.° Дослідіть функцію $f(x) = 2x^2 - x^4 - 1$ та побудуйте її графік.
- 8.° На чотирьох картках записано числа 3, 4, 5 і 6. Яка ймовірність того, що добуток чисел, записаних на двох навмання вибраних картках, буде парним числом?
- 9.** Розв'яжіть нерівність $\lg^2 10x - \lg x \geq 3.$
- 10.** При яких значеннях b і c парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = 4x + 1$ у точці $A(1; 5)?$

* Час виконання роботи — 2 академічні години.

Варіант 2

Контрольна робота №1

Тема. Похідна. Рівняння дотичної

1.° Знайдіть похідну функції:

$$1) f(x) = 3x^6 + \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x; \quad 3) f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 2};$$

$$2) f(x) = (2 - 5x)\sqrt{x}; \quad 4) f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^4}.$$

2.° Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 3x^2 - x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

3.* Знайдіть похідну даної функції та обчисліть її значення в даній точці x_0 :

$$1) f(x) = \sqrt{6x + 7}, \quad x_0 = 3; \quad 2) f(x) = \cos^4 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

4.* Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 8 + 15t + t^2 - \frac{1}{3}t^3$ (час t вимірюється в секундах, переміщення s — у метрах). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t_0 = 4$.

5.** Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 4x - 10$, яка паралельна прямій $y = -6x + 7$.

Контрольна робота № 2

Тема. Застосування похідної

- 1.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^3 - x^2 - x$;

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$.

- 2.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 1}$ на проміжку $[-5; -2]$.

- 3.* Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x - 20$ зростає на множині дійсних чисел.

- 4.* Дослідіть функцію $f(x) = 2x^2 - x^4$ та побудуйте її графік.

- 5.** Число 14 подайте у вигляді суми трьох додатних чисел так, що перше число відноситься до другого як 1 : 3, а сума куба першого та квадратів другого і третього набуває найменшого значення.

Контрольна робота № 3

Тема. Показникова функція. Показникові рівняння і нерівності

1.° Порівняйте числа a і b , якщо:

1) $12,3^a < 12,3^b$;

2) $(\cos 1)^a > (\cos 1)^b$.

2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-3} = 72$;

2) $9^x - 2 \cdot 3^x = 63$.

3.° Знайдіть множину розв'язків нерівності $\left(\frac{5}{11}\right)^{3x} \geq \left(\frac{5}{11}\right)^{2-x}$.4.* Розв'яжіть рівняння $(5^{x+4})^{x-3} = 0,2^x \cdot 25^{x-4}$.

5.* Розв'яжіть нерівність:

1) $(0,3)^{\frac{x^2-3x-24}{x}} \leq 0,09$;

2) $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 \geq 0$.

6.** Розв'яжіть рівняння $2 \cdot 25^x - 5 \cdot 4^x = 3 \cdot 10^x$.

Контрольна робота № 4

Тема. *Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння і нерівності.
Похідна показникової і логарифмічної функцій*

1.° Знайдіть область визначення функції $y = \lg(6 - 4x)$.

2.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \log_{0,1}(10x - 7) = -1; \quad 2) \log_7(2x + 9) = \log_7(x^2 + 5x - 1).$$

3.° Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{2}{3}}(6 - x) \leq \log_{\frac{2}{3}}(x + 1)$.

4.* Обчисліть значення виразу $\frac{\log_8 128 - \log_8 2}{2\log_6 2 + \log_6 9}$.

5.* Знайдіть корені рівняння:

$$1) \log_5 x + \log_5(x - 4) = 1; \quad 2) 2\log_3 x = 2\log_3 3 + 3.$$

6.* Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{4}} x - 2 \geq 0$.

7.* Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \ln(2x + 3)$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

8.** Побудуйте графік функції $y = \sqrt{\lg \cos x}$.

Контрольна робота № 5

Тема. *Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики*

- 1.° Оркестру потрібні скрипаль, альтист і піаніст. На місце скрипаля є 6 кандидатів, на місце альтиста — 4, а на місце піаніста — 3. Скільки існує варіантів нового складу оркестру?
- 2.° У ящику лежать 8 кульок, три з яких зелені. Яка ймовірність того, що вибрані навмання три кульки будуть зеленими?
- 3.° Дано вибірку: 4; 7; 3; 9; 7; 5; 6; 7; 3; 8. Знайдіть її моду, медіану і середнє значення.
- 4.* У коробці лежать 48 карток, пронумерованих числами від 1 до 48. Яка ймовірність того, що на навмання взятій картці буде записано число, яке: 1) кратне 6; 2) не кратне ні числу 4, ні числу 3?
- 5.* У коробці лежать кульки, з яких 20 — чорні, а решта — білі. Скільки в коробці білих кульок, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться білою, становить $\frac{7}{12}$?
- 6.* Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких парні і відмінні від нуля?
- 7.** На картках написано парні числа від 2 до 16. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що добуток чисел, написаних на вибраних картках, є степенем двійки?

Контрольна робота № 6

Тема. Інтеграл та його застосування

1.° Обчисліть інтеграл:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$2) \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) dx.$$

2.° Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^4$ та прямими $y = 0$, $x = 2$.

3.* Знайдіть для функції $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 7$ первісну, графік якої проходить через точку $A(1; -4)$.

4.* Обчисліть інтеграл:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \sin 2x - \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} \right) dx;$$

$$2) \int_0^6 \left(x + \frac{5}{\sqrt{0,5x+1}} - x \right) dx.$$

5.* Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 + 1$ та прямою $y = x + 3$.

6.** Використовуючи геометричний зміст інтегралу, обчисліть

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx.$$

Контрольна робота № 7*

Тема. Узагальнення і систематизація знань учнів

- 1.° Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$ та обчисліть її значення в точці $x_0 = 4$.
- 2.° Обчисліть інтеграл:

$$1) \int_1^2 (9x^2 - 8x^3 + 2) dx;$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

- 3.° Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 4$.

- 4.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) 5^{2x} - 8 \cdot 5^{x-1} - 17 = 0;$$

$$3) \log_4(x+3) + \log_4(x+15) = 3;$$

$$2) 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{x-1} = 342;$$

$$4) \log_5^2 x + 0,5 \log_5 x^2 = 6.$$

- 5.* Розв'яжіть нерівність $2 \log_{0,7} x \geq \log_{0,7}(9 - 8x)$.

- 6.* Знайдіть на проміжку $(-\infty; +\infty)$ первісну функції $f(x) = 10 \cos 10x - \frac{1}{5} \sin \frac{x}{5}$, графік якої проходить через точку

$$B\left(\frac{5\pi}{2}; -3\right).$$

- 7.* Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ та побудуйте її графік.

- 8.* На чотирьох картках записано числа 1, 3, 4 і 7. Яка ймовірність того, що сума чисел, записаних на двох навмання вибраних картках, буде парним числом?

- 9.** Розв'яжіть нерівність $\lg^2 100x - 7 \lg x \geq 8$.

- 10.** При яких значеннях b і c парабола $y = 3x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = 7x - 2$ у точці $B(1; 5)$?

* Час виконання роботи — 2 академічні години.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

Варіант 1

1. 1) $n_0 = 3$; 2) $n_0 = 11$; 3) $n_0 = 101$. 6. 2) 4; 3) -4 ; 4) $-\frac{1}{6}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) 0.

7. 2) *Вказівка.* $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4) = 12 = f(4)$. 8. *Вказівка.*

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 \neq f(1) = -1$. 27. $x = 0$ або $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

28. $-\frac{5\pi}{2} + 6\pi k < x < \frac{5\pi}{2} + 6\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 41. $y = 2\sqrt{2}x + 1$, $y = -2\sqrt{2}x + 1$.

Вказівка. Шукане рівняння має вигляд $y - (2x_0^2 + 2) = 4x_0(x - x_0)$, де x_0 — абсциса точки дотику. Скористайтеся тим, що вказана пряма проходить через точку $M(0; 1)$. 42. $b = 1$, $c = 0$. *Вказівка.* Значення b і

c можна знайти, розв'язавши систему $\begin{cases} f'(1) = 3, \\ f(1) = 2, \end{cases}$ де $f(x) = x^2 + bx + c$.

49. 1) $a = 0$; 2) $|a| \leq 4$; 3) $a = \frac{1}{2}$. 51. $a \leq 4$. *Вказівка.* При $a = 4$

корінь рівняння $f'(x) = 0$ не є критичною точкою. 54. 1) $a < -1$ або $a > -\frac{1}{3}$; 2) $a \leq -1$ або $a \geq -\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Розгляньте випадок $a = 0$.

Крім того, треба помітити, що при $a = -1$ і $a = -\frac{1}{3}$ корені рівняння

$f'(x) = 0$ не є точками екстремуму. 57. $\max_{[0; 4]} f(x) = f(1) = 5$, $\min_{[0; 4]} f(x) =$

$= f(4) = -52$. 59. 1. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x) = 3x^2 - 2x^3$

при $x \in (0; +\infty)$. 61. $S = r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$, $S_{\min} = S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}r^2$.

62. 4) Рис. 7; 5) рис. 8; 6) рис. 9. 63. 2) Рис. 10; 3) рис. 11. 69. 4) 1,75;

5) 0; 6) $-0,5$. 70. 5) 1; 3; 6) 0; 2; 7) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 8) 2; -2 . 71. 1) 2; 1; 2) 0;

3) 0; 1; 4) коренів немає. 72. 1) 1. *Вказівка.* Очевидно, що $x = 1$ —

корінь даного рівняння. Функція $y = 2^x$ — зростаюча, а $y = 3 - x$ —

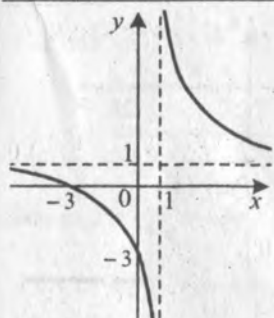


Рис. 7

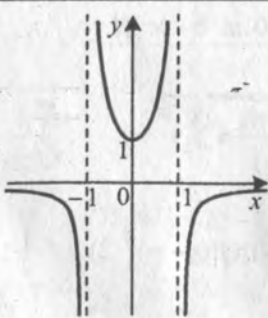


Рис. 8

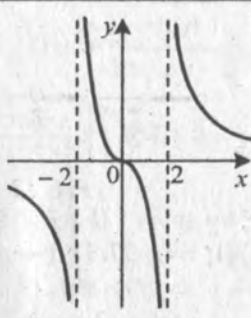


Рис. 9

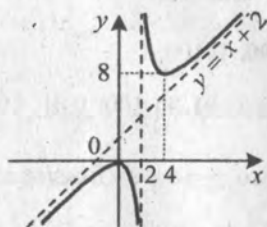


Рис. 10

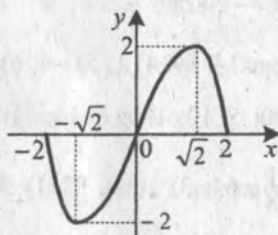


Рис. 11

спадна. Отже, дане рівняння має не більше одного кореня; 2) 2.

Вказівка. Перепишемо дане рівняння у вигляді $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Функція

$y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ — спадна, $y = 1$ — стала; 3) 0. *Вказівка.* $2^{\cos x} \leq 2$,

$x^2 + 2 \geq 2$. 73. $a \leq 1$ або $a = 5$. *Вказівка.* Заміна $2^x = t$, $t > 0$. Тоді

$t^2 - (a+3)t + 4a - 4 = 0$ і треба розглянути випадки, коли дискримінант $D = 0$ і корінь $t > 0$ та коли $D > 0$ і лише один з коренів t_1 і t_2 додатний. 74. 6) $[-4; 0) \cup [1; +\infty)$; 7) $[-1; 0) \cup [2; +\infty)$;

8) $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{11}{8}; -1\right)$. 75. 3) $(-\infty; 2)$; 4) $[1; 2]$. 76. 3) $(0; +\infty)$;

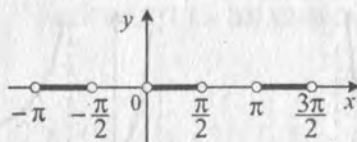


Рис. 12

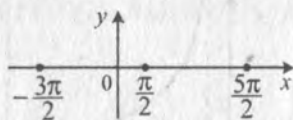


Рис. 13

4) $[1; +\infty)$. 77. 1) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

81. 1. 82. $\frac{2-a}{a+b-1}$. 83. 3) $D(y) = (1; 2) \cup (2; 5)$;

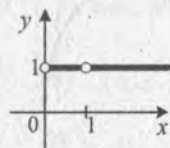


Рис. 14

4) $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 87. 4) Рис. 12; 5) рис. 13;

6) рис. 14. 89. 4) 1; 5) -4; 6) 5; 7) 3; 8) 1. 90. 4) 100;

1000; 5) 10; 100; 6) 10; 7) $\frac{1}{128}$; 2; 8) $\frac{1}{9}$; 3. 91. 1) 100; 0,01; 10; 0,1;

2) $\frac{1}{8}$; 64; 3) 1000. 92. 1) Якщо $a > -4$, то $x = a + 2$. Вказівка. Дане

рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x+2=2x-a, \\ x+2>0; \end{cases}$ 2) якщо $a < \frac{1}{2}$, то $x=1$

або $x=2a-2$; якщо $\frac{1}{2} \leq a < 1$, то $x=2a-2$. Вказівка. Дане рівняння

рівносильне системі $\begin{cases} x^2-2ax=-x-2a+2, \\ -x-2a+2>0. \end{cases}$ 93. $b < -\frac{1}{2}$ або $b=5,5$.

94. 11) $[-3; -2) \cup (2; 8]$; 12) $(2; 7) \cup (22; 27)$; 13) $(-6; -2)$; 14) $(1; 3]$.

95. 3) $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [81; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{31}{16}; 0\right]$. 96. 1) $\left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$;

2) $(-2; -1,5) \cup [-1; 3]$. 97. $0 < a < 1$ або $a > \sqrt{2}$. 98. 1) $(8; 2)$, $(0,25; 64)$;

2) $(3; 4)$, $(-3; 1)$; 3) $(2; 6)$; 4) $(4; 2)$; 5) $(3; 1)$; 6) $(5; 1)$.

99. 16) $y' = \cos 2^{x^2+5} \cdot 2^{x^2+5} \ln 2 \cdot 2x$. 100. 3) $\frac{4}{e^3}$; 4) $4e^\pi$. 101. 1) $[-1; 4]$;

2) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. 102. 8) $y' = \frac{1-2\ln x}{x^3}$; 9) $y' = \frac{x^2(3\ln x - 2)}{\ln^3 x}$; 10) $y' =$

$$= 2x \ln(x^3 + 1) + \frac{3x^4}{x^3 + 1}; 11) y' = \frac{2^x \ln 4 + 5^x \ln 10}{(2^x + 5^x) \ln 4}; 12) y' = \frac{\lg e}{2x \sqrt{\lg x - 2}};$$

$$13) y' = \frac{4x - 4}{(2x^2 - 4x + 3) \ln 0,3}; 14) y' = \frac{1 - \ln x - x}{(x - 1)^2}. \quad 104. [-1; 0).$$

$$106. 2) y = -3e^2 x + 4e^2; 3) y = 75x \ln 5 + 25 - 150 \ln 5; 4) y = 4x + 4;$$

$$5) y = 2 - x; 6) y = \frac{2}{25 \ln 5} x + 2 - \frac{18}{25 \ln 5}. \quad 107. \left(\frac{5}{3}; \ln 3\right). \quad 108. 1) y = e^2 x -$$

$$-\frac{1}{2}e^2; 2) y = 3x - 1. \quad 109. y = -1089. \quad 110. 2) \text{ Зростає на } (-\infty; 3], \text{ спадає}$$

$$\text{на } [3; +\infty), x_{\max} = 3; 3) \text{ зростає на } R; 4) \text{ зростає на } \left[\frac{1}{4}; +\infty\right), \text{ спадає на}$$

$$\left(-\infty; \frac{1}{4}\right], x_{\min} = \frac{1}{4}; 5) \text{ зростає на } (-\infty; 3], \text{ спадає на } [3; +\infty), x_{\max} = 3;$$

$$6) \text{ зростає на } [2; +\infty), \text{ спадає на } (-\infty; 1) \text{ і } (1; 2], x_{\min} = 2; 7) \text{ зростає на}$$

$$(-\infty; 1] \text{ і } [2; +\infty), \text{ спадає на } [1; 2], x_{\max} = 1, x_{\min} = 2; 10) \text{ зростає на}$$

$$\left(0; \frac{1}{e^2}\right] \text{ і } [1; +\infty), \text{ спадає на } \left[\frac{1}{e^2}; 1\right], x_{\min} = 1, x_{\max} = \frac{1}{e^2}; 11) \text{ зростає}$$

$$\text{на } \left[\frac{1}{\sqrt[3]{e}}; +\infty\right), \text{ спадає на } \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right], x_{\min} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}; 12) \text{ зростає на } (0; 1) \text{ і}$$

$$[e^2; +\infty), \text{ спадає на } (1; e^2], x_{\min} = e^2; 13) \text{ зростає на } \left(0; \frac{1}{e}\right] \text{ і } [e; +\infty),$$

$$\text{спадає на } \left[\frac{1}{e}; e\right], x_{\min} = e, x_{\max} = \frac{1}{e}; 14) \text{ зростає на } [0,5; 1] \text{ і } [2; +\infty),$$

$$\text{спадає на } (0; 0,5] \text{ і } [1; 2], x_{\min} = 0,5 \text{ і } x_{\min} = 2, x_{\max} = 1; 15) \text{ зростає на}$$

$$[-1; 0), \text{ спадає на } (-\infty; -1], x_{\min} = -1; 16) \text{ зростає на } (-1; 0], \text{ спадає на}$$

$$[0; +\infty), x_{\max} = 0; 17) \text{ зростає на } \left[\frac{1}{e^4}; 1\right] \text{ і } [e; +\infty), \text{ спадає на } \left(0; \frac{1}{e^4}\right] \text{ і}$$

$$[1; e], x_{\min} = \frac{1}{e^4} \text{ і } x_{\min} = e, x_{\max} = 1.$$

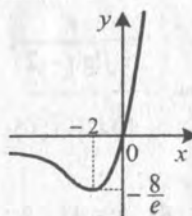


Рис. 15

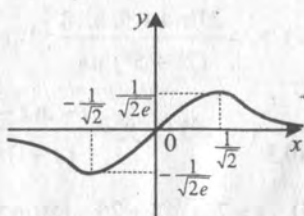


Рис. 16

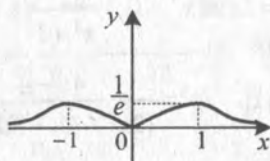


Рис. 17

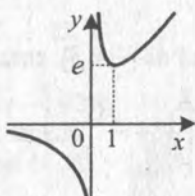


Рис. 18

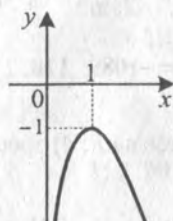


Рис. 19

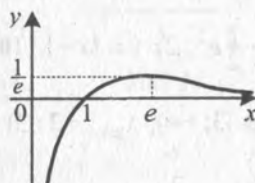


Рис. 20

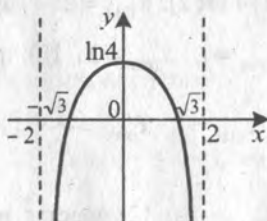


Рис. 21

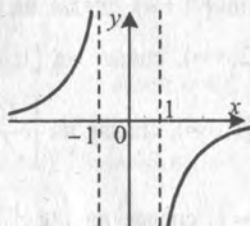


Рис. 22

111. 2) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{64}$; 3) $9\frac{1}{9}$; 2; 4) $6e^8$; $-e^5$; 5) 24; 0. 112. 1) Рис. 15;

2) рис. 16; 3) рис. 17; 4) рис. 18; 5) рис. 19; 6) рис. 20; 7) рис. 21; 8) рис.

22. 113. $a \geq 0$. 114. $a \leq 3$. 115. Оскільки функція $f(x)$ зростає на

$[0; +\infty)$, то $f(x) > f(0)$ при $x > 0$. 117. 4) $(n-k+1) \dots (n-1)n$. 122. $n!$.

123. $4! - 3! = 18$. 124. 1) $5! = 120$; 2) $\frac{7!}{2!} = 2520$; 3) $\frac{8!}{2!2!} = 10\,080$.

127. 1) 5; 2) 12. 128. $A_{11}^2 = 110$. 130. $A_5^3 = 60$. 131. $A_8^2 = 56$.

132. $\frac{1}{2} A_8^2 = 28$. 133. $A_5^3 - A_4^2 = 48$. 139. 1) 16; 2) 6; 3) 4; 4) 25; 5) 8; 6) 8.

140. 1) 18; 2) 6; 3) 10; 4) 7; 5) 4; 6) 5. 141. $C_{32}^4 = 35\,960$.
 142. $C_{25}^3 = 2300$. 143. $C_5^2 = 10$. 144. $C_{17}^5 = 6188$. 145. $C_{15}^3 \cdot C_{12}^4 = 225\,225$.
 146. $C_{10}^2 \cdot C_8^2 = 1260$. 147. $C_{12}^2 \cdot C_7^2 = 1386$. 148. $C_{15}^1 \cdot C_{14}^1 = 210$.
 149. $C_4^3 \cdot C_{47}^7$. 151. $n=8$. 152. $n=10$. 153. 256. 154. *Вказівка*. Покладіть у розкладі бінома $a=b=1$. 157. 19. 158. $792x^{6,5}$. 159. $-120a^{21}b$.
 160. $20x^{-1,5}$. 161. 3. 162. -5005 . 163. $495x^2$. 164. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{2}$;
 4) $\frac{1}{6}$. 165. $\frac{5}{6}$. 166. 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{36}$. 167. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. 168. 1) $\frac{12}{365}$ або $\frac{12}{366}$;
 2) $\frac{7}{365}$ або $\frac{7}{366}$; 3) $\frac{11}{365}$ або $\frac{12}{366}$. 169. $\frac{17}{43}$. 170. $\frac{3}{5}$. 171. $\frac{4}{45}$.
 172. $\frac{1}{C_8^2} = \frac{1}{28}$. 173. $\frac{1}{2}$. 174. $\frac{10}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$. 175. $\frac{1}{C_5^4} = \frac{1}{5}$. 176. $\frac{1}{A_6^4} = \frac{1}{360}$.
 177. $\frac{C_{22}^5}{C_{30}^5}$. 178. $\frac{C_4^2}{C_{36}^2}$. 179. $\frac{C_{35}^4}{C_{40}^4}$. 180. $\frac{C_{40}^4 \cdot C_{10}^1}{C_{50}^5}$. 181. $\frac{C_8^3 \cdot C_6^2}{C_{14}^5}$. 182. $\frac{12!}{12^{12}}$.
 183. $\frac{1}{2}$. 184. $\frac{4}{5}$. 185. 1) 0,14; 2) 0,34; 3) 0,66. 186. $\frac{C_{10}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2}{C_{35}^2}$.
 187. $\frac{1}{36}$. 188. $\frac{1}{4}$. 189. $\frac{3}{8}$. 190. $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$. 191. $0,04 \cdot 0,02 \cdot 0,01$.
 192. $\left(\frac{C_4^2}{C_7^2}\right)^2$. 193. $0,3 \cdot 0,8 = 0,24$. 194. $0,4 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,01$.
 195. 1) $0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,6$; 2) $(1-0,7)(1-0,8)(1-0,6)$; 3) $(1-0,7)(1-0,8) \cdot 0,6 +$
 $+ (1-0,7)(1-0,6) \cdot 0,8 + (1-0,8)(1-0,6) \cdot 0,7$. 196. $\frac{5}{22} \cdot \frac{3}{20} + \frac{9}{22} \cdot \frac{7}{20} +$
 $+ \frac{8}{22} \cdot \frac{10}{20}$. 197. $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8$. 198. 1) $0,9 \cdot 0,7$; 2) $(1-0,9)(1-0,7)$;
 3) $0,9 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,3$ або $1 - (1-0,9)(1-0,7)$; 4) $0,9 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,7$.

199. $1 - (1 - 0,8)^7$. 200. 1) $C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3}$; 2) $C_{10}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$;

3) $C_{10}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_{10}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} + C_{10}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2}$;

4) $1 - \left(C_{10}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_{10}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} + C_{10}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2} \right)$.

201. $C_8^5 \left(\frac{3}{5}\right)^5 \left(\frac{3}{5}\right)^{8-5}$.

202. 1) $C_7^3 \left(\frac{7}{11}\right)^3 \left(\frac{4}{11}\right)^{7-3}$; 2) $C_7^0 \left(\frac{7}{11}\right)^0 \left(\frac{4}{11}\right)^{7-0} + C_7^1 \left(\frac{7}{11}\right)^1 \left(\frac{4}{11}\right)^{7-1}$;

3) $1 - \left(C_7^0 \left(\frac{7}{11}\right)^0 \left(\frac{4}{11}\right)^{7-0} + C_7^1 \left(\frac{7}{11}\right)^1 \left(\frac{4}{11}\right)^{7-1} + C_7^2 \left(\frac{7}{11}\right)^2 \left(\frac{4}{11}\right)^{7-2} \right)$.

203. 1) $C_9^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{9-4}$; 2) $C_9^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{9-4} + C_9^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^{9-5}$.

204. 1) $C_7^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-2}$; 2) $C_7^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_7^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} +$

$+ C_7^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-2} + C_7^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3}$; 3) $C_7^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-6} +$

$+ C_7^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-7}$. 205. Вказівка. Порівняйте $C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}$ і

$C_9^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{9-6}$. 208. 1) Так; 2) ні. 209. 4) $F(x) = -\frac{1}{3x^3} - 1$;

5) $F(x) = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + 3$. 210. 7) $\frac{8}{3}x\sqrt{x} - x^8 + C$; 8) $0,6x\sqrt[3]{x^2} + 4x + C$.

212. 10) $-2^{-x} - 2e^{-0,5x} + C$; 11) $2e^{3x-4} - 2e^{1-4x} + C$. 213. 2) $F(x) =$

$= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(4x - \frac{\pi}{12} \right) + \sqrt{3}$; 3) $F(x) = \frac{2}{9} \sqrt{9x-2} - \frac{1}{9}$; 6) $F(x) = 2x^3 +$

$$+\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{4}; 9) F(x)=-e^{-x}+\frac{1}{3}\ln(1-3x)+1; 10) F(x)=3\sqrt{x+4}+4\ln(x-4)-11. 214. F(x)=x^2-x-6. 215. F(x)=x^3-6x^2+3x+10, x_2=2, x_3=5. 216. F(x)=-2x^2+3x+\frac{15}{8}. 217. F(x)=3,5x^2-4x+17.$$

Вказівка. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка шуканої первісної в довільній точці x дорівнює $7x-4$. 219. 1) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$;

$$2) \frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+3x^3+C; 3) -\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{2}\cos x+C. 220. 1) -4\operatorname{ctg}\frac{x}{4}-x+C; 2) \frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}+C. 221. F(x)=3x-x^2+3; (0; 3); (5; -7).$$

$$222. f(x)=2x-x^3+5. 223. 8) 1; 9) 4; 15) 12\frac{2}{3}; 18) \frac{4\sqrt{2}}{3}; 19) \frac{45}{4}; 20) -\frac{\sqrt{3}}{3}; 23) 3e-2-\frac{35}{\ln 8}; 25) 8\frac{80}{81}; 26) \frac{198}{5\ln 10}. 224. 3) \frac{4\pi-7\sqrt{3}}{64}.$$

Вказівка. Застосуйте послідовно формули пониження степеня, квадрата різниці, пониження степеня; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$. *Вказівка.* Застосуйте

формулу перетворення добутку косинусів у суму; 6) $\frac{19}{30}$; 7) $\frac{13}{16}$; 8)

$$98\frac{1}{6}+\ln 1,5; 9) \frac{2}{\ln 3}+\frac{5}{\ln 2}; 10) \frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{2}; 11) 3,75-4\ln 2; 12)$$

$$-1,25-4\ln 2. 225. 22\frac{5}{6}. \text{Вказівка. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$226. 2) 108 \text{ м. } 230. 1) 10\frac{2}{3}; 2) 4,5; 3) 2\frac{2}{3}; 4) 4,5; 5) 4,5; 6) 1\frac{1}{3}; 7) \frac{1}{3}; 8)$$

$$1\frac{1}{3}; 9) e^3-4; 10) 8-\frac{3}{\ln 2}; 11) 8-\frac{3}{\ln 2}; 15) 24-7\ln 7; 16) 1,5-2\ln 1,5;$$

$$17) 6,2-\ln 2; 18) \frac{14}{3}-\ln 4. 231. 1) 10\frac{2}{3}; 2) 4; 3) 2\frac{1}{3}. 232. 1) 2\pi; 2)$$

$$\frac{9\pi}{4}; 3) \frac{25\pi}{4}. 233. 9. 234. a=1. 235. 2\frac{1}{6}. \text{Вказівка. Шукана площа}$$

дорівнює сумі площ трьох заштрихованих фігур, зображених

на рисунку 23. 236. $a=7,5$. 237. $a=6$. 239. $\frac{2\pi}{9}$.

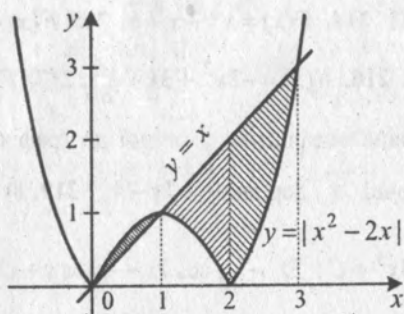


Рис. 23

Таблиця похідних деяких функцій

Функція f	Похідна f'
k (стала)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Таблиця первісних деяких функцій

Функція f	Загальний вигляд первісних функцій f
k (стала)	$kx + C$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
e^x	$e^x + C$

Зміст

Від авторів	3
Тематичний розподіл тренувальних вправ.....	4
Тренувальні вправи	6
Варіант 1	6
Варіант 2	38
Контрольні роботи.....	70
Варіант 1	70
Варіант 2	77
Відповіді та вказівки до тренувальних вправ.....	84
Таблиця похідних деяких функцій.....	93
Таблиця первісних деяких функцій	94

Навчальне видання

Мерзляк Аркадій Григорович
Полонський Віталій Борисович
Рабінович Юхим Михайлович
Якір Михайло Семенович

Алгебра

11 клас

Збірник задач і контрольних робіт

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Комп'ютерне верстання *О. О. Удалова*
Коректор *Т. Є. Цента*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.

Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 6,00.

Тираж 5000 прим. Зам. № 382

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

АЛГЕБРА

11
клас

Навчально-методичний комплект

Підручник

Книга
для
вчителя

Збірник
задач
і контрольних
робіт

ДЛЯ ТИХ, ХТО ПРАГНЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

**ПІДРУЧНИК ДЛЯ 11 КЛАСУ
ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ
НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ.
АКАДЕМІЧНИЙ РІВЕНЬ**



ТОВ ТО «Гімназія»

вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052

Тел.: (057) 719-17-26, 758-83-93, 719-46-80

факс: (057) 758-83-93

e-mail: contact@gymnasia.com.ua

